面向“四新”人才培养普通高等教育系列教材

数值分析方法

第一章　计算技术基础

目录/Contents

1.1 泰勒公式

将一些复杂的函数逼近近似地表示为简单的多项式函数。

对于一元函数$f(x)$，如果$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数，则对任一$x\in(a,b)$存在介于x_0和x之间的一个ξ使得下式成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$x_0=0$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+O(x^{n+1}).$$

马克劳林公式

常用函数的马克劳林公式

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad(0<\theta<1).$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^{m}\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},\qquad(0<\theta<1).$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},\qquad(0<\theta<1).$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\qquad(0<\theta<1).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n}+\frac{(-1)^{n}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},\qquad(0<\theta<1).$$

二元函数泰勒公式

对于二元函数$f(x,y)$，如果$f(x,y)$在含有(x_0,y_0)的某个领域内具有直到$n+1$阶的连续（混合）偏导数，则则对于该邻域内任一点$(x,y)=(x_0+h,y_0+k)$存在$0<\theta<1$成立下列n阶泰勒公式

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)\\
&=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k).
\end{aligned}
$$

其中

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)=hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0),$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)=h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0),$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{p=0}^{m}C_m^p h^p k^{m-p}\frac{\partial^m f}{\partial x^p\partial y^{m-p}}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

多元函数泰勒公式

对于多元函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，对于点$x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$临近的任一点$x^0 + h = (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, ..., x_n^0 + h_n)$存在$0 < \theta < 1$成立下列$n$阶泰勒公式

$$
\begin{aligned}
& f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \cdots, x_n^0 + h_n) \\
& = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) + \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \\
& \quad + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \\
& \quad + \frac{1}{(m+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{m+1} f(x_1^0 + \theta h_1, x_2^0 + \theta h_2, \cdots, x_n^0 + \theta h_n).
\end{aligned}
$$

多元函数的二阶泰勒公式在应用问题中经常用到，通常也将其写成如下形式

$$f(x^0+h)=f(x^0)+\frac{\partial}{\partial x}f(x^0)h+\frac{1}{2!}h^T\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x^0)h+O(h^3)$$

其中

函数f的梯度向量，∇f

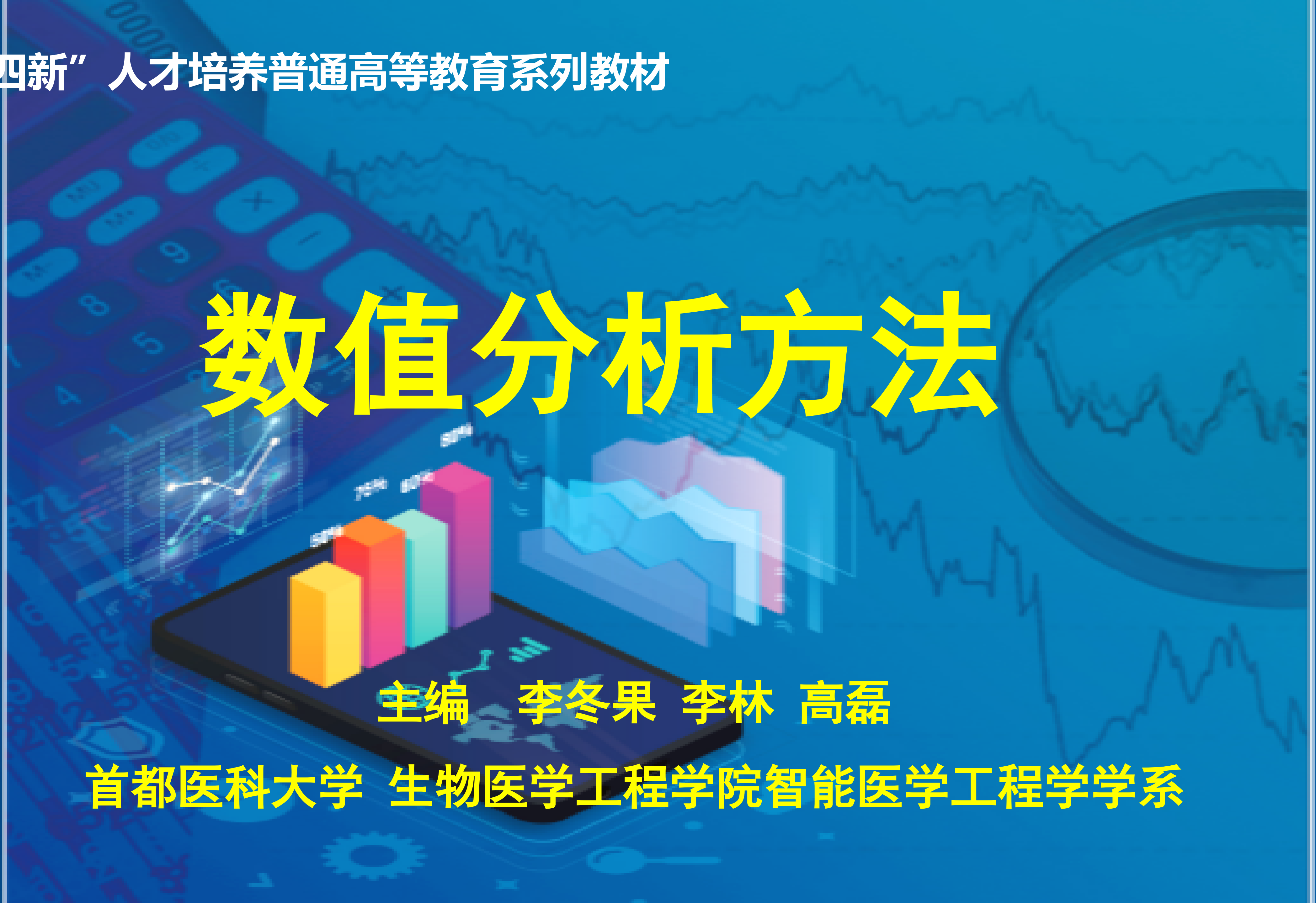
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)^T=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$

Hessian矩阵$H(f)$

设多元函数f在点$x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$邻域内有二阶连续偏导数，且$\nabla f|_{x^0}=0$，如果$H(f)|_{x^0}$是正（负）定矩阵，则$f$在点$x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$取得极小（大）值。

谢谢！



面向“四新”人才培养普通高等教育系列教材

数值分析方法

主编　李冬果 李林 高磊

首都医科大学 生物医学工程学院智能医学工程学学系

第一章　计算技术基础

目录/Contents

1.2 数值计算误差

1.2.1 误差来源与分类

用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型，它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的，因而时近似的。我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为**模型误差**

实际问题中通常涉及到一些量的观测值，这类由观测产生的误差称为**观测误差**

本课程只研究用数值方法求解数学模型差生的误差

当数学模型不能得到精确解时，通常用数值方法求其近似解，这一近似解与精确解之间的误差称为**截断误差**

例如用如下泰勒多项式

$$S_m(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

近似代替正弦函数，则数值截断误差是

$$|R_m(x)|=|\sin x-S_m(x)|=\frac{|\cos\theta x|}{(2m+1)!}|x|^{2m+1}\le\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!},\qquad(0<\theta<1).$$

选定了求解数学问题的近似计算公式后，用计算机做数值计算时，由于计算机的字长限制，原始数据在计算机上表示时会产生误差，计算过程又可能产生新的误差，这种误差称为**舍入误差**

例如用3.14159近似代替圆周率π，产生的误差

$$R=\pi-3.14159=0.0000026\ \ldots$$

就是舍入误差。

由原始数据或机器中的十进制数转化为二进制数产生的初始误差对数值计算也将造成影响，分析初始数据的误差通常也归入舍入误差

1.2.1 误差与有效数字

如果x为准确值，x^*是x的一个近似值，那么称$e^* = x^* - x$为近似值x的**绝对误差**，简称为**误差**。

实际无法算出准确的x和e^*，仅能根据计算情况或测量工具估计出误差的绝对值不超过某个正数ε^*，是$|e^*|$的一个上界，ε^*称为近似值的x^***误差限**，可以表示为

不等式$|x - x^*| \le \varepsilon^*$，或$-\varepsilon^* \le x - x^* \le \varepsilon^*$，通常也表示成$x = x^* \pm \varepsilon^*$

例：取m=2利用泰勒多项式计算$sin\,1$，则其误差为 $R_2 \le \frac{1}{5!} < 0.0084$

误差限的大小其实还不能完全表示近似值的好与坏

通常把近似值的误差e^*与准确值x的比值$e^*/x=(x^*-x)/x$称为近似值x^***相对误差**，

记为e_r^*, 由于在实际计算中，真值x总是不知道，常取

$$e_r^*=\frac{e^*}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*}$$

作为x^*的相对误差。如果$e_r^*=e^*/x$较小

$$\frac{e^*}{x}-\frac{e^*}{x^*}=\frac{e^*(x^*-x)}{x^*x}=\frac{(e^*)^2}{x^*(x^*-e^*)}=\frac{(e^*/x^*)^2}{1-(e^*/x^*)}$$

是e^*的平方项级，那么这种替换造成的误差可以忽略不计

相对误差也可正可负，它的绝对值上界叫做**相对误差限**

有两个量$x=10\pm0.2$，$y=100\pm1$

则$x^*=10$，$\varepsilon_x^*=0.2$，$y^*=1000$，$\varepsilon_y^*=2$.

显然ε_y^*是x^*的5倍，但

$\varepsilon_x^*/x^*=0.2/10=2\%$

$\varepsilon_y^*/y^*=2/1000=0.2\%$

x^*的相对误差限远大于y^*的相对误差限

y^*近似y的程度比x^*近似x的程度好

有效数字

当准确值x有多位数是，常常按四舍五入的原则得到的x前几位近似值x^*

$$x=\pi=3.14159265\cdots,$$

取3位，$x_3^*=\pi=3.14, \varepsilon_3^*\le 0.002$；取5位$x_3^*=\pi=3.1416, \varepsilon_5^*\le 0.000008$,

它们的误差都不超过该数字的半个单位，即

$$|\pi-3.14|\le\frac{1}{2}\times 10^{-2}, \quad |\pi-3.1416|\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}.$$

一般地，若近似值x^*的误差是某一位的半个单位，该位到x^*的第一位非零数字共有n位，就称x^*有n位**有效数字**。它可以表示为

$$x^*=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+\cdots+a_n\times 10^{-(n-1)}),$$

其中$a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$是0到9中的一个数字，$a_1\ne 0$, m为整数，且$|x-x^*|\le\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}$.

如果以m/s^2 为单位，重力常数g约为9.80 m/s^2，若以km/s^2为单位，重力常数g约为0.00980 km/s^2，它们都具有3位有效数字，因为

$$|g-9.80|\le\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^{0-3+1},\quad |g-0.00980|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}=\frac{1}{2}\times10^{-3-3+1}$$

前一式子$m=0$，后一式子$m=-3$

绝对误差限 $\varepsilon_1^*=\frac{1}{2}\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2},\varepsilon_2^*=\frac{1}{2}\times10^{-5}\ \mathrm{m/s^2}$

相对误差 $\varepsilon_r^*=0.005/9.80=0.000005/0.00980.$

相对误差是无量纲的，而绝对误差是有量纲的

结论： 设近似数x^*表示为$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)})$，其中$a_i (i = 1,2,\cdots,n)$是0到9中的一个数字，$a_1 \neq 0$，$m$为整数，若$x^*$具有$n$位有效数字，则其相对误差限$\varepsilon_r^* \le \dfrac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$

反之，若x^*的相对误差限$\varepsilon_r^* \le \dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$，则$x^*$至少具有$n$位有效数字

证明 由近似数的表达式可得 $a_1 \times 10^m \le |x^*| < (a_1+1) \times 10^m$，

当x^*具有n位有效数字时，

$$\varepsilon_r^* = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} \le \frac{0.5 \times 10^{m-n+1}}{a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1 \times 10^m} \times 10^{-n+1}$$

反之，有

$$|x - x^*| = |x^*| \varepsilon_r^* < (a_1+1) \times 10^m \times \frac{10^{-n+1}}{2(a_1+1)} = 0.5 \times 10^{m-n+1}$$

故x^*至少具有n位有效数字

这一结论说明，有效数字越多，相对误差越小

例 要使$\sqrt{20}$的近似值的相对误差限小于0.1%，要取几位有效数字？

解 设取n位有效数字，由$\varepsilon_r^* \le \dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$，由于$\sqrt{20}=4.4\cdots$，知$a_1=4$，故只要取$n=4$就有

$$\varepsilon_r^* \le 0.125 \times 10^{-3} < 10^{-3} = 0.1\%,$$

即只要$\sqrt{20}$的近似值取4位有效数字，其相对误差限就小于0.1%. 此时，$\sqrt{20} \approx 4.472$

1.2.3 数值运算的误差估计

设两个近似数x_1^*和x_2^*的误差限分别为$\varepsilon(x_1^*)$及$\varepsilon(x_2^*)$，则他们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别满足不等式

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \le \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*);$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \le |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*);$$

$$\varepsilon(x_1^* / x_2^*) \le \frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}, \quad x_2^* \ne 0.$$

更一般的情况是，当自变量有误差时计算其函数值也将差生误差，其误差限可以利用函数的泰勒公式进行估计。

设x^*的近似值是x，计算函数$f(x)$时以$f(x^*)$近似$f(x)$，其误差界记作$\varepsilon(f(x^*))$，由泰勒公式

$$f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2,\ \xi\text{介于}x,x^*\text{之间},$$

取绝对值得

$$|f(x)-f(x^*)|\le|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)+\frac{|f''(\xi)|}{2}(\varepsilon(x^*))^2.$$

假设$f''(x^*)$与$f'(x^*)$的比值不太大，可忽略$\varepsilon(x^*)$的高阶项

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

当f是多元函数时，例如计算$Q = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果$x_1, x_2, \cdots, x_n$的近似值是$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$，则$Q$的近似值$Q^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$，于是由泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\varepsilon(Q^*) = Q^* - Q &= f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_j}(x_j^* - x_j)\end{aligned}$$

于是误差限为

$$\varepsilon(Q^*) \approx \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_j} \right| \varepsilon(x_j^*);$$

而Q^*的相对误差为

$$\varepsilon_r(Q^*) = \frac{\varepsilon(Q^*)}{|Q^*|} \approx \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots x_n^*)}{\partial x_j} \right| \frac{\varepsilon(x_j^*)}{|Q^*|}.$$

例 利用单摆摆动测定重力加速度g的公式为$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$已测单摆摆长l与摆动周期T分别是$l=100\pm0.05\,\mathrm{cm}$, $T=2\pm0.005\,\mathrm{s}$ 问由于测定的l与T误差而引起g的绝对误差与相对误差.

解 记测量l与T时所产生的误差为Δl与ΔT，，由上述公式计算g时的误差为Δg，因

而有 $\Delta g\approx\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l+\frac{\partial g}{\partial T}\Delta T$ 从而 $|\Delta g|\le\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right||\Delta l|+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right||\Delta T|=4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}|\Delta l|+\frac{2l}{T^3}|\Delta T|\right)$

把$l=100, T=2$,以及$|\Delta l|=0.05, |\Delta T|=0.01$代入上式，得g的绝对误差约为

$$|\Delta g|=4\pi^2\left(\frac{0.1}{2^2}+\frac{200}{2^3}0.005\right)=0.6\pi^2\approx5.92(\mathrm{cm/s}^2)$$

从而g的相对误差为$\frac{|\Delta g|}{g}=\frac{0.6\pi^2}{\frac{4\pi^2\times100}{2^2}}=0.6\%.$

谢谢！

面向“四新”人才培养普通高等教育系列教材

数值分析方法

主编　李冬果 李林 高磊

首都医科大学 生物医学工程学院智能医学工程学学系

第一章　计算技术基础

目录/Contents

1.3 误差分析与规避

1.3.1 算法的数值稳定性

用一个算法进行计算，由于初始数据误差在计算中传播使计算结果误差增长很快就是数值不稳定的，先看下例。

例：计算$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x (n = 0,1,\cdots)$ 并估计误差.

解： 由分部积分可得 $\begin{cases} I_n = 1 - nI_{n-1},\ n = 1,2,\cdots, \\ I_0 = e^{-1}\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = 1 - e^{-1}. \end{cases}$

（1.3.1）$e^{-1} \approx 1 + (-1) + \dfrac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{k!}$,

取$k = 7$，并用四位小数计算则得$e^{-1} \approx 0.3679$，截断误差$r_7 = |e^{-1} - 0.3679| \le \dfrac{1}{8!} < \dfrac{1}{4} \times 10^{-4}$.

当初值取为 $I_0 \approx 0.6321 = \bar{I}_0$ 时，用(1.3.1)式递推的计算公式

$$(A)\qquad \begin{cases} \bar{I}_0 = 0.6321 \\ \bar{I}_n = 1 - n\bar{I}_{n-1} \qquad (n = 1,2,\cdots) \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

方法一分析：

计算结果表明，各步计算的误差 $\varepsilon_0 = I_0 - \tilde{I}_0$ 满足关系 $\varepsilon_n = -n\varepsilon_{n-1}$, $\quad n = 1,2,\cdots$.$(n = 1,2,\cdots)$,

易得 $\varepsilon_n = (-1)^n n!\varepsilon_0$,,这说明 $\bar{I}_0$ 有误差 ε_0, $\bar{I}_n$ 就是 ε_0 的 $n!$ 倍误差。它表明计算公式（A）是数值不稳定的

由积分估值值 $\dfrac{e^{-1}}{n+1} = e^{-1}(\min\limits_{0\le x\le 1} e^x)\int_0^1 x^n dx < I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx < e^{-1}(\max\limits_{0\le x\le 1} e^x)\int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}.$

当 $n = 9$ 得到 $\dfrac{e^{-1}}{10} < I_9 < \dfrac{1}{10}$，初值取为 $I_9 \approx \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{-1}}{10} + \dfrac{1}{10}\right) = \hat{I}_9$ 时

$$(B)\qquad \begin{cases} \bar{I}_9 = 0.0684 \\ \bar{I}_{n-1} = \dfrac{1}{n}(1 - n\bar{I}_n), \quad (n = 9,8,\cdots) \end{cases}$$

方法二分析：

计算结果表明，各步计算的误差 $\varepsilon_n = I_n - \bar{I}_n$,$|\varepsilon_0| = \dfrac{1}{n!}|\varepsilon_n|$，这表明 ε_0 比 ε_n 缩小了 $n!$ 倍，该方法数值稳定

计算结果：

n	法一 (A)	法二 (B)
0	0.6321	0.6321
1	0.3679	0.3679
2	0.2642	0.2643
3	0.2074	0.2073
4	0.1704	0.1708
5	0.1480	0.1455
6	0.1120	0.1268
7	0.2160	0.1121
8	-0.7280	0.1035
9	7.552	0.0684

1.3.2 误差规避

数值计算中通常不采用数值不稳定算法，即能控制误差的传播。在设计算法时应尽量避免误差带来的影响，防止有效数字丢失。可采用的方法有：

- 两数相加时防止较小的数加不到较大的数上，即避免大数吃小数
- 两个相近数相减，以免有效数字的大量丢失
- 避免分母很小（或乘法因子很大），以免产生溢出

如果x_1与x_2接近，可利用$\ln x_1-\ln x_2=\ln\frac{x_1}{x_2}$；

如果x很大，$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$；

当$f(x)\approx f(x^*)$，可用泰勒展开式$f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2}f''(x^*)(x-x^*)^2+\cdots$

例1.3.1 求$x^2-16x+1=0$的小正根

解 $x_1=8+\sqrt{63}, x_2=8-\sqrt{63}\approx 8-7.94=0.06=x_2^*$，这里 x_2^*只有一位有效数字，

若改用 $x_2=8-\sqrt{63}=\dfrac{1}{8+\sqrt{63}}\approx\dfrac{1}{8+7.94}\approx 0.0627$，

具有三位有效数字。

例1.3.2 计算 $A=10^7(1-\cos 2^\circ)$，（利用 $\cos 2^\circ\approx 0.9994$）

解 直接计算得

$$A=10^7(1-\cos 2^\circ)\approx 10^7(1-0.9994)=6\times 10^3.$$

只有一位有效数字，若 利用$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$，则

$$A=10^7(1-\cos 2^\circ)=2\times(\sin 1^\circ)^2\times 10^7=6.13\times 10^3,$$

具有三位有效数字。

例1.3.3 利用公式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

计算$\ln 2$的近似值（精确到10^{-5}）。

解　若取$x=1$利用前N项和直接计算，需要$N=100000$项，不但计算量大而且舍入误差积累严重。

但若改用$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)$

取$x=\frac{1}{3}$，只要计算前10项之和，其截断误差便小于10^{-5}。

谢谢！

面向“四新”人才培养普通高等教育系列教材

数值分析方法

主编　李冬果　李林　高磊

首都医科大学　生物医学工程学院智能医学工程学学系

第一章　计算技术基础

目录/Contents