计算方法与实习

主讲：张丽丽

河海大学计信学院

教材：

袁慰平　孙志忠　《计算措施与实习》

东南大学出版社

参照书目：

1. John H. Mathews Kurtis D. Fink 《数值措施》（MATLAB 版）（Numerical Methods Using MATLAB）

电子工业出版社

2. 石博强　赵金　MATLAB 数值计算与工程分析范例教程

中国铁道出版社

Matlab 试验参照书目：

1、《Matlab教程》张志涌 杨祖樱 等编著（北京航空航天大学出版社）
2、《Matlab与数学试验》张志刚 刘丽梅 等编著（中国铁道出版社）
3、《数值分析及其Matlab试验》姜健飞 胡良剑 等编著（科学出版社）
4、《Matlab应用数学工具箱技术手册》魏巍主编 (国防工业出版社)

计算：计算什么？对什么进行计算？

---计算复杂的数值问题，对复杂的数值问题进行计算；所谓数值，就是其体现与解是以数值的形似体现，而不是图形等其他。

学过的数值问题有哪些？能否列举某些你不能处理的数值问题？

--高次方程的根，高阶线性方程组，离散数据相应的数学问题等

计算措施

第一章　绪论

§1.1计算措施的任务与特点

实际问题 → 数学问题 → 提供计算措施

程序设计 → 上机计算 → 成果分析

基本的数学问题：

1. 非线性方程 $f(x)=0$ 求解(求根)；
2. 大型线性代数方程组Ax=b求解；
3. 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 计算；
4. 常微分方程初值问题求解；
5. 矩阵A的特征值和特征向量计算；
6. 其他。

求精确解(值)一般非常困难。例如：

1. 方程组阶数n很大，例如n=20, 计算机运算速度1亿次/秒, 用不好的算法, 大约需算30多万年; 好算法不到一分钟。另外，还有计算成果可靠性问题。
2. 特征值定义

$$Ax = \lambda x \qquad (x \neq 0)$$

$$Ax - \lambda x = 0 \qquad (A - \lambda I)x = 0$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

3. $f(x)$ 形式复杂时求根和求积分很困难。

4. 线性微分方程易解，如

$$y'' + 2y' - y = 1 \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

非线性方程难解，如

$$e^y y'' + \sin y^2 - y = 1 \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

希　望：　求近似解，但措施简朴可行，行之有效（计算量小，误差小等）。以计算机为工具，易在计算机上实现。

计算机运算: 只能进行加，减，乘，除等算术运算和某些逻辑运算。

计算措施：　把求解数学问题转化为按一定顺序只进行加，减，乘，除等基本运算——数值措施。

§1.2 误差基础知识

一.误差起源（分类）

1. 模型误差。
2. 观察误差。
3. 截断误差，如

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots,$$

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$$

右端是截断误差。

4. 舍入误差。计算机字长有限，一般实数不能精确存储，于是产生舍入误差。例如：在10位十进制数限制下：

$$1 \div 3 = 0.3333333333 \quad (\text{本应 } 1 \div 3 = 0.33333333\cdots)$$

$$(1.000002)^2 - 1.000004 = 0$$

$$(\text{本应 } (1.000002)^2 - 1.000004$$

$$= 1.000004000004 - 1.000004$$

$$= 0.000000000004 = 4 \times 10^{-12})$$

舍入误差很小，本课程将研究它在运算过程中是否能有效控制。

二．误差基本概念

1．绝对误差。设 x^* ——精确值，x ——近似值。称 $e(x)=x^*-x$ 为 x 的绝对误差。$(|e(x)|\le\varepsilon)$ 为 x 的绝对误差限。

2．相对误差。称 $e_r(x)=\frac{e(x^*)}{x}$ 为 x 的相对误差。实用中，常用 $\frac{e(x)}{x}$ 表达 x 的相对误差。

称 $(|e_{r}(x)|\le\varepsilon_r)$ 为 x 的相对误差限。

3．有效数字

设 $x = \pm 10^{m} \times (0.a_1 a_2 \cdots a_n a_p)\ (a_1 \neq 0, p \leq \infty)$

若 $|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$ （1.1）

则说 x 具有n位有效数字，分别是

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

若 $n = p$ ，则称 x 为有效数。

例1.1

设 x =0.0270是某数 x^* 经“四舍五入”所得，则

误差 $|e(x)|$ 不超出 x 末位的半个单位，即：

$$|x^*-x| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

又 $x = 10^{-1}(0.270)$ ，故该不等式又可写为

$$|x-x^*| \le \frac{1}{2}\times 10^{-1-3}$$

由有效数字定义可知， x 有3位有效数字，分别是2，7，0。

例1.2

$x^* = 32.93$, $x = 32.89$,

$$|x - x^*| = 0.04 < 0.05 = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

$$|x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{2-3}$$

故 x 有3位有效数字，分别是3,2，8。

因为 x 中的数字9不是有效数字，故 x 不是有效数。

三、有效数位与误差的关系

1. 有效数位n越多，则绝对误差 $|e(x)|$ 越小

（由定义1.1）

2. 定理1.1 若近似数 x 具有n位有效数字，则

（1.2）

$$|e_r(x)| \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

反之，若 $|e_r(x)| \le \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{1-n}$ 则

x 至少有n位有效数字。

四、数值运算的误差估计

1. 一元函数情形

设 $y=f(x)$， 则$y^*=f(x^*)$，由Taylor展开公式

$$e(y)=y^*-y=f(x^*)-f(x)\approx f'(x)(x^*-x)$$

$$e(y)\approx f'(x)e(x)$$

两边除以 $y=f(x)$ 得

$$e_r(y)=\frac{e(y)}{y}\approx\frac{xf'(x)}{f(x)}e_r(x)$$

$$e_r(y)\approx\frac{f'(x)}{f(x)}xe_r(x)$$

(1.3)和（1.4）给出了由自变量的误差引起的函数值的误差的近似式（误差传播）。

2. 多元函数情形

设 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$

由多元函数的Taylor展开公式类似可得

$$e(y) \approx \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_1, x_2, \cdots, x_n) e(x_i) \qquad (1.5)$$

$$e_r(y) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)} x_i e_r(x_i) \qquad (1.6)$$

在（1.6）式中，分别取 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, x_1 x_2, \frac{x_1}{x_2}$，可得

$$\left| e_r(x_1 + x_2) \right| \le \max_{1 \le i \le 2} \left| e_r(x_i) \right| \quad x_1, x_2 \text{ 同号} \qquad (1.7)$$

$$\left| e_r(x_1 x_2) \right| \approx \left| e_r(x_1) + e_r(x_2) \right| \qquad (1.8)$$

$$\left| e_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \right| \approx \left| e_r(x_1) - e_r(x_2) \right| \le \left| e_r(x_1) \right| + \left| e_r(x_2) \right| \qquad (1.9)$$

例1.3：测得某桌面的长a的近似值a=120cm,宽b的近似值b=60cm。若已知|e(a)|≤0.2cm,|e(b)|≤0.1cm。 试求近似面积s=ab的绝对误差限与相对误差限。

解：面积s=ab,在公式（1.5）中,将 $y=f(x_1,x_2)$ 换为 s=ab，则

$$e(s)\approx\frac{\partial s(a,b)}{\partial a}e(a)+\frac{\partial s(a,b)}{\partial b}e(b)$$

$$=be(a)+ae(b)$$

$$|e(s)|\le|b||e(a)|+|a||e(b)|$$

$$\le 60\times0.2+120\times0.1=24cm^2$$

相对误差限为: $|e_r(s)|=|\frac{e(s)}{s}|\le\frac{24}{120\times60}=0.33\%$

§1.3 选用算法应遵照的原则

1. 尽量简化计算环节，降低乘除运算的次数.

例如，计算多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n$

一般运算的乘法次数为 $1 + 2 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

若采用递推算法,

$$\begin{cases} u_n = a_n \\ u_k = x u_{k+1} + a_k \qquad (k = n\text{-}1, n\text{-}2, \cdots, 1, 0) \\ p_n(x) = u_0 \end{cases}$$

则乘法次数仅为n.　又如

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{1000} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{1001}$$

2. 预防大数“吃掉”小数

当|a|>>|b|时，尽量防止a+b 。例如，假设计算机只能存储10位尾数的十进制数，则

$$10^8 + 0.04 = 10^9 \times 0.1 + 10^9 \times 0.000000000004 = 10^8$$

3. 尽量防止相近数相减

例如，当x很大时，应

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

当x接近于0时，应

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \text{或} tg\frac{x}{2}$$

4. 防止绝对值很小的数做分母

当|b|<<|a|时，应尽量防止 $\frac{a}{b}$ 。

5. 选用数值稳定性好的算法，以控制舍入误差高速增长

例如 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}$

（n=1, 2, …）

若 $I_0 = \ln\frac{6}{5} \approx 0.1823$（误差 $\leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$ ）则计算 I_{100} 时误差扩大了 5^{100} 倍，而 $I_{n-1} = \frac{1}{5}(\frac{1}{n} - I_n)$ 是稳定的。

用Matlab实现求积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$

在Matlab程序编辑器中输入：

```
y0=log(6.0/5.0);
fprintf('y[%d]=%f\n',0,y0)
n=1;
while(1)
    yl=1.0/n-5*y0;
    fprintf('y[%d]=%f\n',n,yl)
    if(n>=20) break;
    end
    y0=yl;
    n=n+1;
end
```

E:\Matlab6.5\work\example1.m

```
y0=log(6.0/5.0);
fprintf('y[%d]=%f\n',0,y0)
n=1;
while(1)
    y1=1.0/n-5*y0;
    fprintf('y[%d]=%f\n',n,y1)
    if(n>=20) break;
    end
    y0=y1;
    n=n+1;
end
```

example1.m Untitled2.m

script Ln 11 Col 4

程序运营成果:

Command Window

```
>> example1
y[0]=0.182322
y[1]=0.088392
y[2]=0.058039
y[3]=0.043139
y[4]=0.034306
y[5]=0.028468
y[6]=0.024325
y[7]=0.021233
y[8]=0.018837
y[9]=0.016926
y[10]=0.015368
y[11]=0.014071
y[12]=0.012977
y[13]=0.012040
y[14]=0.011229
y[15]=0.010522
y[16]=0.009890
y[17]=0.009372
y[18]=0.008696
y[19]=0.009151
y[20]=0.004243
>>
>>
```

基本要求：

1. 熟悉计算措施在处理实际问题中所处的地位，熟悉计算措施是以计算机为工具求近似解的数值措施；
2. 熟悉绝对误差（限），相对误差（限）及有效数字概念；
3. 熟悉公式（1.2）--（1.9）；
4. 熟悉选用算法应遵照的原则；

作业：

第一章　8，10

第二章 方程求根

f(x)=0根或f(x)零点，当f(x)复杂时，极难求（找近似有效简朴措施）。

§2.1 区间二分法

理论：$f(x) \in C[a,b]$，单调，$f(a)f(b)<0$

$\longrightarrow$ f(x)=0在(a,b)有惟一根。

方程求根的环节:(1)求根的隔离区间;(2)将根精确化

根的隔离区间求法：画草图；多项式函数交点横坐标；试算。

例1 求$f(x)=x^3-3x^2+4x-3=0$的有根区间。

法一：做草图。

法二：改写函数为 $x^3=3x^2-4x+3$ ，

的函数图像交点的横坐标。

法三：根据函数的单调性。

$$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$$

$f(x)$单调递增，

$$f(0)<0, f(2)=8-12+8-3=1>0$$

例2 求 $f(x)=xe^x-2=0$ 的有根区间

第二种措施：即改写方程式为两个函数的等式，从而求方程的根即求两个函数图像交点的横坐标。

解： 当$x\le 0$时 $f(x)\le -2$ ，所以方程的根

$(0,\infty)$ 内，在 $(0,\infty)$ 内原方程等价于 $e^x=\frac{2}{x}$

因而原方程的根就是指数曲线 $y_1=e^x$ 及等边双

线 $y_2=\frac{2}{x}$ 的交点的横坐标，故方程在[0.5,1]内

一

实根。

- 二分法的基本思想：

  用对分区间的措施根据分点处函数f(x)的符号逐渐将有根区间缩小，使在足够小的区间内，方程仅有1个根。