第3章 信道和信道容量

主要内容

- 3.1信道的基本概念
- 3.2离散单个符号信道及其容量
- 3.3离散序列信道及其容量
- 3.4连续信道及其容量
- 3.5信源与信道的匹配

3.1 信道分类和表示参数

重点：信道矩阵

《信息论与编码》

信道中存在的干扰使输出信号与输入信号之间没有固定的函数关系，只有统计依赖的关系。因此可以通过研究分析输入输出信号的统计关系来研究信道。

一、信道的分类

1、根据用户数量分为

① **单用户信道**：只有一个输入端和一个输出端，信息单向传输。

② **多用户信道**：输入端和输出端至少有一方存在两个以上的用户，信息双向传输。

2、根据信道输入端和输出端的关系分为

① **无反馈信道**：输出端对输入端没有影响。

② **反馈信道**：输出信号通过一定的途径反馈到输入端，致使输入端信号发生变化。

《信息论与编码》

3、根据信道参数与时间的关系分为

① 固定参数信道：信道参数（统计特性）不随时间的变化而变化。例如光纤、电缆等信道。

② 时变参数信道：信道参数随时间变化而变化。例如无线信道。

4、根据信道中所受噪声种类的不同分为

① 随机差错信道：噪声独立随机地影响每个传输码元。例如以白噪声为主体的信道。

② 突发差错信道：干扰的影响是前后相关的，错误成串出现。例如衰落信道、码间干扰信道。

5、根据信道参数与时间的关系分为

①离散信道：输入输出信号在时间、幅度上均为离散。

②连续信道：信号幅度连续、时间离散。

③半离散半连续信道：输入输出信号中一个离散、一个连续。

④波形信道：在时间和幅度上均连续，一般可以用随机过程来表示。限时限频的随机过程可以分解为离散的随机序列，所以波形信道可以被分解为离散信道、连续信道和半离散半连续信道。

二、离散信道的信道参数

1、基本离散信道（单符号离散信道）

输入输出信号都是取值离散的单个随机变量，可用信道转移概率 $p(b_j/a_i)$ 来描述。其中

$X \in A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$Y \in B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$，

并满足：

$$\sum_{j=1}^{m} P(b_j / a_i) = 1$$

信道转移概率：条件概率 $p(b_j/a_i)$ 其中,ai为信道输入，bj为信道输出。

$$p(b_j / a_i) = p(Y = b_j / X = a_i) = p_{ij}$$

单符号离散信道可以用图形描述如下

$$X \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \xrightarrow{\quad X \quad} \boxed{\text{信道}} \xrightarrow{\quad Y \quad} Y \in B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

$$P(b_j / a_i)$$

$$\sum_j p(b_j / a_i) = 1$$

$$i = 1, 2, \cdots, n \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

信道矩阵P: 将信道转移概率排成矩阵形式称为信道矩阵。

$$P=\left[p(b_j/a_i)\right]=\left[p_{ij}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} P(b_1/a_1) & P(b_2/a_1) & \cdots & P(b_m/a_1) \\ P(b_1/a_2) & P(b_2/a_2) & \cdots & P(b_m/a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(b_1/a_n) & P(b_2/a_n) & \cdots & P(b_m/a_n) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}$$

信道矩阵的每一行之和必定等于1。

2、一般离散信道（多维离散信道）

输入输出信号都是平稳随机矢量，其数学模型可用概率空间[X，p(Y/X)，Y]来描述。

其中 $X=(X_1X_2\ldots X_i\ldots)$ 为输入信号，$Y=(Y_1Y_2\ldots Y_j\ldots)$ 为输出信号。

X中 $X_i\in A=\{a_1,a_2,\ \ldots,a_n\}$ Y中 $Y_i\in B=\{b_1,b_2,\ \ldots,b_m\}$

其中P(Y/X)是信道的传递概率，反映输入和输出信号之间统计依赖关系。

根据信道是否存在干扰以及有无记忆，将信道分为：

1）无干扰（噪声）信道：

2）有干扰无记忆信道：

3）有干扰有记忆信道：

1）无干扰（噪声）信道：已知信道输入X就知道信道输出Y。

$$p(Y/X)=\begin{cases}1 & Y=f(X)\\ 0 & Y\neq f(X)\end{cases}$$

①无噪无损信道：

疑义度H（X/Y）=0，噪声熵H（Y/X）=0

②无噪有损信道：

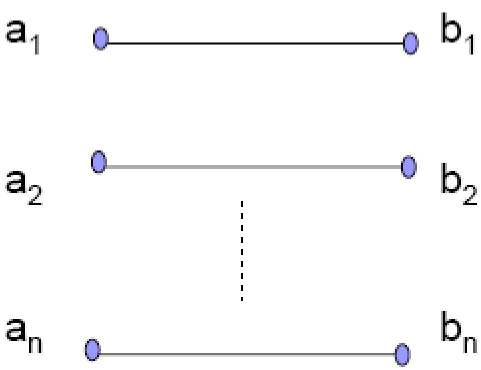
疑义度H（X/Y）〉0，噪声熵H（Y/X）= 0

③有噪无损信道（严格意义上，不能称为无噪声信道）：

疑义度H（X/Y）= 0，噪声熵H（Y/X）〉0

①无噪无损信道：输入输出一一对应，信道矩阵为单位阵。

疑义度H（X/Y）=0，噪声熵H（Y/X）=0

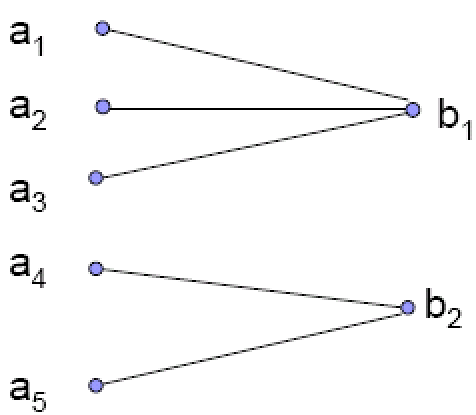


$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

②无噪有损信道（确定信道）：

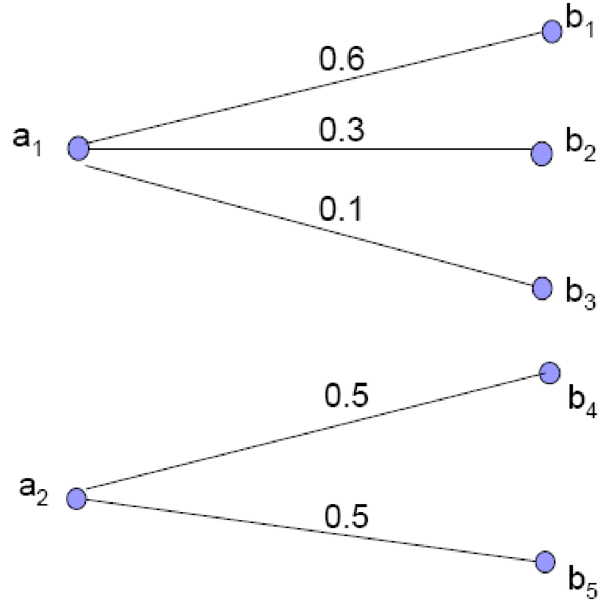
$$H(X/Y)>0,\quad H(Y/X)=0$$

信道输出端接收到某个bj 后不能判定是哪个输入符号aj



$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③有噪无损信道：H（X/Y）=0， H（Y/X）〉0



$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

2）有干扰无记忆信道：

每个信道输出只与当前输入信号之间有转移概率关系，而与其它时刻的输入输出信号无关。

这种情况下，不需要矢量形式，**只要分析单个符号的转移概率p(yi/xi)即可。**

$$p(Y^L/X^L)=p(y_1y_2\cdots y_L/x_1x_2\cdots x_L)$$
$$=p(y_1/x_1)p(y_2/x_2)\cdots p(y_L/x_L)$$

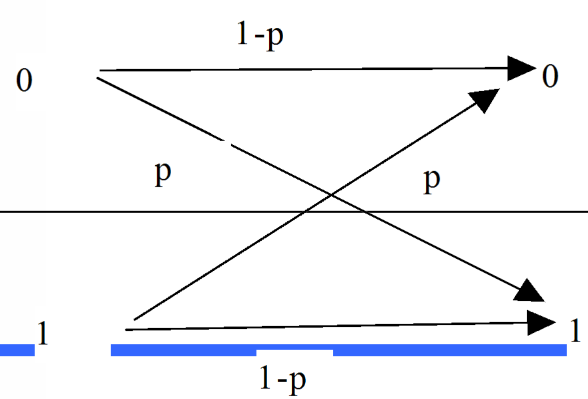
①离散无记忆信道（**DMC**）

②二进制对称信道（**BSC**）

①**离散无记忆信道 (DMC)：** 输入和输出信号的符号数大于2但为有限值,即$X \in \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，$Y \in \{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}$$

②**二进制对称信道（BSC）：** 输入和输出信号的符号数都是2，即$X \in A=\{0,1\}$和$Y \in B=\{0，1\}$的对称信道。



$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

3）有干扰有记忆信道：每个信道输出不但与当前输入信号之间有转移概率关系，而且与其它时刻的输入输出信号也有关。

在实际的数字信道中，当信道特性不理想，存在码间干扰时，输出信号不但与当前的输入信号有关，还与以前的输入信号有关。常用的处理方法有两种：

①将记忆很强的L个符号当作矢量符号，各矢量符号之间认为无记忆。这时会引入误差，L越大，误差越小。

②将转移概率看作记忆长度有限的马尔科夫链的形式，这种处理方法很复杂，通常取一阶时稍简单。

三、离散输入、连续输出信道

信道输入符号选自一个有限的、离散的输入符号集X∈{a1,a2,… ,an}，而信道输出Y∈{-∞，+∞},这种信道模型就称为离散时间无记忆信道。它的特性由离散输入X、连续输出Y以及一组条件概率密度函数

$p_Y(y/X=a_i),\quad i=1,2,\cdots,n$ 来决定。

这类信道中最重要的就是加性高斯白噪声（AWGN）信道

Y=X+G

式中，G 是一个零均值，方差为σ^2的高斯随机变量。 当X=ai给定后，Y是一个均值为ai，方差为σ^2的高斯随机变量。

$$p_Y(y/a_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-(y-a_i)^2/2\sigma^2}$$

四、波形信道

当信道输入和输出都是随机过程{x(t)}和{y(t)} 时，该信道就称为波形信道，在实际模拟通信系统中，信道都是波形信道。

如果波形信道为频宽受限信道，在有限的观察时间内，输入和输出的随机过程可以化为L个时间离散，取值连续的平稳随机序列。

这样，波形信道化为多维连续信道，信道转移概率密度函数为 $p_Y(y^L/x^L)=p_Y(y_1,y_2,\cdots,y_L/x_1,x_2,\cdots,x_L)$,

其中：$\int_R\int_R\cdots\int_R p_Y(y_1,y_2,\cdots,y_L/x_1,x_2,\cdots,x_L)dy_1dy_2\cdots dy_L=1$

如果多维连续信道的转移概率密度函数满足

$$p_Y\left(y^L/x^L\right)=p_Y\left(y_1,y_2,\cdots,y_L/x_1,x_2,\cdots,x_L\right)$$

$$=\prod_{l=1}^{L}p_Y\left(y_l/x_l\right)$$

这样的信道称为**连续无记忆信道**即在任一时刻输出变量只与对应时刻的输入变量有关，与以前时刻的输入输出都无关。

一般情况下，上式不能满足，也就是连续信道任一时刻的输出变量与以前时刻的输入输出有关，则称为**连续有记忆信道**。

噪声分为两类：加性噪声和乘性噪声，分析较多的是加性噪声信道（噪声与信号是相加的关系，通常相互独立。）

单符号加性噪声信道可以表示为：

x(t)是带限信号，y(t)是输出值，n(t)是加性噪声过程的一个样本函数

$$y(t)=x(t)+n(t)$$

$$p_{X,Y}(x,y)=p_{X,n}(x,n)=p_X(x)p_n(n)$$

$$p_Y(y/x)=\frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}=\frac{p_{X,n}(x,n)}{p_X(x)}=p_n(n)$$

可以证明：$H_C(Y/X)=H_C(n)$

说　明：

条件熵Hc(Y/X)是由于噪声引起的，它等于噪声信源的熵Hc(n)。所以称条件熵Hc(Y/X)为噪声熵。

加性多维连续信道中，输入矢量、输出矢量和噪声矢量的关系表示为：

$$y^L = x^L + n^L$$

同理可得： $p_Y(y^L/x^L) = p_n(n^L)$

$$H_C(Y^L/X^L) = H_C(n^L)$$

以后主要讨论加性信道，噪声源则主要是加性高斯白噪声。

五、信道模型的选取

在分析问题时选用何种信道模型完全取决于分析者的目的

① 如果感兴趣的是设计和分析编码器和译码器的性能，常采用**DMC**信道模型或其简化形式**BSC**信道模型。

② 如果分析性能的理论极限，则多采用离散输入、连续输出信道模型。

③ 如果设计和分析数字调制器和解调器的性能，则可采用波形信道模型。

因为本书后面的内容主要讨论编码和译码，所以**DMC**信道模型使用最多。

作　业：

- 3-1

3.2 离散单个符号信道及其容量

- 一、几个定义
- **二、干扰离散信道的信道容量**
- **三、对称DMC信道**
- 四、准对称DMC信道
- 五、一般DMC信道
- 六、串联信道的信道容量

重点：
无干扰信道、对称信道和准对称信道的信道容量

一、几个定义

1、信息传输率R：信道中平均每个符号所能传送的信息量

R = I(X; Y) = H(X) − H(X/Y) 单位：bit/符号

2、信息传输速率R_t：信道中单位时间平均传送的信息量,即收信者在单位时间内接收到的信息量。单位：bit/秒

$$R_t = I(X;Y)/t = R_B \cdot I(X;Y)$$
$$= R_B \cdot [H(X) - H(X/Y)] = H_t(X) - H_t(X/Y)$$

其中，R_B为每秒钟传送的符号数。

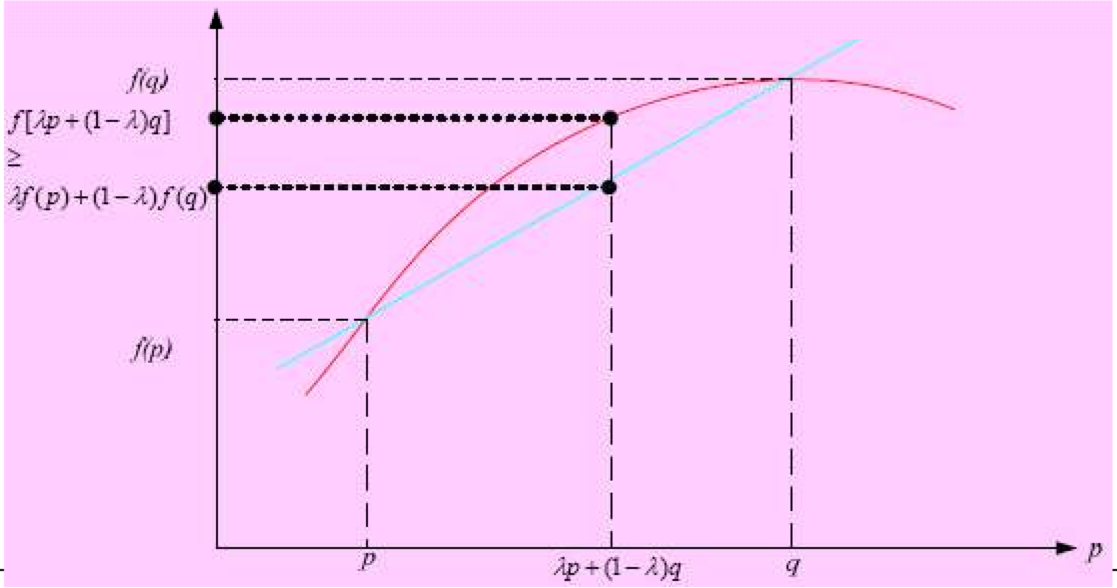
t为传送一个符号所需的平均时间。

$H_t(X) = R_B H(X)$ 表示单位时间信源输出的信息量。

$H_t(X/Y) = R_B H(X/Y)$表示单位时间信道损失的信息量。

3、信道容量C

1）理论基础：对于固定的信道，平均互信息$I(X;Y)$是信源概率分布$P(x)$的上凸函数。也就是说，存在一个使某一特定信道的平均互信息达到极大值的信源分布，该极大值可以用来表述信道传送信息的最大能力，即信道容量。



2）信道容量的定义

对于某特定信道，可找到某种信源的概率分布$p(a_i)$，使得I（X；Y）达到最大。

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}(bit/\text{符号})$$

注：对于特定的信道，信道容量是个定值，但是在传输信息时信道能否提供其最大传输能力，则取决于输入端的概率分布。一般相应的输入概率分布称为最佳输入分布。

若平均传输一个符号需要t秒钟，则信道单位时间内平均传输的最大信息量为：

$$C_T = \frac{1}{t}\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}(bit/秒)$$

即信道传输速率。

信道容量C已与输入信源的概率分布无关，它只是信道传输概率的函数，只与信道的统计特性有关。所以，信道容量是完全描述信道特性的参量，是信道能够传输的最大信息量。

例：二进制对称信道

- 设p(0)=1/2时，

$$p(0'/0)=1-\varepsilon, p(0'/1)=\varepsilon,$$

$$p(1'/0)=\varepsilon, p(1'/1)=1-\varepsilon$$

则$C=I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$

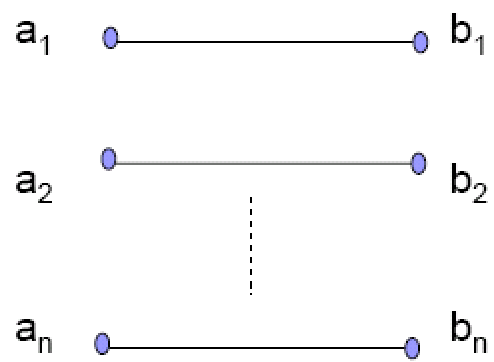
$$=1+(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon(bit/\text{符号})$$

即二进制对称信道的$C=1-H(\varepsilon)(bit/\text{符号})$

ε是错误传递概率，$H(\varepsilon)$是关于ε的熵函数

二、无干扰离散信道的信道容量

1、无噪无损信道：输入输出一一对应，信道矩阵为单位阵．疑义度 H (X/Y) =0，噪声熵 H (Y/X) =0



$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

信道容量：

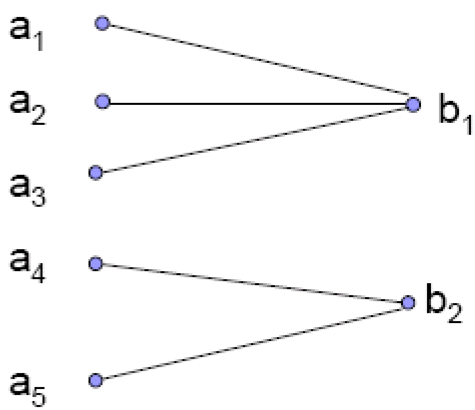
I (X; Y) = H (X) = H (Y) ，

则 C = max H (X) = max H (Y)

2、无噪有损信道（确定信道）：

H（X/Y）>0，H（Y/X）=0

信道输出端接收到某个b_j后不能判定是哪个输入符号a_i



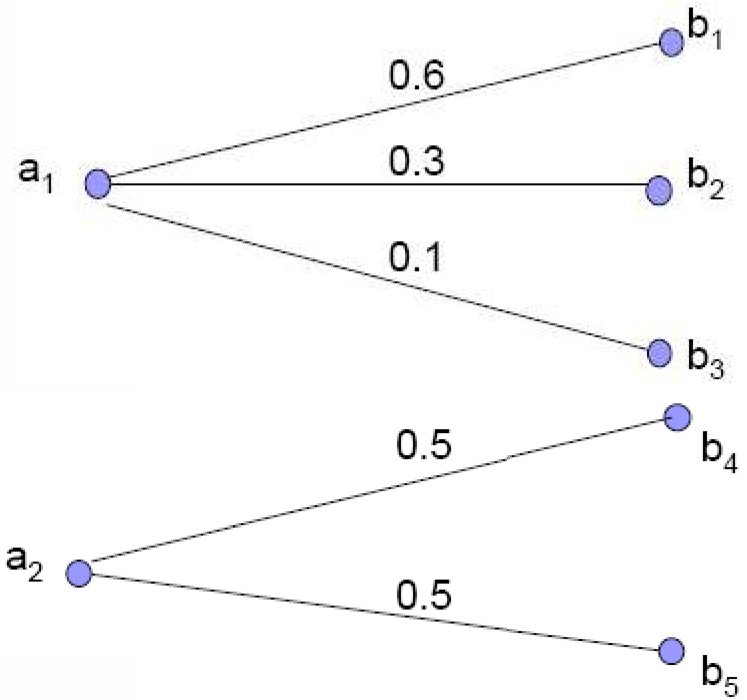
$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

信道容量:

I（X; Y）= H（Y），则 C = max H（Y），

这时的输入分布应该是使得信道输出分布为等概分布。

3、有噪无损信道： $H(X/Y)=0$， $H(Y/X)>0$

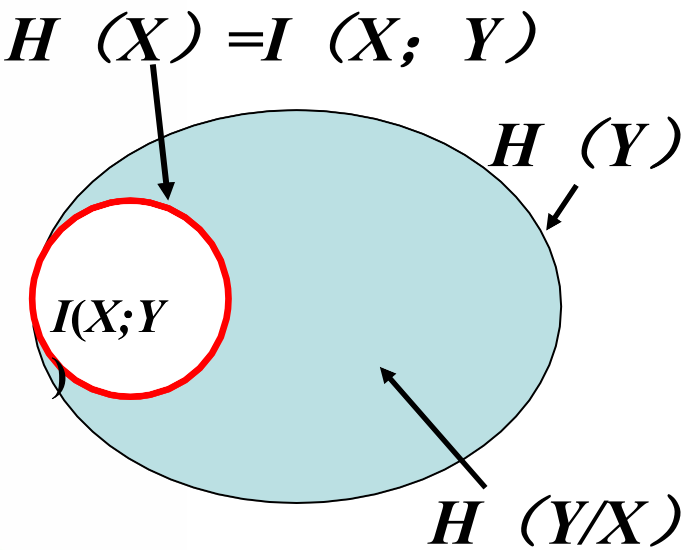


$$P_3=\begin{bmatrix}0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

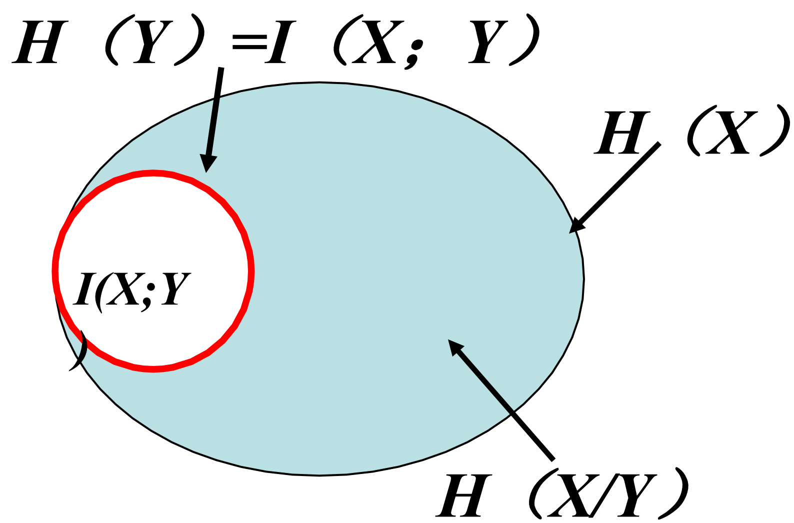
信道容量： $I(X;Y)=H(X)$，则 $C=\max H(X)$。

这时的输入分布为等概分布。

- 我们可以进一步用维拉图来表述有噪无损信道和无噪有损信道中平均互信息、损失熵、噪失熵以及信源熵之间的关系。



有噪无损信道



无噪有损信道

- 综合上述三种情况，若严格区分的话，凡损失熵等于零的信道称为无损信道；凡噪声熵等于零的信道称为无噪信道，而前面讨论的一一对应的无噪信道则为无噪无损信道。
- 对于无损信道，其信息传输率R就是输入信源X输出第个符号携带的信息量（信源熵H（X）），所以其信道容量为

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max_{p(x)}H(X)=\log r(bit/\text{符号})$$

- 式中假设输入信源X的符号共有r个符号，所以等概率分布时信源熵H（X）最大。

同理，对于无噪信道，信道容量为

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max_{p(x)}H(Y)=\log s(bit/\text{符号})$$

式中假设输出信源Y的符号共有s个符号，所以等概率分布时信源熵H（Y）最大。而且一定能找到一种输入分布使输出符号Y达到等概分布。

三、对称DMC信道

1、定义：如果转移概率矩阵P的每一行包含同样元素，则为输入对称矩阵；如果转移概率矩阵P的每一列包含同样元素，则为输出对称矩阵；如果输入输出都对称，则为对称DMC信道。

例 如：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- 若输入符号和输出符号个数相同，都等于r,且信道矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \frac{p}{r-1} & \bar{p} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \bar{p} \end{bmatrix} \quad 其中 p+\bar{p}=1$$

- 则此信道称为**强对称信道**或**均匀信道**。这类信道中的错误概率为p,对称地平均分配给r-1个输出符号。它是对称离散信道的一类特例。**二元对称信道就是r=2的均匀信道**。对均匀信道，其信道矩阵中各列之和也等于1（一般信道的信道矩阵中各列之和不一定等于1）

2、信道容量

对称离散信道的平均互信息为I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)，而

$$H(Y/X)=\sum_{X}P(x)\sum_{Y}P(y/x)\log\frac{1}{P(y/x)}=\sum_{X}P(x)H(Y/X=x)$$

$$\text{其中}H(Y/X=x)=\sum_{Y}P(y/x)\log\frac{1}{P(y/x)}$$

这一项是固定X=x时对Y求和，即对信道矩阵的行求和。由于信道的对称性，所以H(Y/X=x)与x无关，为一常数，即

$$H(Y/X=x)=H(p_1,p_2,\cdots p_s,)$$

$$\text{因此得}I(X;Y)=H(Y)-H(p_1,p_2,\cdots p_s,)$$

可得信道容量

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max_{p(x)}[H(Y)-H(p_1,p_2,\cdots p_s,)](bit/\text{符号})$$

- 这就变换成求一种输入分布P(x)使H(Y)取最大值的问题了。现已知Y的符号集共有s个符号，则H(Y)<=logs。只有当P(y)=1/s（等概率分布时），H(Y)才达到最大值logs。一般情况下，不一定存在一种输入符号的概率分布P(x)，能使输出符号达到等概率分布。但对于对称离散信道，其信道矩阵中每一列都是由同一概率集的诸元素的不同排列组成，所以保证了当输入符号是等概率分布，即 P(x)=1/r时，输出符号Y一定也是等概率分布，这是H(Y)=logs。

- 由此得对称离散信道的信道容量为

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\log s-H(p_1,p_2,\cdots p_s)(bit/\text{符号})$$

它是对称离散信道能够传输的最大的平均信息量, 它只与对称信道矩阵中行矢量$p_1,p_2,\cdots p_s$和输出符号集的个数s有关.

例 题：

已知信道转移矩阵为 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

计算信道容量。

解：

$$C=\log 4-H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})=0.082(bit/\text{符号})$$

在这个信道中，每个符号平均能够传输的最大信息为0.082比特。而且只有当信道的输入符号是等概率分布时才能达到这个最大值。

例 题：

已知信道转移矩阵为 $P=\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \frac{\varepsilon}{n-1} & \cdots & \frac{\varepsilon}{n-1} \\ \frac{\varepsilon}{n-1} & 1-\varepsilon & \cdots & \frac{\varepsilon}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varepsilon}{n-1} & \frac{\varepsilon}{n-1} & \cdots & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$

该信道输入符号和输出符号的个数相同，都为n，且正确的传输概率为1-ε，错误概率ε被均匀分给n-1个输出符号，此类信道称为强对称信道或均匀信道，计算信道容量。

解：

$$C=\log n-H\left(1-\varepsilon,\frac{\varepsilon}{n-1},\cdots,\frac{\varepsilon}{n-1}\right)$$

- 二元对称信道就是r=2的均匀信道。由式子可计算得到信道容量是

$$C = 1 - H(p)(bit/\text{符号})$$

四、准对称DMC信道

1、定义：如果转移概率矩阵P是输入对称而输出不对称，即转移概率矩阵的每一行包含同样元素，而各列的元素可以不同，则为准对称矩阵。

例 如：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/225300222333012011