2024-2025 学年重庆市高二上学期期中第二次数学质量检测试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 直线 $x+\sqrt{3}y+1=0$ 的倾斜角是（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

2. 已知点 $A\left(1,0,0\right),B\left(0,1,0\right),C\left(0,0,1\right)$，则平面 ABC 的法向量可以是（　　）

A. $\left(1,1,1\right)$　　B. $(-1,\frac{1}{2},1)$　　C. $(0,\frac{1}{2},0)$　　D. $\left(-1,0,1\right)$

3. 已知焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦距为 6，则实数 m 等于（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{21}{4}$　　C. 12　　D. $12-6\sqrt{3}$

4. 若直线 l_1：$mx+y-10=0$ 与直线 l_2：$\left(m+2\right)x+my+10=0$ 相互平行，则 l_1、l_2 之间的距离为（　　）

A. 3　　B. $4\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{5}$ 或 $3\sqrt{5}$

5. 已知圆 M：$\left(x+1\right)^2+\left(y+2\right)^2=1$，求圆 M 关于直线 l：$2x-y-5=0$ 的对称圆方程（　　）

A. $\left(x-4\right)^2+\left(y+3\right)^2=1$　　B. $\left(x+4\right)^2+\left(y+3\right)^2=1$

C. $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=1$　　D. $\left(x-3\right)^2+\left(y+4\right)^2=1$

6. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=AB=AC=BC=2$，PC 与平面 ABC 所成角的大小为 $60°$，则 $PC=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

7. 已知在平面直角坐标系 Oxy 中，$A(-2,0)$，$B(4,0)$.点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，设点 P 所构成的曲线为 C，下列结论正确的是（　　）

A. 曲线 C 的方程为 $(x-4)^2+y^2=16$

B. 曲线 C 上存在点 D，使得 D 到点 $(1,1)$ 的距离为 10

C. 曲线 C 上存在点 M，使得 $|MO|=2|MA|$

D. 曲线 C 上的点到直线 $3x-4y-13=0$ 的最大距离为 9

8. 若直线 $y=k(x-3)-1$ 与曲线 C：$y=\sqrt{2-x^2}$ 有两个不同的公共点，则 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(-1,\frac{1}{7}\right)$

B. $\left(-\frac{3+\sqrt{2}}{7},-\frac{1}{7}\right]$

C. $\left(-1,-\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right]$

D. $(-\infty,-1)\cup\left\{-\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right\}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分.

9. 已知直线 l：$x+\sqrt{3}y+c=0(c\neq 0)$，O 为坐标原点，则（　　）

A. 直线 l 的倾斜角为 120°

B. 若 O 到直线 l 的距离为 1，则 $c=2$

C. 过 O 且与直线 l 平行的直线方程为 $x+\sqrt{3}y=0$

D. 过 O 且与直线 l 垂直的直线方程为 $\sqrt{3}x-y=0$

10. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，$F_1$，$F_2$ 分别为它的左右焦点，点 P 是椭圆上的一个动点，下列结论中正确的有（　　）

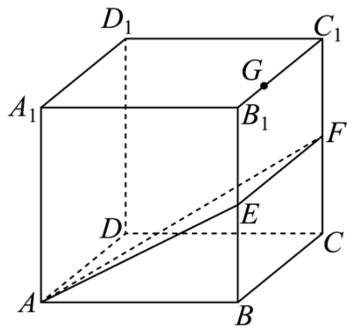
A. 椭圆离心率为 $\frac{9}{25}$

B. $|PF_1|+|PF_2|=10$

C. 若 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 9

D. $\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}$ 最小值为 $\frac{2}{5}$

11. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 BB_1，CC_1 的中点，G 是棱 B_1C_1 上的一个动点，M 为侧面 BB_1C_1C 上的动点，则下列说法正确的是（　　）



A. 点 G 到平面 AEF 的距离为定值

B. 若 $D_1M \perp MC$，则 BM 的最小值为 2

C. 若 $\overrightarrow{A_1G}=x\overrightarrow{A_1A}+y\overrightarrow{A_1E}+z\overrightarrow{A_1D_1}$，且 $x+y+z=1$，则点 G 到直线 AF 的距离为 $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

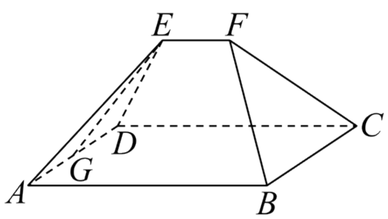
D. 直线 AG 与平面 AEF 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{15}}{15},\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right]$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知直线 l 的方向向量为 $(1,2)$，且直线 l 经过点 $(2,-3)$，则直线 l 的方程为__________.

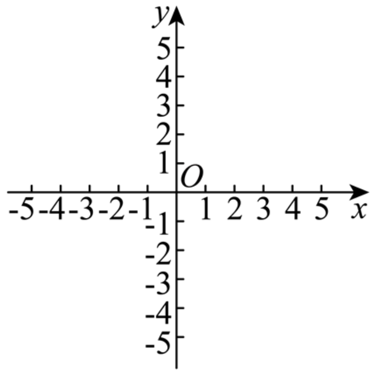
13. 已知 P 为椭圆 C 上一点，F_1，F_2 为 C 的两个焦点，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，$|PF_1|=|F_1F_2|$，则 C 的离心率为________.

14. 中国古代数学名著《九章算术》中记载：“刍甍者，下有袤有广，而上有袤无广，刍，草也，甍，屋盖也.”翻译为“底面有长有宽为矩形，顶部只有长没有宽为一条棱．刍甍是茅草屋顶.”现有一个刍甍如图所示，其中四边形 $ABCD$ 为矩形，$EF//AB$，若 $\dfrac{1}{3}AB=\dfrac{1}{2}AD=EF$，$\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形，G 为 AD 的中点，则异面直线 GE 与 CF 所成角的余弦值为______.



四、解答题：本题共 5 题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 椭圆 E 的焦点分别为 F_1 、 F_2 且满足，经过 $P\left(2\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$， $Q\left(2,3\sqrt{2}\right)$ 两点.

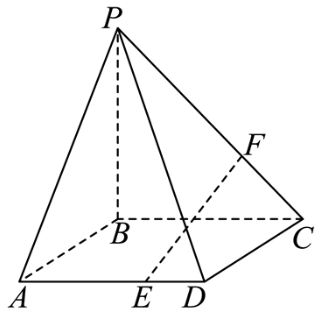


（1）求椭圆 E 的标准方程和椭圆 E 的离心率 e、长轴长、短轴长，并在坐标系中画上椭圆 E 的草图

（2）设点 M 为椭圆 E 上一点且满足 $\angle F_1MF_2=60^\circ$，求 $\triangle MF_1F_2$ 的周长和面积.

16. 如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形， $PB\perp$ 底面 $ABCD$，

$AB=BC=3,BP=3,CF=\dfrac{1}{3}CP,DE=\dfrac{1}{3}DA$.



（1）证明：直线 $EF//$ 平面 ABP；

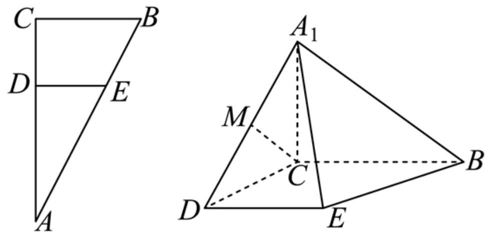
（2）求点 P 到平面 ADF 的距离.

17. 已知圆 $C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$，圆 $C_1:(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 及点 $P(3,1)$.

（1）判断圆 C 和圆 C_1 的位置关系，并说明理由；

（2）若斜率为 k 的直线 l 经过点 P 且与圆 C 相切，求直线 l 的方程.

18. 在 $\mathrm{Rt}\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$AC=6$，D,E 分别是 AC,AB 上的点，满足 $DE//BC$ 且 DE 经过 $\vee ABC$ 的重心，将 $\vee ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使 $A_1C\perp CD$，M 是 A_1D 的中点，如图所示.



（1）求证：$A_1C\perp$平面$BCDE$；

（2）在线段A_1C上是否存在点N，使平面CBM与平面BMN的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$,若存在，求出CN的长度；若不存在，请说明理由．

19. 古希腊数学家阿波罗尼奥斯（约公元前262～公元前190年）的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果，著作中有这样一个命题：平面内与两定点距离的比为常数$k(k>0$且$k\neq 1)$的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆.已知平面直角系xOy中的点$E\left(\sqrt{2},0\right),F\left(2\sqrt{2},0\right)$，则满足$\left|PF\right|=\sqrt{2}\left|PE\right|$的动点$P$的轨迹记为圆$E$.

（1）求圆E的方程；

（2）若直线l为$ax-y+1-a=0$，证明：无论a为何值，直线l与圆E恒有两个交点；

（3）若点$A\left(-2,2\right),B\left(-2,6\right),C\left(4,-2\right)$，当$P$在$E$上运动时，求$2\left|PA\right|^2+\left|PB\right|^2+|PC|^2$的最大值和最小值.

2024-2025学年重庆市高二上学期期中第二次数学质量检测试题

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 直线$x+\sqrt{3}y+1=0$的倾斜角是（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

【正确答案】D

【分析】由题可得其斜率，即可得倾斜角.

【详解】$x+\sqrt{3}y+1=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

设其倾斜角为α，则$\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又$\alpha\in\left[0^{\circ},180^{\circ}\right)$,

则$\alpha=150^{\circ}$，即倾斜角为150°.

故选：D

2. 已知点$A\left(1,0,0\right),B\left(0,1,0\right),C\left(0,0,1\right)$，则平面$ABC$的法向量可以是（　　）

A. $\left(1,1,1\right)$　　B. $(-1,\dfrac{1}{2},1)$　　C. $(0,\dfrac{1}{2},0)$　　D. $\left(-1,0,1\right)$

【正确答案】A

【分析】根据法向量的求法求得正确答案.

【详解】$\overrightarrow{AB}=\left(-1,1,0\right),\overrightarrow{AC}=\left(-1,0,1\right)$，设平面$ABC$的法向量为$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$,

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+z=0\end{cases}$，则$x=y=z$，只有A选项符合.

故选：A

3. 已知焦点在x轴上的椭圆$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{3}=1$的焦距为6，则实数$m$等于（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{21}{4}$　　C. 12　　D. $12-6\sqrt{3}$

【正确答案】C

【分析】根据椭圆的标准方程建立方程，解之即可求解.

【详解】由题意知，$m>3,a=\sqrt{m},b=\sqrt{3},c=3$，

又$a^2=b^2+c^2$，所以$m=3+9=12$，

即实数m的值为12.

故选：C

4. 若直线l_1：$mx+y-10=0$与直线l_2：$(m+2)x+my+10=0$相互平行，则l_1、l_2之间的距离为（　　）

A. 3　　B. $4\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{5}$或$3\sqrt{5}$

【正确答案】C

【分析】根据两直线平行求出参数m的值，再利用两平行线之间的距离公式即可得解.

【详解】因为直线$l_1:mx+y-10=0$与直线$l_2:(m+2)x+my+10=0$平行，

$m^2-1\times(m+2)=0$，解得$m=-1$或2，

当$m=-1$时，$l_1:-x+y-10=0$与$l_2:x-y+10=0$重合，不符合题意；

当$m=2$时，$l_1:2x+y-10=0$与$l_2:2x+y+5=0$平行，符合题意；

则l_1与l_2之间的距离$d=\frac{|-10-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3\sqrt{5}$.

故选：C.

5. 已知圆M：$(x+1)^2+(y+2)^2=1$，求圆M关于直线l：$2x-y-5=0$的对称圆方程（　　）

A. $(x-4)^2+(y+3)^2=1$　　B. $(x+4)^2+(y+3)^2=1$

C. $(x-3)^2+(y-4)^2=1$　　D. $(x-3)^2+(y+4)^2=1$

【正确答案】D

【分析】设对称圆的圆心(a,b)，解方程组$\begin{cases}2\times\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{b-2}{2}-5=0\\ \dfrac{b+2}{a+1}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$即得解.

【详解】圆M的圆心为$M(-1,-2)$，设对称圆的圆心为(a,b)，

依题意得$\begin{cases}2\times\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{b-2}{2}-5=0\\ \dfrac{b+2}{a+1}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\ b=-4\end{cases}$，

又圆M的半径与对称圆的半径相等，

所以对称圆的方程为$(x-3)^2+(y+4)^2=1$.

故选：D.

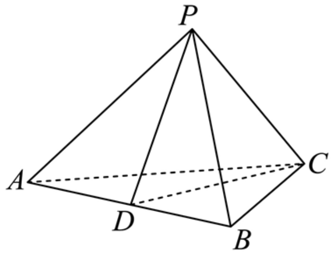
6. 在三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=AB=AC=BC=2$，PC与平面ABC所成角的大小为$60°$，则$PC=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【正确答案】C

【分析】取AB的中点D，可证平面$ABC\perp$平面PCD，结合面面垂直的性质可知点P在平面ABC内的投影落在线段CD内，即$\angle PCD=60°$，即可得结果.

【详解】取AB的中点D，连接PD,CD，



因为$PA=PB=AB=AC=BC=2$，则$PD\perp AB,CD\perp AB,PD=CD=\sqrt{3}$，

且$PD\cap CD=D$，$PD,CD\subset$平面PCD，可得$AB\perp$平面PCD，

又因为$AB\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面PCD，

且平面$ABC\cap$平面$PCD=CD$，

由面面垂直的性质可知：点P在平面ABC内的投影落在直线CD上，

且$PD=CD=\sqrt{3}$，可知点P在平面ABC内的投影落在线段CD内，

又因为PC与平面ABC所成角的大小为$60°$，则$\angle PCD=60°$，

可知$\triangle PCD$为等边三角形，所以$PC=\sqrt{3}$.

故选：C.

7. 已知在平面直角坐标系 Oxy 中，$A\left(-2,0\right)$，$B\left(4,0\right)$.点 P 满足$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{1}{2}$，设点 P 所构成的曲线为 C，下列结论正确的是（　　）

A. 曲线 C 的方程为$\left(x-4\right)^2+y^2=16$

B. 曲线 C 上存在点 D，使得 D 到点$\left(1,1\right)$的距离为 10

C. 曲线 C 上存在点 M，使得$|MO|=2|MA|$

D. 曲线 C 上的点到直线$3x-4y-13=0$的最大距离为 9

【正确答案】D

【分析】根据A、B两点坐标以及由两点间距离公式即可整理得点 P 所构成的曲线为 C 的方程为$\left(x+4\right)^2+y^2=16$，即可判断 A；利用点$\left(1,1\right)$到圆上点距离的最大值，即可知在 C 上不存在点 D，即可判断 B；设$M\left(x_0,y_0\right)$，利用两点间距离公式得到方程和$\left(x_0+4\right)^2+y_0^2=16$联立，无解，即可判断 C；求出 C 的圆心$\left(-4,0\right)$到直线$3x-4y-13=0$的距离，可得曲线 C 上的点到直线$3x-4y-13=0$的最大距离为 9，即可判断 D.

【详解】对于 A，由题意可设点$P(x,y)$，

由$A(-2,0)$，$B(4,0)$，$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，得$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，

化简得$x^2+y^2+8x=0$，即$(x+4)^2+y^2=16$，故 A 错误；

对于 B，点$(1,1)$到圆上的点的最大距离$\sqrt{(-4-1)^2+(0-1)^2}+4<10$，
故不存在点 D 符合题意，故 B 错误；

对于 C，设$M(x_0,y_0)$，由$|MO|=2|MA|$，

得$\sqrt{x_0{}^2+y_0^2}=2\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}$，又$(x_0+4)^2+y_0^2=16$，

联立方程消去y_0得$x_0=2$，得y_0无解，故 C 错误；

对于 D，C 的圆心$(-4,0)$到直线$3x-4y-13=0$的距离为$d=\frac{|3\times(-4)-13|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$，

且曲线 C 的半径为 4，则 C 上的点到直线$3x-4y-13=0$的最大距离$d+r=5+4=9$，故 D 正确.

故选：D.

8. 若直线$y=k(x-3)-1$与曲线 C：$y=\sqrt{2-x^2}$有两个不同的公共点，则 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(-1,\frac{1}{7}\right)$

B. $\left(-\frac{3+\sqrt{2}}{7},-\frac{1}{7}\right]$

C. $\left(-1,-\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right]$

D. $(-\infty,-1)\cup\left\{-\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right\}$

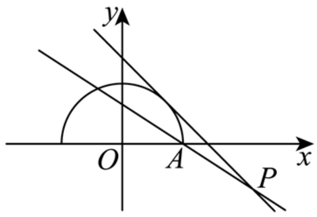
【正确答案】C

【分析】根据曲线的方程可得曲线$y=\sqrt{2-x^2}$是以原点为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆的x轴的上半部分（含x轴），求出直线与圆相切时k的值，再结合图形即可求解.

【详解】由$y=\sqrt{2-x^2}$得$x^2+y^2=2(y\geq 0)$，

所以曲线是以原点为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆的x轴的上半部分（含x轴），

直线$y=k\left(x-3\right)-1$过定点$P(3,-1)$，



当直线$y=k\left(x-3\right)-1$与圆$x^2+y^2=2(y\geq 0)$相切时，

圆心到直线的距离$d=\frac{|0-0-3k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，

解得$k=-1$或$k=\frac{1}{7}$（舍去），

当直线$y=k\left(x+2\right)+1$过点$A(\sqrt{2},0)$时，

直线斜率为$k=\frac{0-\left(-1\right)}{\sqrt{2}-3}=-\frac{\sqrt{2}+3}{7}$，

结合图形可得实数k的取值范围是$\left(-1,-\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right]$.

故选：C.

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全选对的得6分，有选错的得0分，部分选对的得部分分.

9. 已知直线l：$x+\sqrt{3}y+c=0\left(c\neq 0\right)$，$O$为坐标原点，则（　　）

A. 直线l的倾斜角为$120°$

B. 若O到直线l的距离为1，则$c=2$

C. 过O且与直线l平行的直线方程为$x+\sqrt{3}y=0$

D. 过O且与直线l垂直的直线方程为$\sqrt{3}x-y=0$

【正确答案】CD

【分析】根据直线l方程，得直线的倾斜角，可判断A；根据点到直线的距离公式计算可判断B，根据与知直线平行或垂直的直线方程求法可判断CD.

【详解】直线l可化为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}c$，

所以斜率$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，得倾斜角为$150°$，故A错误；

由点到直线的距离公式得$d=\frac{|c|}{\sqrt{1+4}}=1$，得$|c|=2$，

所以$c=\pm 2$，故B错误；

设与直线l平行的直线方程为$x+\sqrt{3}y+n=0$，

因为平行直线方程经过原点，所以$n=0$，

即平行直线方程为$x+\sqrt{3}y=0$，故C正确；

设与直线l垂直的直线方程为$\sqrt{3}x-y+m=0$，

因为垂直直线方程经过原点，所以$m=0$，

即垂直直线方程为$\sqrt{3}x-y=0$，故D正确.

故选.CD

10. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，$F_1$，$F_2$分别为它的左右焦点，点$P$是椭圆上的一个动点，下列结论中正确的有（　　）

A. 椭圆离心率为$\frac{9}{25}$

B. $|PF_1|+|PF_2|=10$

C. 若$\angle F_1PF_2=90°$，则$\triangle F_1PF_2$的面积为9

D. $\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}$最小值为$\frac{2}{5}$

【正确答案】BCD

【分析】由椭圆方程得到a,b,c的值，根据离心率的公式可判断A，根据椭圆的定义可判断B，根据勾股定理和椭圆的定义可得到$|PF_1||PF_2|$，从而由三角形面积公式可判断C，由基本不等式可判断D.

【详解】由椭圆方程可知，$a=5,b=3,c=\sqrt{a^2-b^2}=4$，

所以椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，故A错误；

由椭圆定义知$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，故B正确；

又$|F_1F_2|=2c=8$，因为$\angle F_1PF_2=90°$，所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=64$，

$\therefore (|PF_1|+|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=64+2|PF_1||PF_2|=100$，

解得$|PF_1||PF_2|=18$，所以$\triangle F_1PF_2$的面积为$\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=9$，故C正确；

$\because |PF_1|+|PF_2|=10$，

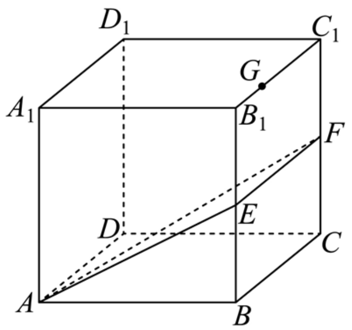
$\therefore \frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}=\frac{1}{10}(\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|})(|PF_1|+|PF_2|)=\frac{1}{10}(2+\frac{|PF_2|}{|PF_1|}+\frac{|PF_1|}{|PF_2|})$

$\geq \frac{1}{10}(2+2\sqrt{\frac{|PF_2|}{|PF_1|}\cdot\frac{|PF_1|}{|PF_2|}}=\frac{2}{5}$，当且仅当$|PF_1|=|PF_2|=5$时取等号，

$\therefore \frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}$最小值为$\frac{2}{5}$，故D正确.

故选：BCD.

11. 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱BB_1，CC_1的中点，G是棱B_1C_1上的一个动点，M为侧面BB_1C_1C上的动点，则下列说法正确的是（　　）



A. 点G到平面AEF的距离为定值

B. 若$D_1M\perp MC$，则BM的最小值为2

C. 若$\overrightarrow{A_1G}=x\overrightarrow{A_1A}+y\overrightarrow{A_1E}+z\overrightarrow{A_1D_1}$，且$x+y+z=1$，则点$G$到直线$AF$的距离为$\frac{\sqrt{17}}{3}$

D. 直线 AG 与平面 AEF 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{10}}{10}\right]$

【正确答案】ACD

【分析】利用平行线的传递性与平行线共面判断 A，利用线面垂直的判定定理判断 B，利用空间向量推得 A,E,D_1,G 四点共面，结合面面平行的性质定理判断 C，建立空间直角坐标系，利用空间向量法求得线面角的取值范围判断 D，从而得解.

【详解】对于 A，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 BB_1， CC_1 的中点，

所以 $B_1C_1 // EF$ ，

又 $EF\subset$ 平面 AEF ， $B_1C_1\not\subset$ 平面 AEF ，所以 $B_1C_1//$ 平面 AEF ，

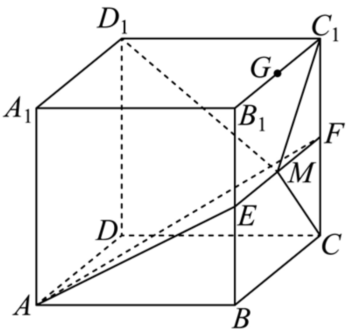
又点 G 是棱 B_1C_1 上的一个动点，所以点 G 到平面 AEF 的距离为定值，故 A 正确；

对于 B，连接 C_1M ，$\because D_1C_1\perp$ 面 BB_1C_1C ，$\therefore C_1M$ 是 D_1M 在平面 BB_1C_1C 上的射影，

要使 $D_1M\perp MC$ ，则 $C_1M\perp MC$ ，

所以点 M 的轨迹是平面 BB_1C_1C 上以 F 为圆心，1 为半径的半圆，

所以 BM 的最小值为 $BF-r=\sqrt{5}-1$ ，故 B 错误；



对于 C，连接 AD_1， D_1G， GE， BC_1，

因为 $\overrightarrow{A_1G}=x\overrightarrow{A_1A}+y\overrightarrow{A_1E}+z\overrightarrow{A_1D_1}$ ，且 $x+y+z=1$ ，所以 A，E， D_1 ，G 四点共面，

因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $ADD_1A_1//$ 平面 BCC_1B_1 ，

又平面 $ADD_1A_1\cap$ 平面 $AEGD_1=AD_1$ ，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $AEGD_1=GE$ ，

所以 $AD_1//GE$ ，

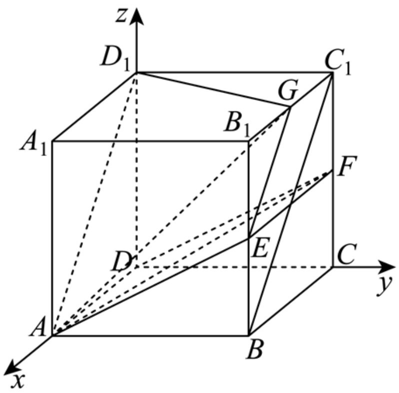
在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB \parallel C_1D_1$，$AB=C_1D_1$，

所以四边形ABC_1D_1是平行四边形，则$AD_1 \parallel BC_1$，则$GE \parallel BC_1$，

因为E为棱BB_1的中点，所以G为棱B_1C_1的中点，

故以D为原点，建立空间直角坐标系，如图，

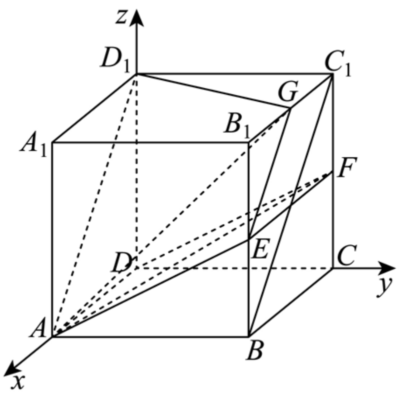
则$A(2,0,0)$，$E\left(2,2,1\right)$，$F\left(0,2,1\right)$，$G\left(1,2,2\right)$，



所以$\overrightarrow{AF}=\left(-2,2,1\right)$，$\overrightarrow{AG}=\left(-1,2,2\right)$，$\left|\overrightarrow{AF}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{AG}\right|=3$，

故点G到直线AF距离 $d=\sqrt{\left|\overrightarrow{AG}\right|^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AF}}{\left|\overrightarrow{AF}\right|}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$，故 C 正确；

对于 D，以D为原点，建立空间直角坐标系，如图，



设$C_1G=x$（$0\le x\le 2$），则$A(2,0,0)$，$E\left(2,2,1\right)$，$F\left(0,2,1\right)$，$G\left(x,2,2\right)$，

所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,2,1\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-2,0,0\right)$，$\overrightarrow{AG}=\left(x-2,2,2\right)$，

设平面AEF的法向量为$\vec{n}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=2b+c=0\\ \overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=-2a=0\end{cases}$，

令$b=1$，则$a=0,c=-2$，故$\vec{n}=\left(0,1,-2\right)$，

设直线AG与平面AEF所成角为θ（$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$），

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AG},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AG}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AG}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|2-4\right|}{\sqrt{\left(x-2\right)^2+4+4}\times\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{\left(x-2\right)^2+8}}$，

因为$0\le x\le 2$，所以$0\le\left(x-2\right)^2\le 4$，则$2\sqrt{2}\le\sqrt{\left(x-2\right)^2+8}\le 2\sqrt{3}$，

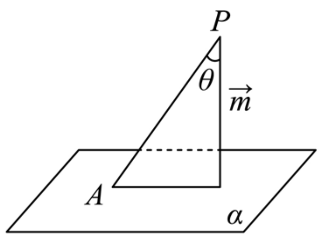
所以$\frac{\sqrt{15}}{15}=\frac{2}{\sqrt{5}\times 2\sqrt{3}}\le\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{\left(x-2\right)^2+8}}\le\frac{2}{\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以直线AG与平面AEF所成角的正弦值的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{10}}{10}\right]$，故 D 正确.

故选：ACD.

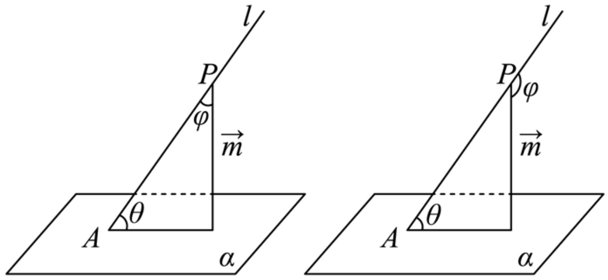
方法点睛：（1）向量法求点面距离：求出平面α的法向量$\vec{m}$，则点P到平面α的距离公式

为$d=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{m}\right|}$.



（2）向量法求线面所成角的正弦值：求出平面α的法向量$\vec{m}$，则

$\sin\theta=\left|\cos\overrightarrow{AP},\vec{m}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\vec{m}\right|}$.



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知直线 l 的方向向量为 $(1,2)$，且直线 l 经过点 $(2,-3)$，则直线 l 的方程为__________.

【正确答案】$2x-y-7=0$

【分析】根据直线的方向向量可得斜率，再由点斜式方程即可得出结果.

【详解】由直线 l 的方向向量为 $(1,2)$ 可得直线的斜率为 2，

又过点 $(2,-3)$ 可得直线 l 的方程为 $y+3=2(x-2)$，即 $2x-y-7=0$.

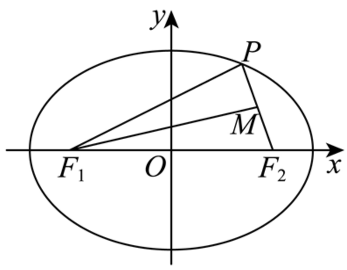
故 $2x-y-7=0$

13. 已知 P 为椭圆 C 上一点，F_1，F_2 为 C 的两个焦点，$\angle PF_1F_2=30°$，$|PF_1|=|F_1F_2|$，则 C 的离心率为________.

【正确答案】$\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2}$

【分析】利用等腰三角形的性质及特殊角的三角函数值结合椭圆的定义与性质计算即可

【详解】如图，取线段 PF_2 的中点 M，连接 F_1M，



因为 $|PF_1|=|F_1F_2|$，$\angle PF_1F_2=30°$，

所以 $\angle F_1PM=75°$，且 $F_1M\perp PF_2$，

所以

$$\cos\angle F_1PM=\frac{|PM|}{|PF_1|}=\cos75°=\cos(45°+30°)=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

，

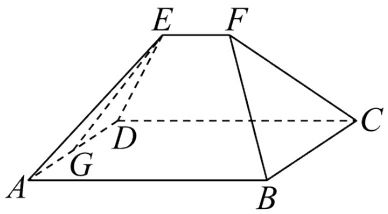
设 $|PM|=(\sqrt{6}-\sqrt{2})k,|PF_1|=4k$，

所以 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{|PF_1|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{4k}{4k+2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)k}$

$$=\frac{2}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2-3}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\right)}{-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2},$$

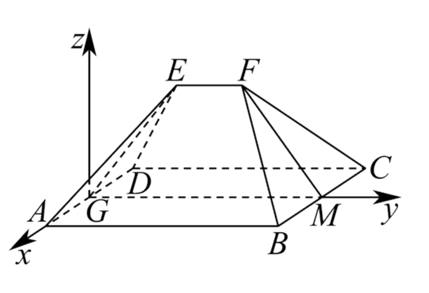
故 $\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2}$

14. 中国古代数学名著《九章算术》中记载："刍甍者，下有袤有广，而上有袤无广，刍，草也，甍，屋盖也."翻译为"底面有长有宽为矩形，顶部只有长没有宽为一条棱．刍甍是茅草屋顶."现有一个刍甍如图所示，其中四边形 $ABCD$ 为矩形，$EF//AB$，若 $\frac{1}{3}AB=\frac{1}{2}AD=EF$，$\vee ADE$ 和 $\vee BCF$ 都是正三角形，G 为 AD 的中点，则异面直线 GE 与 CF 所成角的余弦值为______.



【正确答案】$\frac{\sqrt{3}}{6}$

【分析】取 BC 中点 M，连接 FM，GM，易证 $AD\perp$ 平面 $EFMG$，再由等边三角形可知四边形 $EFMG$ 为等腰梯形，高为 $\sqrt{2}$，建立空间直角坐标系，利用向量法可得异面直线夹角余弦值.



【详解】

如图所示，设 $EF=1$，

取 BC 中点 M，连接 FM，GM，则 $GM//AB$，

又 $\because EF//AB$，

$\therefore EF//GM$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AD \perp GM$，

又 $\because \triangle ADE$ 为正三角形，G 为 AD 的中点，

$\therefore AD \perp EG$，

$\because GM \cap EG = G$，且 GM，$EG \subset$ 平面 $EFMG$，

$\therefore AD \perp$ 平面 $EFMG$，

易知 $\triangle ADE \cong \triangle BCF$，则 $EG = FM = \sqrt{3}$，

$\therefore$ 四边形 $EFMG$ 为等腰梯形，高为 $\sqrt{2}$，

在平面 $EFMG$ 内，过点 G 作 GM 的垂线，

以点 G 为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系，

则 $G\left(0,0,0\right)$，$E\left(0,1,\sqrt{2}\right)$，$C\left(-1,3,0\right)$，$F\left(0,2,\sqrt{2}\right)$，

即 $\overrightarrow{GE} = \left(0,1,\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{CF} = \left(1,-1,\sqrt{2}\right)$，

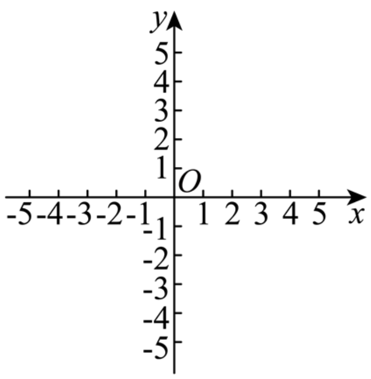
$$\therefore \cos\overrightarrow{GE},\overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{GE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right|} = \frac{-1+2}{\sqrt{3}\times 2} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

即异面直线 GE 与 CF 的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$，

故答案为. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

四、解答题：本题共 5 题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 椭圆 E 的焦点分别为 F_1、F_2 且满足，经过 $P\left(2\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$，$Q\left(2,3\sqrt{2}\right)$ 两点.



（1）求椭圆 E 的标准方程和椭圆 E 的离心率 e、长轴长、短轴长，并在坐标系中画上椭圆 E 的草图

（2）设点 M 为椭圆 E 上一点且满足 $\angle F_1MF_2=60^\circ$，求 $\triangle MF_1F_2$ 的周长和面积.

【正确答案】（1）答案见解析；

（2）周长为 $4\sqrt{6}+4\sqrt{2}$，面积为 $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

【分析】（1）首先设椭圆的一般方程 $mx^2+ny^2=1$，将两点坐标代入方程，即可求解，再根据椭圆的方程画出椭圆的草图，以及求得椭圆的性质；

（2）根据椭圆的定义，以及余弦定理，即可求解周长和面积.

【小问 1 详解】

设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1$，$P\left(2\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$，$Q\left(2,3\sqrt{2}\right)$ 在椭圆上，

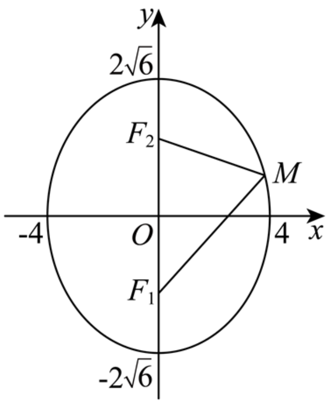
则 $\begin{cases}8m+12n=1\\4m+18n=1\end{cases}$，解得：$m=\dfrac{1}{16},n=\dfrac{1}{24}$，

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{24}+\dfrac{x^2}{16}=1$，

所以 $a^2=24$，$b^2=16$，$c^2=a^2-b^2=8$，所以 $a=2\sqrt{6}$，$b=4$，$c=2\sqrt{2}$，

所以椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，长轴 $2a=4\sqrt{6}$，短轴长 $2b=8$；

椭圆 E 的草图如图所示：



【小问 2 详解】

由（1）得$\triangle MF_1F_2$的周长为$|MF_1|+|MF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=4\sqrt{6}+4\sqrt{2}$，

设$|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，$m+n=2a=4\sqrt{6}$，

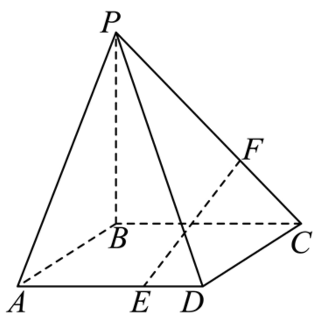
$\triangle MF_1F_2$中，$4c^2=m^2+n^2-2mn\cos 60^\circ$，

即$32=m^2+n^2-mn=(m+n)^2-3mn$，即$96-3mn=32$，解得$mn=\dfrac{64}{3}$，

所以$\triangle MF_1F_2$的面积$S=\dfrac{1}{2}mn\sin 60^\circ=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

16. 如图所示，四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是矩形，$PB\perp$底面$ABCD$，

$AB=BC=3, BP=3, CF=\dfrac{1}{3}CP, DE=\dfrac{1}{3}DA$.



（1）证明：直线$EF//$平面ABP；

（2）求点P到平面ADF的距离.

【正确答案】（1）证明见解析；

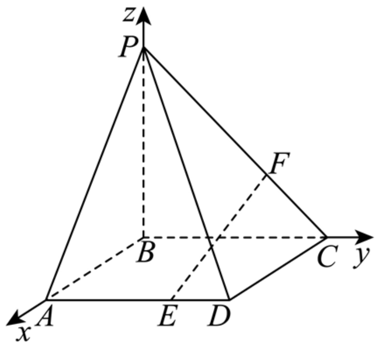
（2）$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

【分析】（1）根据题设建立合适的空间直角坐标系，应用向量法证明$\overrightarrow{EF}$与面ABP的一个法向量垂直，即可证结论；

（2）根据（1）所得坐标系，应用向量法求点面距离.

【小问 1 详解】

由$PB\perp$平面$ABCD$，且四边形$ABCD$为矩形，可建立如图所示空间直角坐标系，



则$B\left(0,0,0\right),A\left(3,0,0\right),C\left(0,3,0\right),D\left(3,3,0\right),P\left(0,0,3\right)$

由$CF=\dfrac{1}{3}CP$，得$\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CP}$，解得$F\left(0,2,1\right)$，同理$E\left(3,2,0\right)$，

$\therefore\overrightarrow{EF}=\left(-3,0,1\right)$，显然面$ABP$的一个法向量为$\vec{n}=\left(0,1,0\right)$，

显然$\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=0$且$EF\not\subset$面$ABP$，故$EF//$面$ABP$

【小问 2 详解】

设面ADF的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=\left(x,y,z\right)$，且$\overrightarrow{AD}=\left(0,3,0\right),\overrightarrow{DF}=\left(-3,-1,1\right)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{n_1}\\\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{n_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y=0\\-3x-y+z=0\end{cases}$，

取$x=1$，则$y=0,z=3$，

所以$\overrightarrow{n_1}=\left(1,0,3\right)$为平面$ADF$的一个法向量，

又$\overrightarrow{AP}=\left(-3,0,3\right)$，

点P到平面ADF的距离为$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_1\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

17. 已知圆$C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$，圆$C_1:(x-3)^2+(y-1)^2=4$及点$P(3,1)$.

（1）判断圆 C 和圆 C_1 的位置关系，并说明理由；

（2）若斜率为 k 的直线 l 经过点 P 且与圆 C 相切，求直线 l 的方程.

【正确答案】（1）圆 C 和圆 C_1 相交，理由见解析

（2）$y=1$ 或 $12x+5y-41=0$.

【分析】（1）求出两圆的圆心和半径，比较圆心距与半径和、差的关系，可得两圆的位置关系.

（2）设直线方程的点斜式，利用圆心到直线的距离等于远的半径求 k，可得圆的切线方程.

【小问 1 详解】

圆 C 方程可整理为：$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，则圆心 $C(1,-2)$，半径 $r=3$，

由圆 C_1 方程可知：圆心 $C_1(3,1)$，半径 $r_1=2$，

因为 $|CC_1|=\sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13}$，$r+r_1=5$，$r-r_1=1$，

所以 $r-r_1<|CC_1|<r+r_1$，

所以圆 C 和圆 C_1 相交.

【小问 2 详解】

当过 $P(3,1)$ 的直线斜率不存在，

即直线为 $x=3$ 时，其与圆 C 不相切，

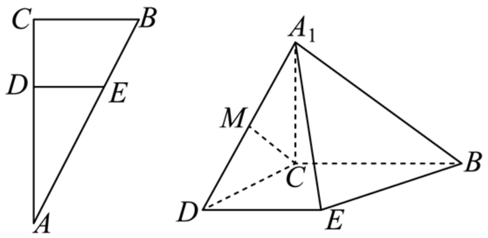
所以可设所求切线方程为：$y-1=k(x-3)$，即 $kx-y-3k+1=0$，

所以圆心 C 到切线的距离 $d=\dfrac{|3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，即 $9k^2+9=(3-2k)^2$，解得：$k=0$ 或 $k=-\dfrac{12}{5}$，

所以切线方程为：$y=1$ 或 $y-1=-\dfrac{12}{5}(x-3)$，即 $y=1$ 或 $12x+5y-41=0$.

18. 在 $\mathrm{Rt}\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$AC=6$，D,E 分别是 AC,AB 上的点，满足 $DE\,//\,BC$ 且 DE 经过 $\vee ABC$ 的重心，将 $\vee ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使

$A_1C \perp CD$，M 是 A_1D 的中点，如图所示.



（1）求证：$A_1C \perp$ 平面 $BCDE$；

（2）在线段 A_1C 上是否存在点 N，使平面 CBM 与平面 BMN 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,若存在，求出 CN 的长度；若不存在，请说明理由.

【正确答案】（1）证明见解析

（2）存在，CN 的长度为$\sqrt{3}$或 $2\sqrt{3}$

【分析】（1）通过证明 $DE \perp A_1C$，$A_1C \perp CD$ 来证得 $A_1C \perp$ 平面 $BCDE$；

（2）建立空间直角坐标系，利用向量法来求得正确答案.

【小问 1 详解】

因为在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$DE // BC$，且 $BC \perp CD$，

所以 $DE \perp CD$，$DE \perp AD$，则折叠后，$DE \perp A_1D$，

又 $A_1D \cap CD = D, A_1D, CD \subset$ 平面 A_1CD，所以 $DE \perp$ 平面 A_1CD，$A_1C \subset$ 平面 A_1CD，

所以 $DE \perp A_1C$，又已知 $A_1C \perp CD$，$CD \cap DE = D$ 且 CD, DE 都在面 $BCDE$ 内，

所以 $A_1C \perp$ 平面 $BCDE$.

【小问 2 详解】

由（1）知，以CD为 x 轴，CB为 y 轴，CA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系 $C-xyz$，