学习资料整理汇编

（考点或配套习题突击训练）

2023 届新高考数学函数压轴小题专题突破专题 5 函数嵌套

1．已知函数 $f(x)=(x^2-x-1)e^x$，设关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)=\frac{5}{e}(m\in R)$ 有 n 个不同的实数解，则 n 的所有可能的值为(　　)

A．3　　B．1 或 3　　C．4 或 6　　D．3 或 4 或 6

2．已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{e^x}(x\in R)$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)+m-1=0$ 恰好有 4 个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围为(　　)

A．$(1,\frac{\sqrt{2e}}{2e}+1)$　　B．$(0,\frac{\sqrt{2e}}{2e})$　　C．$(1,\frac{1}{e}+1)$　　D．$(\frac{\sqrt{2e}}{2e},1)$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{|x-1|},x>0\\-x^2-2x+1,x\leqslant 0\end{cases}$，若方程 $f^2(x)+bf(x)+2=0$ 有 8 个相异实根，则实数 b 的取值范围(　　)

A．$(-4,-2)$　　B．$(-4,-2\sqrt{2})$　　C．$(-3,-2)$　　D．$(-3,-2\sqrt{2})$

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x>0\\-ln(x+1),x<0\end{cases}$，关于 x 的方程 $f^2(x)-2af(x)+a-1=0(a\in R)$ 有四个相异的实数根，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,0)$　　B．$[1,+\infty)$

C．$(-\infty,0)\bigcup[2,+\infty)$　　D．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x-x^3,x\leqslant 0\\\frac{x}{e^x}+\frac{lnx+1}{x},x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)-1=0$ 恰好有 6 个不相等的实根，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$(-2,\frac{1}{e}+1)$　　B．$(-2,0)\cup(0,\frac{1}{e}+1)$

C．$(-\frac{3}{2},\frac{2e+1}{e^2+e})$　　D．$(-\frac{3}{2},0)\cup(0,\frac{2e+1}{e^2+e})$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}-1,x\geqslant 0\\x^2+2x+1,x<0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-(m+1)f(x)+2m^2=0$ 有五个不同实根，则 m 的值是(　　)

A．0 或 $\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．0　　D．不存在

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2, x\leqslant 0\\ |x-2|, x>0\end{cases}$，方程 $f^2(x)-af(x)=0$（其中 $a\in(0,2)$）的实根个数为 p，所有这些实根的和为 q，则 p、q 的值分别为(　　)

A．6，4　　B．4，6　　C．4，0　　D．6，0

8．已知函数 $g(x)=a(x+1)ln(x+1)$ 的图象在点 $(e^2-1$，$g(e^2-1))$ 处的切线与直线 $x+6y+1=0$ 垂直 $(e=2.71828\ldots$ 是自然对数的底数)，函数 $f(x)$ 满足 $xf(x)+g(x-1)-x^3=0$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-bf(x)+c=0(b$，$c\in R$，且 $c<0)$ 在区间 $[\frac{1}{e},e]$ 上恰有 3 个不同的实数解，则实数 b 的取值范围是(　　)

A．$(1,\frac{1}{e^2}+2]$　　B．$[\frac{1}{e^2}+2,e^2-2]$

C．$[e^2-2,\frac{1}{e^2}+e^2]$　　D．$(2,\frac{1}{e^2}+e^2]$

9．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$，若关于 x 的方程 $f^2(x)+m|f(x)|+2m+3=0$ 有三个不同的实数解，则 m 的取值范围是(　　)

A．$(-\frac{3}{2}$，$0)$　　B．$(-\frac{3}{2}$，$-\frac{4}{3})$　　C．$(-\frac{3}{2}$，$-\frac{4}{3}]$　　D．$(-\frac{4}{3}$，$0)$

10．已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+mf(x)+m-1=0$ 恰有 3 个不同的实数解，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$(0,2)$　　B．$(1-\frac{1}{e},2)$　　C．$\{1-\frac{4}{e^2},1\}$　　D．$(1-\frac{4}{e^2},1)$

11．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}-1$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+mf(x)+m-1=0$ 恰有 3 个不同的实数解，则实数 m 的取值集合是(　　)

A．$(-\infty$，$2)\cup(2$，$+\infty)$　　B．$(2-\frac{1}{e},+\infty)$

C．$(2-\frac{1}{e},2)$　　D．$\left\{2-\frac{1}{e}\right\}$

12．已知函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{e^{|x|}}+1$，$g(x)=\begin{cases}f(x), x\leqslant 0\\ x^2-2x+a, x>0\end{cases}$，且 g（1）$=0$，则关于 x 的方程 $g(g(x)-t)-1=0$ 实根个数的判断正确的是(　　)

A．当 $t<-2$ 时，方程 $g(g(x)-t)-1=0$ 没有相异实根

B．当 $-1+\frac{1}{e}<t<0$ 或 $t=-2$ 时，方程 $g(g(x)-t)-1=0$ 有 1 个相异实根

C．当$1<t<1+\frac{1}{e}$时，方程$g(g(x)-t)-1=0$有2个相异实根

D．当$-1<t<-1+\frac{1}{e}$或$0<t\leqslant 1$或$t=1+\frac{1}{e}$时，方程$g(g(x)-t)-1=0$有4个相异实根

13．已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x,x\geqslant 1\\1-\frac{x}{2},x<1\end{cases}$，则函数$g(x)=f(f(x)+1)$的零点是____，若$h(x)=f(f(x)+1)+m$有两个零点$x_1$，$x_2$，则$x_1+x_2$的最小值是____.

14．已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x,x\geqslant 1\\1-\frac{x}{2},x<1\end{cases}$，若$F(x)=f(f(x)+1)+m$有两个零点$x_1$，$x_2$，则$x_1x_2$的取值范围____.

15．已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{ex}{e^x},x\leqslant 2\\\frac{4x-8}{5x},x>2\end{cases}$（其中$e$为自然对数的底数），若关于$x$的方程$f^2(x)-3a|f(x)|+2a^2=0$恰有5个相异的实根，则实数$a$的取值范围为____.

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}3x^2+\frac{a}{x}+1,x<0\\2\ln x-6x,x>0\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)+f(-x)=0$恰有四个不同的解，则实数$a$的取值范围是____.

17．已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0\\x^2-2x+1,x>0\end{cases}$，若关于$x$的方程$f^2(x)-af(x)=0$恰有5个不同的实数解，则$a$的取值范围是_____.

18．已知函数$f(x)=x|x-1|-3x+3$.

（1）求函数$f(x)$的零点；

（2）若关于x的方程$f^2(x)-mf(x)+n=0(m$、$n\in R)$恰有5个不同的实数解，求实数m的取值范围.

19．已知函数$f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{6})-2\cos^2\frac{\pi}{8}x+1,x\in R$.

（1）求函数$f(x)$的最小正周期及单调递增区间；

（2）若关于x的方程$4f^2(x)-mf(x)+1=0$在$x\in\left(\frac{4}{3},4\right)$内有实数解，求实数$m$的取值范围.

20．已知函数$g(x)$对一切实数x，$y\in R$都有$g(x+y)-g(y)=x(x+2y-2)$成立，且g（1）$=0$，

$h(x)=g(x+1)+bx+c(b$，$c\in R)$，$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

（Ⅰ）求 $g(0)$ 的值和 $g(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）记函数 $h(x)$ 在 $[-1$，1 上的最大值为 M，最小值为 m．若 $M-m\leqslant 4$，当 $b>0$ 时，求 b 的最大值；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(|2^x-1|)+\dfrac{2k}{|2^x-1|}-3k=0$ 有三个不同的实数解，求实数 k 的取值范围.

专题 5 函数嵌套

1．已知函数 $f(x)=(x^2-x-1)e^x$，设关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)=\dfrac{5}{e}(m\in R)$ 有 n 个不同的实数解，则 n 的所有可能的值为(　　)

A．3　　B．1 或 3　　C．4 或 6　　D．3 或 4 或 6

【解析】解：$f'(x)=e^x(2x-1)+)+(x^2-x-1)e^x=e^x(x^2+x-2)$，

$\therefore$ 当 $x<-2$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $-2<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=\dfrac{5}{e^2}$，$f(x)$ 的极小值为 f（1）$=-e$．

作出 $f(x)$ 的函数图象如图所示：

$\because f^2(x)-mf(x)=\dfrac{5}{e}(m\in R)$，$\therefore f^2(x)-mf(x)-\dfrac{5}{e}=0$，

$\Delta=m^2+\dfrac{20}{e}>0$，

令 $f(x)=t$ 则，则 $t_1t_2=-\dfrac{5}{e}$．不妨设 $t_1<0<t_2$，

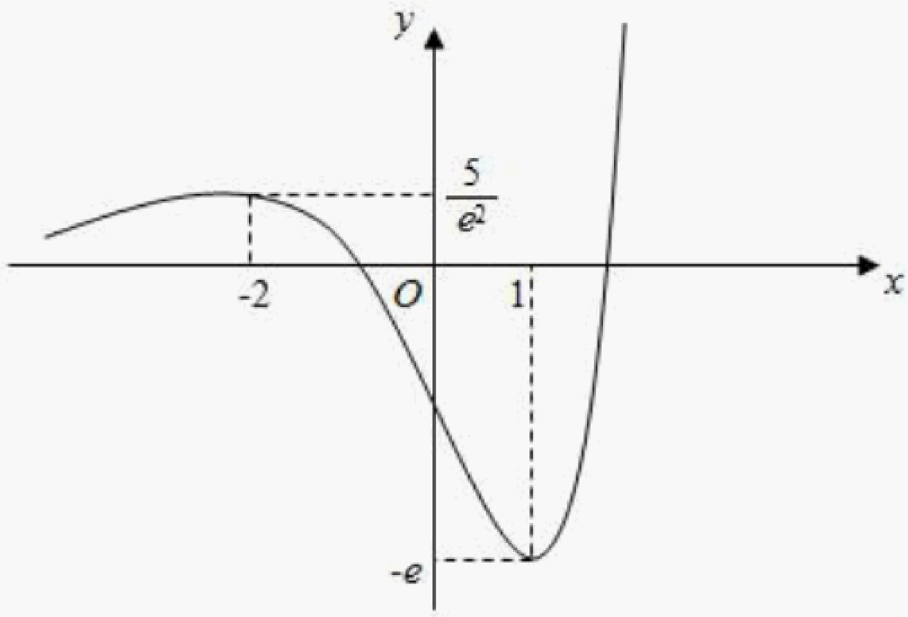
（1）若 $t_1<-e$，则 $0<t_2<\dfrac{5}{e^2}$，此时 $f(x)=t_1$ 无解，$f(x)=t_2$ 有三解；

（2）若 $t_1=-e$，则 $t_2=\dfrac{5}{e^2}$，此时 $f(x)=t_1$ 有一解，$f(x)=t_2$ 有两解；

（3）若 $-e<t_1<0$，则 $t_2>\dfrac{5}{e^2}$，此时 $f(x)=t_1$ 有两解，$f(x)=t_2$ 有一解；

综上，$f^2(x)-mf(x)=\dfrac{5}{e}$ 有三个不同的实数解.

故选：A．



2．已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{e^x}(x\in R)$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)+m-1=0$ 恰好有 4 个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围为(　　)

A．$(1,\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}+1)$　　B．$(0,\dfrac{\sqrt{2e}}{2e})$　　C．$(1,\dfrac{1}{e}+1)$　　D．$(\dfrac{\sqrt{2e}}{2e},1)$

【解析】解：化简可得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}, & x\geqslant 0\\ \dfrac{\sqrt{-x}}{e^x}, & x<0\end{cases}$，

当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，$f'(x)=\dfrac{(\sqrt{x})'e^x-\sqrt{x}\bullet e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{e^x}=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$，

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，

故当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{e}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}=\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$；

当 $x<0$ 时，$f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\bullet e^x-\sqrt{-x}\bullet e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-1+2x}{2\sqrt{-x}\bullet e^x}<0$，$f(x)$ 为减函数，

作出函数 $f(x)$ 对应的图象如图：

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个最大值为 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$；

设 $t=f(x)$，

当 $t>\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$ 时，方程 $t=f(x)$ 有 1 个解，

当 $t=\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$ 时，方程 $t=f(x)$ 有 2 个解，

当$0<t<\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$时，方程$t=f(x)$有 3 个解，

当$t=0$时，方程$t=f(x)$有 1 个解，

当$t<0$时，方程$m=f(x)$有 0 个解，

则方程$f^2(x)-mf(x)+m-1=0$等价为$t^2-mt+m-1=0$，

等价为方程$t^2-mt+m-1=(t-1)[t-(m-1)]=0$有两个不同的根$t=1$，或$t=m-1$，

当$t=1$时，方程$t=f(x)$有 1 个解，

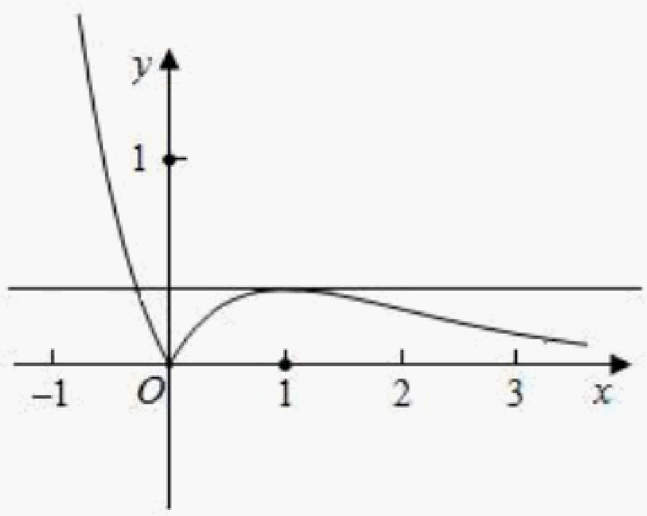
要使关于x的方程$f^2(x)-mf(x)+m-1=0$恰好有 4 个不相等的实数根，

则$t=m-1\in(0,\dfrac{\sqrt{2e}}{2e})$，

即$0<m-1<\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$，解得$1<m<\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}+1$，

则m的取值范围是$(1,\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}+1)$

故选：A.



3．已知函数$f(x)=\begin{cases}e^{|x-1|},x>0\\-x^2-2x+1,x\leqslant 0\end{cases}$，若方程$f^2(x)+bf(x)+2=0$有 8 个相异实根，则实数$b$的取值范围(　　)

A．$(-4,-2)$　　B．$(-4,-2\sqrt{2})$　　C．$(-3,-2)$　　D．$(-3,-2\sqrt{2})$

【解析】解：令$f(x)=t$，则方程$f^2(x)+bf(x)+2=0\Leftrightarrow$方程$t^2+bt+2=0$.

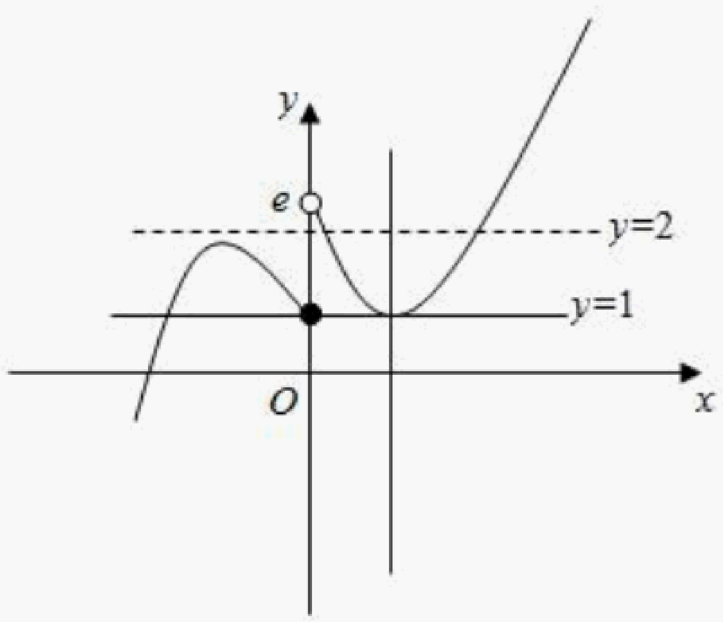
如图是函数$f(x)=\begin{cases}e^{|x-1|},x>0\\-x^2-2x+1,x\leqslant 0\end{cases}$，的图象，根据图象可得：

方程$f^2(x)+bf(x)+2=0$有 8 个相异实根$\Leftrightarrow$方程$t^2+bt+2=0$．有两个不等实数解t_1，t_2

且t_1，$t_2\in(1,2)$．可得

$$\begin{cases} \triangle = b^2 - 8 > 0 \\ 1^2 + b \cdot 1 + 2 > 0 \\ 2^2 + 2 \cdot b + 2 > 0 \\ 1 < -\dfrac{b}{2} < 2 \end{cases} \Rightarrow -3 < b < -2\sqrt{2}.$$

故选：D．



4．已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x, x>0 \\ -ln(x+1), x<0 \end{cases}$，关于 x 的方程 $f^2(x)-2af(x)+a-1=0(a \in R)$ 有四个相异的实数根，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,0)$

B．$[1,+\infty)$

C．$(-\infty,0)\bigcup[2,+\infty)$

D．$(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$

【解析】解：函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x, x>0 \\ -ln(x+1), x<0 \end{cases}$ 的图象如图：

方程 $f^2(x)-2af(x)+a-1=0(a \in R)$ 有四个相异的实数根，

必须 $f(x)$ 由两个解，一个 $f(x)>1$，一个 $f(x) \in (0,1)$，

或者 $f(x) \in (0,1)$，另一个 $f(x) \leqslant 0$，

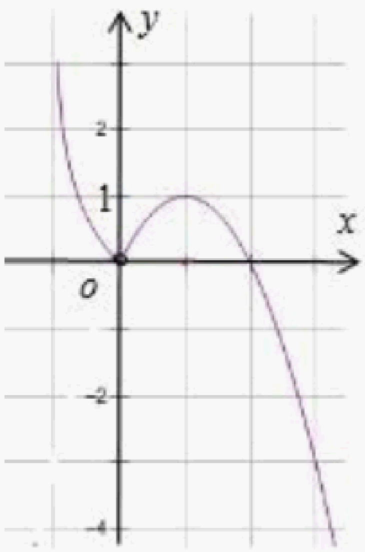
$f^2(x)-2af(x)+a-1=0(a \in R)$，可得 $f(x)=a \pm \sqrt{a^2-a+1}$，

当 $a>1$ 时，$a+\sqrt{a^2-a+1}>1$，$a-\sqrt{a^2-a+1} \in (0,1)$．满足题意．

当 $a=1$ 时，$a+\sqrt{a^2-a+1}=2$，$a-\sqrt{a^2-a+1}=0$，不满足题意．

考察选项可知，D 正确；

故选：D．



5．已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x-x^3, x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{e^x}+\dfrac{lnx+1}{x}, x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)-1=0$ 恰好有 6 个不相等的实根，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$(-2，\dfrac{1}{e}+1)$　　　　B．$(-2，0)\cup(0，\dfrac{1}{e}+1)$

C．$(-\dfrac{3}{2},\dfrac{2e+1}{e^2+e})$　　　　D．$(-\dfrac{3}{2}，0)\cup(0，\dfrac{2e+1}{e^2+e})$

【解析】解：当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=3x-x^3$，则 $f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$，

令 $f'(x)=0$ 得：$x=-1$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，且 $f(-1)=-2$，$f(0)=0$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{lnx+1}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}+\dfrac{-lnx}{x^2}$，显然 f'（1）$=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，且 f（1）$=\dfrac{1}{e}+1$，

故函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示：，

令 $t=f(x)$，则关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)-1=0$ 化为关于 t 的方程 $t^2-mt-1=0$，

$\because \Delta=m^2+4>0$，$\therefore$ 方程 $t^2-mt-1=0$ 有两个不相等的实根，设为 t_1，t_2，

由韦达定理得：$t_1+t_2=m$，$t_1t_2=-1<0$，不妨设 $t_1>0$，$t_2<0$，

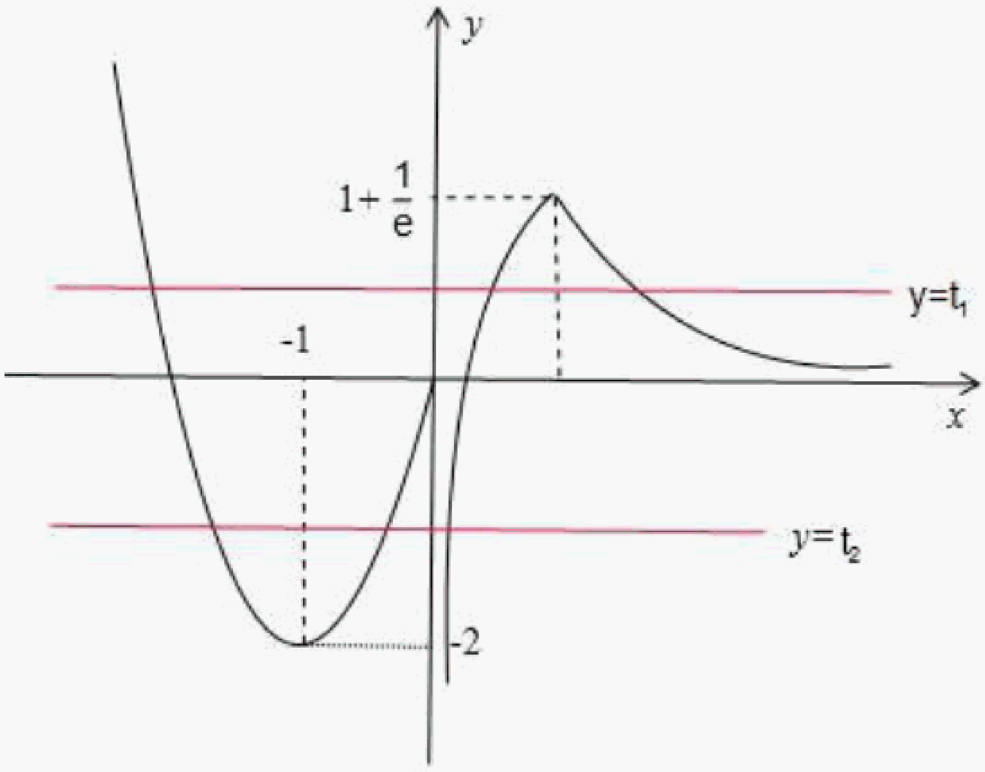
$\because$ 关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)-1=0$ 恰好有 6 个不相等的实根，

$\therefore$ 由函数 $f(x)$ 的图象可知：$0<t_1<1+\dfrac{1}{e}$，$-2<t_2<0$，

设 $g(t)=t^2-mt-1$，则 $\begin{cases} g(-2)>0 \\ g(0)<0 \\ g(1+\dfrac{1}{e})>0 \end{cases}$，

解得：$-\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{2e+1}{e^2+e}$，

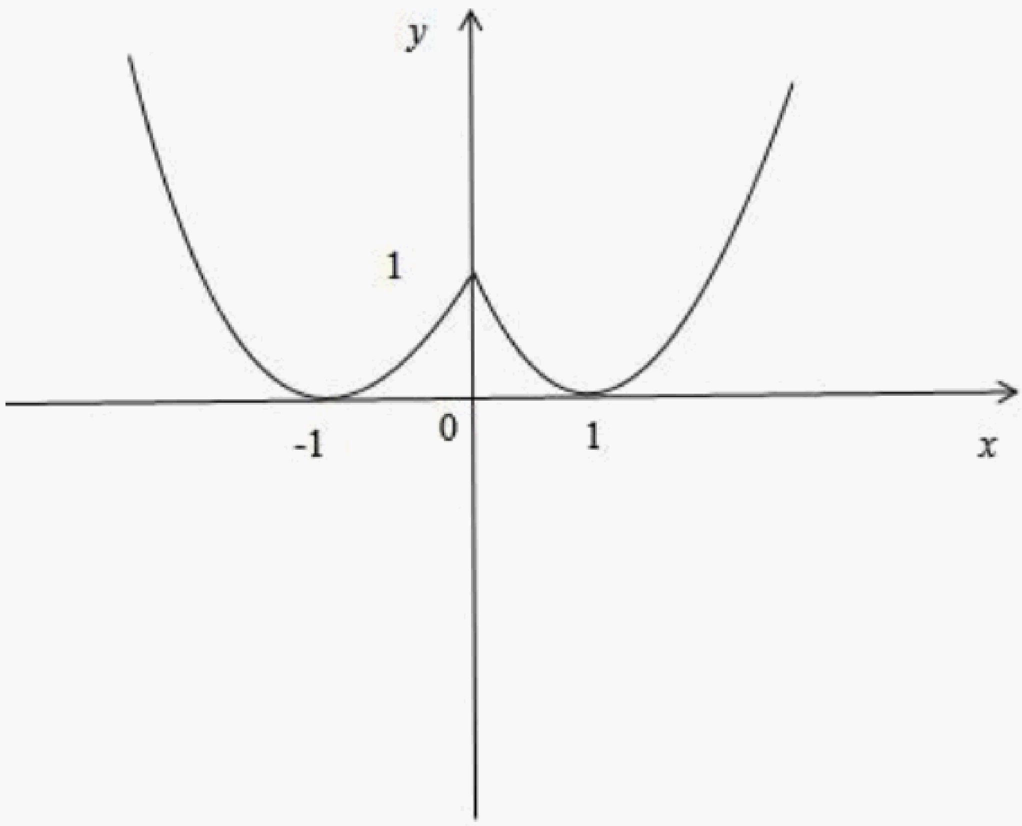
故选：C．



6．已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2^{|x-1|}-1, x..0 \\ x^2+2x+1, x<0 \end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-(m+1)f(x)+2m^2=0$ 有五个不同实根，则 m 的值是(　　)

A．0 或 $\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．0　　D．不存在

【解析】解：画出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示：



，

当 $f(x)=1$ 时，有三个根，

把 $f(x)=1$ 代入方程 $f^2(x)-(m+1)f(x)+2m^2=0$ 得，$1-(m+1)+2m^2=0$，

解得：$m=0$ 或 $\frac{1}{2}$，

当 $m=0$ 时，方程 $f^2(x)-(m+1)f(x)+2m^2=0$ 为 $f^2(x)-f(x)=0$，所以 $f(x)=0$ 或 1，所以有五个根，

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，方程 $f^2(x)-(m+1)f(x)+2m^2=0$ 为 $f^2(x)-\frac{3}{2}f(x)+\frac{1}{2}=0$，所以 $f(x)=1$ 或 $\frac{1}{2}$，所以有 7 个根，舍去，

综上所求，$m=0$ 时，方程 $f^2(x)-(m+1)f(x)+2m^2=0$ 有五个不同实根，

故选：C．

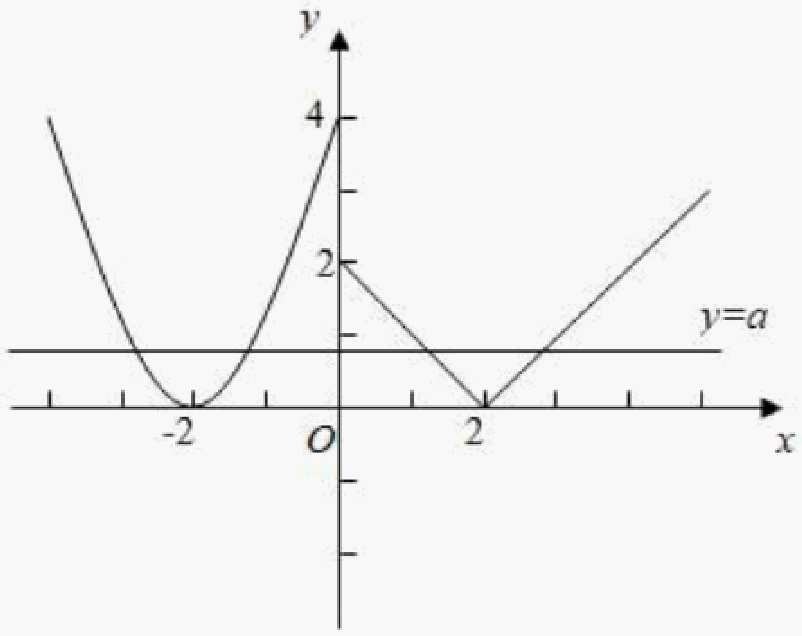
7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2,x\leqslant 0\\|x-2|,x>0\end{cases}$，方程 $f^2(x)-af(x)=0$（其中 $a\in(0,2)$）的实根个数为 p，所有这些实根的和为 q，则 p、q 的值分别为(　　)

A．6，4　　B．4，6　　C．4，0　　D．6，0

【解析】解：$\because f^2(x)-af(x)=0$，

$\therefore f(x)=0$ 或 $f(x)=a$．

作出 $f(x)$ 的函数图象如图所示：



由图象可知 $f(x)=0$ 有两解，$f(x)=a$ 有四解.

$\therefore p=6$.

由图象可知 $f(x)=0$ 的两解为 $x=-2$，$x=2$，

$f(x)=a$ 的四个解中，较小的两个关于直线 $x=-2$ 对称，较大的两个关于直线 $x=2$ 对称，

$\therefore q=0$.

故选：D .

8．已知函数 $g(x)=a(x+1)ln(x+1)$ 的图象在点 $(e^2-1$，$g(e^2-1))$ 处的切线与直线 $x+6y+1=0$ 垂直 $(e=2.71828\ldots$ 是自然对数的底数），函数 $f(x)$ 满足 $xf(x)+g(x-1)-x^3=0$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-bf(x)+c=0(b$，$c\in R$，且 $c<0)$ 在区间 $[\frac{1}{e},e]$ 上恰有 3 个不同的实数解，则实数 b 的取值范围是(　　)

A．$(1,\frac{1}{e^2}+2]$　　B．$[\frac{1}{e^2}+2,e^2-2]$

C．$[e^2-2,\frac{1}{e^2}+e^2]$　　D．$(2,\frac{1}{e^2}+e^2]$

【解析】解：函数 $g(x)=a(x+1)ln(x+1)$ 的导数为 $g'(x)=aln(x+1)+a$，

可得 $g(x)$ 图象在点 $(e^2-1$，$g(e^2-1))$ 处的切线斜率为 $3a$，

由切线与直线 $x+6y+1=0$ 垂直，可得 $3a=6$，

解得 $a=2$，

$g(x)=2(x+1)ln(x+1)$，

$xf(x)+g(x-1)-x^3=0$，

可得 $f(x)=x^2-2lnx$，

导数为 $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x^2}$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减.

即有 $x=1$ 处 $f(x)$ 取得最小值 1.

则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}，e]$ 的图象如右：

若关于 x 的方程 $f^2(x)-bf(x)+c=0(b，c\in R，且 c<0)$

在区间 $[\frac{1}{e},e]$ 上恰有 3 个不同的实数解，

可令 $t=f(x)$，则 $t^2-bt+c=0$，（1）

可得 t 的范围是 $[1，e^2-2]$，

方程（1）判别式为 $b^2-4c>0$，必有两不同的实数解，

设为 t_1，t_2，$t_1+t_2=b$，

可得 $t_1=1$，$1<t_2\leqslant 2+\frac{1}{e^2}$，

即 $1<b-1\leqslant 2+\frac{1}{e^2}$，

解得 $2<b\leqslant 3+\frac{1}{e^2}$，①

又 $2+\frac{1}{e^2}<t_1\leqslant e^2-2$，

$1<t_2\leqslant 2+\frac{1}{e^2}$，

则 $3+\frac{1}{e^2}<t_1+t_2=b\leqslant e^2+\frac{1}{e^2}$，②

由①②求并可得 $2<b\leqslant e^2+\frac{1}{e^2}$，

故选：D.