趋势外推法

一、趋势外推法概念：

如果通过对时间序列的分析和计算，能找到一条比较合适的函数曲线来近似反映社会经济变量yt的变化和趋势, 那么当有理由相信这种规律和趋势能够延伸到未来时, 便可用此模型对该社会经济现象的未来进行预测, 这就是趋势外推法。

趋势外推法的两个假定：

（1）社会经济现象的发展过程是渐进的,没有跳跃式突变；

（2）社会经济现象未来与过去的发展变化规律基本一致。

二、趋势模型的种类

多项式曲线外推模型：

一次（线性）预测模型： $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t$

二次（二次抛物线）预测模型： $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

三次（三次抛物线）预测模型： $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$

一般形式：

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k$$

指数曲线预测模型：

一般形式：

$$\hat{y}_t = ae^{bt}$$

修正的指数曲线预测模型：

$$\hat{y}_t = a + bc^t$$

对数曲线预测模型：

$$\hat{y}_t = a + b\ln t$$

生长曲线趋势外推法：

皮尔曲线预测模型：

$$y_t = \frac{L}{1 + a e^{-bt}}$$

龚珀兹曲线预测模型：

$$\hat{y}_t = k a^{b^t}$$

三、趋势模型的选择方法

经验法:

数学和经济分析结合,选定模型

图形识别法：

这种方法是通过绘制散点图来进行的，即将时间序列的数据绘制成以时间t为横轴，时序观察值为纵轴的图形，观察并将其变化曲线与各类函数曲线模型的图形进行比较，以便选择较为合适的模型。

有时所绘图形与几种数学模型的曲线相近,可试算,计算回溯拟合值,选择均方差最小的模型。

差分法:

利用差分法把数据修匀，使非平稳序列达到平稳序列。

差分法可分为普通差分法和广义差分法两类。

一阶、二阶、k阶差分

广义差分法就是先计算时间序列的广义差分(时间序列的倒数或对数的差分,以及相邻项的比率或差分的比率等),然后,根据算得的时间序列差分的特点,选择适宜的数学模型。

差分法识别标准：

差分特性	使用模型
一阶差分相等或大致相等	一次线性模型
二阶差分相等或大致相等	二次线性模型
三阶差分相等或大致相等	三次线性模型
环比相等或大致相等	指数曲线模型
一阶差分比率相等或大致相等	修正指数曲线模型

多项式趋势预测模型及应用

特别:直线(一元时间回归)模型参数估计的简捷算法

$$\hat{y}_t = a + bt$$

套用参数估计公式, 注意到, y_t一般都是等间隔的时期或时点指标值, 它与时间t并无严格的因果关系。时间t的取值只起到一种标明事物发展先后次序的作用, 只要保持t的等间隔性及其先后次序, 我们可以给t赋以任何数值。通常让t的T个取值以原点为对称, 从而有

$$\sum t = 0$$

化简公式为

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sum t y_t}{\sum t^2} \\ \hat{a} = \dfrac{1}{T} \sum y_t \end{cases}$$

大家应该也有点累了，稍作休息

大家有疑问的，可以询问和交

例1:某市最近几年工业总产值资料如下表所列,试预测1999年该市的工业总产值。

年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
t值	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
工业总产值y_t	5.0	5.6	6.1	6.8	7.4	8.2	8.8	9.6	10.4
一阶差分	_	0.6	0.5	0.7	0.6	0.8	0.6	0.8	0.8

解:若画出散点图,看出,时间序列呈明显的线性趋势。计算一阶差分,基本上接近一个常数,其波动范围在0.5～0.8之间。因此,可配一元线性时间回归模型进行预测。

利用如上公式,易得 $\hat{b}=0.67, \hat{a}=7.54$

回归模型为

$$\hat{y}_t = 7.54 + 0.67t$$

1999年对应的t=5

预测该年的工业总产值

$$\hat{y}_{1999} = 7.54 + 0.67 \times 5 = 10.89$$

指数曲线趋势外推法

一、常见的指数曲线模型

指数曲线预测模型：

$$\hat{y}_t = Ae^{bt}$$

修正指数曲线预测模型:

$$\hat{y}_t = K + AB^t$$

二、模型的选择

广义差分法

对于指数曲线,一阶差比率(也称环比)为常数

对修正的指数曲线,一阶差分比率

$$\frac{\nabla y_t}{\nabla y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1} - y_{t-2}} = B$$

当时间序列算得的一阶差分比率大致相等时,就可以配修正指数曲线模型进行预测。

指数曲线模型的参数估计及应用

对指数曲线模型 $\hat{y}_t = Ae^{bt}$ 取对数,作变换,转化为直线模型。

$$\ln y_t = \ln A + bt$$

$$Y_t = \ln y_t, a = \ln A$$

$$Y_t = a + bt$$

为计算方便,仍然约定 $\sum t = 0$

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sum tY_t}{\sum t^2} = \dfrac{\sum t \ln y_t}{\sum t^2} \\ \hat{a} = \dfrac{1}{T}\sum Y_t = \dfrac{1}{T}\sum \ln y_t \end{cases}$$

于是

$$\hat{A} = e^{\hat{a}} \qquad \hat{y}_t = \hat{A}e^{\hat{b}t}$$

例2:某自行车厂最近几年产量数据如下表所列,试预测该厂1999年的产量。

年份	1993	1994	1995	1996	1997	1998
t值	-5	-3	-1	1	3	5
产量y_t (万辆)	8.7	10.6	13.3	16.5	20.6	26.0
环比	_	1.2	1.3	1.2	1.2	1.3

指数曲线预测模型: $\hat{y}_t = 14.8768e^{0.1098t}$

预测1999年的产量 $\hat{y}_{1999} = 14.8768e^{0.1098\times 7} = 32.1$

曲线的拟合优度分析

实际的预测对象往往无法通过图形直观确认某种模型，而是与几种模型接近。这时，一般先初选几个模型，待对模型的拟合优度分析后再确定究竟用哪一种模型。

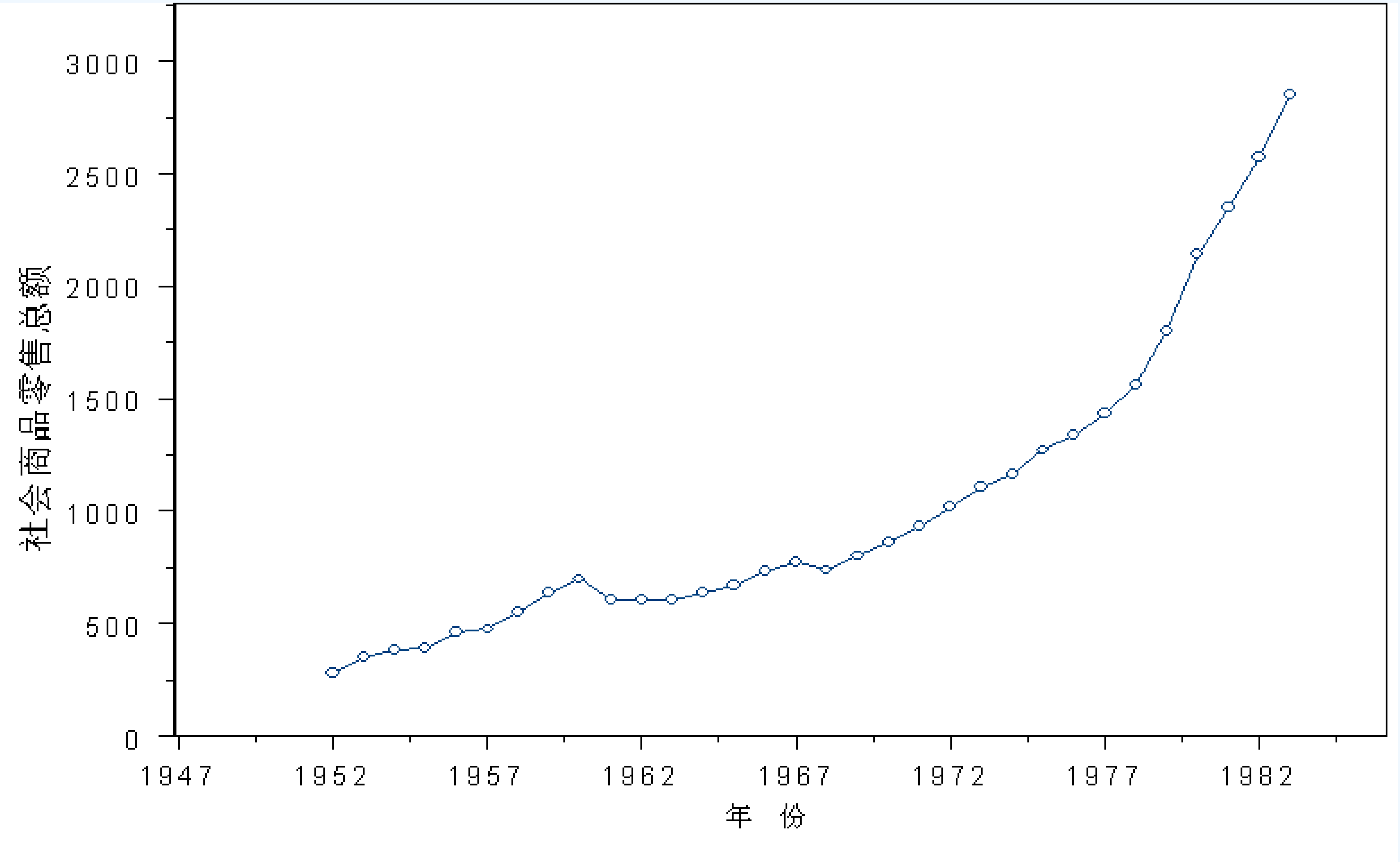
评判拟合优度的好坏一般使用标准误差来作 为优度好坏的指标：

$$SE=\sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{n}}$$

例3:下表是我国1952年到1983年社会商品零售总额(按当年价格计算），分析预测我国社会商品零售总额 。

年份	时序（t）	总额（y_t）	年份	时序（t）	总额（y_t）	年份	时序（t）	总额（y_t）
1952	1	276.8	1963	12	604.5	1974	23	1163.6
1953	2	348.0	1964	13	638.2	1975	24	1271.1
1954	3	381.1	1965	14	670.3	1976	25	1339.4
1955	4	392.2	1966	15	732.8	1977	26	1432.8
1956	5	461.0	1967	16	770.5	1978	27	1558.6
1957	6	474.2	1968	17	737.3	1979	28	1800.0
1958	7	548.0	1969	18	801.5	1980	29	2140.0
1959	8	638.0	1970	19	858.0	1981	30	2350.0
1960	9	696.9	1971	20	929.2	1982	31	2570.0
1961	10	607.7	1972	21	1023.3	1983	32	2849.4
1962	11	604.0	1973	22	1106.7			

（1）对数据画折线图分析，以社会商品零售总额为y轴，年份为x轴。



（2）从图形可以看出大致的曲线增长模式，较符合的模型有二次曲线和指数曲线模型。但无法确定哪一个模型能更好地拟合该曲线，则我们将分别对该两种模型进行参数拟合。

适用的二次曲线模型为：

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

适用的指数曲线模型为：

$$\hat{y}_t = a e^{bt}$$

（3）进行二次曲线拟合。首先产生序列 t^2，得到估计模型为：$\hat{y}_t = 577.24 - 44.33t + 3.29t^2$

其中调整的 $R^2 = 0.9524$， $F = 290 > F_{0.05}(2,29)$，则方程通过显著性检验，拟合效果很好。标准误差为151.7。

(4) 进行指数曲线模型拟合。对模型 $\hat{y}_t = ae^{bt}$

两边取对数：$\ln \hat{y}_t = \ln a + bt$

产生序列 $\ln y_t$ ，之后进行普通最小二乘估计该模型,最终得到估计模型为：

$$\hat{y}_t = 303.69 \times e^{0.0627t}$$