

专题 16 极值与最值

【考点预测】

知识点一：极值与最值

1. 函数的极值

函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极大值，记作 $y_{\text{极大值}} = f(x_0)$ 。如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极小值，记作 $y_{\text{极小值}} = f(x_0)$ 。极大值与极小值统称为极值，称 x_0 为极值点。

求可导函数 $f(x)$ 极值的一般步骤

(1) 先确定函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求导数 $f'(x)$ ；

(3) 求方程 $f'(x) = 0$ 的根；

(4) 检验 $f'(x)$ 在方程 $f'(x) = 0$ 的根的左右两侧的符号，如果在根的左侧附近为正，在右侧附近为负，那么函数 $y = f(x)$ 在这个根处取得极大值；如果在根的左侧附近为负，在右侧附近为正，那么函数 $y = f(x)$ 在这个根处取得极小值。

注①可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值的充要条件是： x_0 是导函数的变号零点，即 $f'(x_0) = 0$ ，且在 x_0 左侧与右侧， $f'(x)$ 的符号异号。

② $f'(x_0) = 0$ 是 x_0 为极值点的既不充分也不必要条件，如 $f(x) = x^3$ ， $f'(0) = 0$ ，但 $x_0 = 0$ 不是极值点。另外，极值点也可以是不可导的，如函数 $f(x) = |x|$ ，在极小值点 $x_0 = 0$ 是不可导的，于是有如下结论： x_0 为可导函数 $f(x)$ 的极值点 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ ；但 $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点。

2. 函数的最值

函数 $y = f(x)$ 最大值为极大值与靠近极小值的端点之间的最大者；函数 $f(x)$ 最小值为极小值与靠近极大值的端点之间的最小者。

导函数为 $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($m < x_1 < x_2 < n$)

(1) 当 $a > 0$ 时，最大值是 $f(x_1)$ 与 $f(n)$ 中的最大者；最小值是 $f(x_2)$ 与 $f(m)$ 中的最小者。

(2) 当 $a < 0$ 时，最大值是 $f(x_2)$ 与 $f(m)$ 中的最大者；最小值是 $f(x_1)$ 与 $f(n)$ 中的最小者。

一般地，设 $y = f(x)$ 是定义在 $[m, n]$ 上的函数， $y = f(x)$ 在 (m, n) 内有导数，求函数 $y = f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最大值与最小值可分为两步进行：

(1) 求 $y = f(x)$ 在 (m, n) 内的极值（极大值或极小值）；

(2) 将 $y = f(x)$ 的各极值与 $f(m)$ 和 $f(n)$ 比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值。

注①函数的极值反映函数在一点附近情况，是局部函数值的比较，故极值不一定是最值；函数的最值是对函数在整个区间上函数值比较而言的，故函数的最值可能是极值，也可能是区间端点处的函数值；

②函数的极值点必是开区间的点，不能是区间的端点；

③函数的最值必在极值点或区间端点处取得.

【方法技巧与总结】

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在最小值 $f(x)_{\min}$ 和最大值 $f(x)_{\max}$ ，则

不等式 $f(x) > a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > a$ ；

不等式 $f(x) \geq a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a$ ；

不等式 $f(x) < b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < b$ ；

不等式 $f(x) \leq b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq b$ ；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上不存在最大（小）值，且值域为 (m, n) ，则

不等式 $f(x) > a$ （或 $f(x) \geq a$ ）在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m \geq a$.

不等式 $f(x) < b$ （或 $f(x) \leq b$ ）在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m \leq b$.

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在最小值 $f(x)_{\min}$ 和最大值 $f(x)_{\max}$ ，即 $f(x) \in [m, n]$ ，则对不等式有解问题有以下结论：

不等式 $a < f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a < f(x)_{\max}$ ；

不等式 $a \leq f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a \leq f(x)_{\max}$ ；

不等式 $a > f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a > f(x)_{\min}$ ；

不等式 $a \geq f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a \geq f(x)_{\min}$ ；

(4) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上不存在最大（小）值，如值域为 (m, n) ，则对不等式有解问题有以下结论：

不等式 $a < f(x)$ （或 $a \leq f(x)$ ）在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a < n$

不等式 $b > f(x)$ （或 $b \geq f(x)$ ）在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow b > m$

(5) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$ ，总存在 $x_2 \in [m, n]$ ，使得 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \leq g(x_2)_{\max}$ ；

(6) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$ ，总存在 $x_2 \in [m, n]$ ，使得 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \geq g(x_2)_{\min}$ ；

(7) 若存在 $x_1 \in [a, b]$ ，对于任意的 $x_2 \in [m, n]$ ，使得 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \leq g(x_2)_{\min}$ ；

(8) 若存在 $x_1 \in [a, b]$ ，对于任意的 $x_2 \in [m, n]$ ，使得 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \geq g(x_2)_{\max}$ ；

(9) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$ ， $x_2 \in [m, n]$ 使得 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \leq g(x_2)_{\min}$ ；

(10) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$ ， $x_2 \in [m, n]$ 使得 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \geq g(x_2)_{\max}$ ；

(11) 若存在 $x_1 \in [a, b]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \leq g(x_2)_{\max}$.

(12) 若存在 $x_1 \in [a, b]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \geq g(x_2)_{\min}$.

【题型归纳目录】

题型一：求函数的极值与极值点

题型二：根据极值、极值点求参数

题型三：求函数的最值（不含参）

题型四：求函数的最值（含参）

题型五：根据最值求参数

题型六：函数单调性、极值、最值得综合应用

题型七：不等式恒成立与存在性问题

【典例例题】

题型一：求函数的极值与极值点

例 1. (2023·江西·上饶市第一中学模拟预测 (文)) 已知函数 $f(x) = e^x - a(x-1) (a \in \mathbf{R})$.

当 $a=1$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的极值;

例 2. (2023·湖北·襄阳四中模拟预测) 设 $f(x) = e^x \sin x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的极值;

(2) 若对 $\forall x_1, x_2 \in [0, \pi], x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} + a > 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

例 3. (2023·天津市咸水沽第一中学模拟预测) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x} - e \ln x$ ($e = 2.71828 \dots$ 自然对数底数).

(1) 当 $a=e$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a > e$ 时,

(i) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(ii) 证明: $f(x) < (a-1)e$

例 4. (2023·江西师大附中三模(理)) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \sin x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 判断函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是否存在极值, 若存在, 请判断是极大值还是极小值; 若不存在, 说明理由;

(2) 求证: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \pi)$ 上只有两个零点.

例 5. (2023·江苏苏州·模拟预测) 函数 $f(x) = x - \sin x - \cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的极值;

(2) 证明: $F(x) = f(x) - \ln x$ 有两个零点.

【方法技巧与总结】

1. 因此, 在求函数极值问题中, 一定要检验方程 $f'(x) = 0$ 根左右的符号, 更要注意变号后极大值与极小值是否与已知有矛盾.

2. 原函数出现极值时, 导函数正处于零点, 归纳起来一句话: 原极导零. 这个零点必须穿越 x 轴, 否则不是极值点. 判断口诀: 从左往右找穿越 (导函数与 x 轴的交点); 上坡低头找极小, 下坡抬头找极大.

题型二: 根据极值、极值点求参数

例 6. (2023·四川·绵阳中学实验学校模拟预测(文)) 若函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10, 则 $a-b = (\quad)$

A. 6

B. -15

C. -6 或 15

D. 6 或 -15

例 7. (2023·江苏南通·模拟预测) 已知函数 $f(x) = (x-a)(x-b)e^x$ 在 $x=a$ 处取极小值, 且 $f(x)$

的极大值为4, 则 $b =$ ()

- A. -1 B. 2 C. -3 D. 4

例 8. (2023·四川绵阳·二模(文)) 若 $x=2$ 是函数 $f(x) = x^2 + 2(a-2)x - 4a \ln x$ 的极大值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

例 9. (2023·河南·模拟预测(文)) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$ 的极值为 $-\frac{1}{2}$, 则 $a =$ ()

- A. e B. $\frac{1}{2}e$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

例 10. (2023·河南·高三阶段练习(文)) 若函数 $f(x) = (x^2 + ax + 2) \cdot e^x$ 在 \mathbb{R} 上无极值, 则实数 a 的取值范围 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
C. $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ D. $[-2, 2]$

例 11. (2023·四川省南充高级中学高三阶段练习(理)) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3mx^2 + nx + m^2$ 在 $x = -1$ 处取得极值0, 则 $m+n =$ ()

- A. 2 B. 7 C. 2 或 7 D. 3 或 9

例 12. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - a(x - \ln x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, e)$ B. $(0, e)$ C. $(e, +\infty)$ D. $[e, +\infty)$

例 13. (2023·陕西·西北工业大学附属中学模拟预测(理)) 已知函数 $f(x) = [ax^2 - (4a+1)x + 4a+3]e^x$, 若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-1, +\infty)$

例 14. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + x$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 上既有极大值又有极小值, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ D. $\left(2, \frac{10}{3}\right)$

例 15. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 + 2(m-1)x$ 在 $(0, 4)$ 上无极值, 则 $m =$ _____.

例 16. (2023·吉林长春·模拟预测(文)) 已知函数 $f(x) = ax + \sin x$, $x \in (0, \pi)$.

(1)当 $a=1$ 时, 过 $(0,1)$ 做函数 $f(x)$ 的切线, 求切线方程;

(2)若函数 $f(x)$ 存在极值, 求极值的取值范围.

例 17. (2023·北京市第十二中学三模) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}, a \in \mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)设函数 $g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$, 若 $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上存在极值, 求 a 的取值范围.

例 18. (2023·天津·耀华中学二模) 已知函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x} + \ln x - x (a > 0)$.

(1)若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $f(x)$ 存在两个极小值点 x_1, x_2 , 求实数 a 的取值范围.

例 19. (2023·河北·石家庄二中模拟预测) 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$.

(1)当 $a=0, b=1$ 时, 证明: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) < \ln x$;

(2)若 $b=a^2$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在极大值, 求 a 的取值范围.

题型三: 求函数的最值 (不含参)

例 20. (2023·江苏徐州·模拟预测) 函数 $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$ 的最小值为_____.

例 21. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = \frac{xe^x - \ln x}{x+1}$ 的最小值为_____.

例 22. (2023·四川·模拟预测 (文)) 对任意 $a \in \mathbf{R}$, 存在 $b \in (0, +\infty)$, 使得 $a+1 = e \ln b$, 则 $b-a$ 的最小值为_____.

例 23. (2023·河南郑州·三模 (文)) $f(x) = e^x - x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值是 ()

- A. $1 + \frac{1}{e}$ B. 1 C. $e+1$ D. $e-1$

例 24. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $y = (x+1)e^{x+1}, x \in [-3, 4]$ 的最大值为 ()

- A. $2e^{-2}$ B. $5e^5$ C. $4e^5$ D. $-e^{-1}$

例 25. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 1 - ax \cos x (a \neq 0)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 的最小值.

例 26. (2023·山东·临沭县教育和体育局高二期中) 已知函数 $f(x) = x^3 + bx^2 - x + a, x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.

(1) 求 b 的值;

(2) 当 $x \in [-2, 2]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

题型四：求函数的最值（含参）

例 27. (2023·北京通州·高二期中) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上的最小值.

例 28. (2023·河南·高二阶段练习 (理)) 已知函数 $f(x) = x - m \ln x - m$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 有最小值 $g(m)$, 证明: $g(m) \leq \frac{1}{e}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

例 29. (2023·江苏·高二单元测试) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a > 0$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.

题型五: 根据最值求参数

例 30. (2023·河北·模拟预测) 已知 $a > 0$, 函数 $g(x) = x + \frac{1+a}{x} - 2$ 在 $[2, +\infty)$ 上的最小值为 1, 则 $a =$ _____.

例 31. (2023·山西运城·模拟预测 (理)) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, 若函数 $f(x)$ 在 $(2a-2, 2a+3)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

例 32. (2023·浙江湖州·高三期末) 若函数 $f(x) = (x^2 + 2x + 1 + a)e^{x+2}$ 存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

例 33. (2023·陕西·模拟预测 (理)) 若函数 $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 在区间 $(a-2, 2a+3)$ 上有最大值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

题型六: 函数单调性、极值、最值得综合应用

例 34. (2023·全国·高三专题练习 (理)) 已知函数 $f(x) = ex + ax \cdot \sin x$.

(1) 求 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程;

(2) 当 $a=-2$ 时, 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 若 x_0 是 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的一个极值点, 求证: x_0 是函数 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的唯一极小值点, 且 $e-2 < g(x_0) < e-\sqrt{2}$.

例 35. (2023·四川泸州·三模 (文)) 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $g(x) = f(x) \cdot e^x$ 有且只有一个极值点, 求 a 的取值范围.

例 36. (2023·广东·深圳市光明区高级中学模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^x - ax + \sin x - 1$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2) 当 $1 \leq a < 2$ 时, 试讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

例 37. (2023·北京市十一学校高三阶段练习) 已知函数 $f(x) = (x-1)e^{ax} - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x$

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的极值点的个数, 并说明理由.

例 38. (2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习) 已知函数 $f(x) = e^x(x-3) - \ln x - \frac{2}{x}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一极大值点 x_0 , 且 $-2e - 2 < f(x_0) < -\frac{7}{2}$.

例 39. (2023·全国·模拟预测 (文)) 已知函数 $f(x) = (x-2)\ln x - x - 1$.

(1) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) m 为整数, $f(x) > m$, 求 m 的最大值.

题型七: 不等式恒成立与存在性问题

例 40. (2023·辽宁·二模) 若关于 x 的不等式 $x + \ln x + 1 \leq axe^x$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

例 41. (2023·北京·景山学校模拟预测) 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax + 2$.

(1)当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2)若对任意的 $x \in [1, e^2]$, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

例 42. (2023·新疆克拉玛依·三模(文)) 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3 (a \in R)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}g(x)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

例 43. (2023·陕西·西北工业大学附属中学模拟预测(文)) 已知函数 $f(x) = 2^{-x+1} + x^2 - 2x + 1 + (x-1) \ln 2$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若对 $\forall x_1, x_2 \in [0, 2]$, 使 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2 - \frac{1}{a}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

例 44. (2023·内蒙古赤峰·三模(文)) 已知函数 $f(x) = x(\ln x + 1)$.

(1)求 $f(x)$ 的最小值;

(2)若 $f(x) \geq -x^2 + (m+1)x - 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【方法技巧与总结】

在不等式恒成立或不等式有解条件下求参数的取值范围, 一般利用等价转化的思想其转化为函数的最值或值域问题加以求解, 可采用分离参数或不分离参数法直接移项构造辅助函数.

【过关测试】

一、单选题

1. (2023·全国·哈师大附中模拟预测(文)) 已知 x_0 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x - 2\sin x \cos x$ 的一个极值点, 则 $\tan^2 x_0$

的值是 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{5}{7}$

2. (2023·宁夏·吴忠中学三模(理)) 下列函数中, 既是奇函数又存在极值的是 ()

- A. $y=x$ B. $y=\ln(-x)$ C. $y=x+e^x$ D. $y=x+\frac{4}{x}$

3. (2023·河南新乡·二模(文)) 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=a^2x-\frac{1}{3}x^3$ 的极小值为 $-\frac{4}{3}$, 则 $a=()$

- A. $\sqrt[3]{4}$ B. 1 C. $\sqrt[3]{2}$ D. $\sqrt{2}$

4. (2023·内蒙古包头·一模(理)) 设 $m \neq 0$, 若 $x=m$ 为函数 $f(x)=m(x-m)^2(x-n)$ 的极小值点, 则 ()

- A. $m>n$ B. $m<n$ C. $\frac{n}{m}<1$ D. $\frac{n}{m}>1$

5. (2023·河南·模拟预测(文)) 当 $x=m$ 时, 函数 $f(x)=x^3-x^2+3x-2\ln x$ 取得最小值, 则 $m=()$

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

6. (2023·四川凉山·三模(理)) 函数 $f(x)=\frac{a}{2}x^2-\sin x$, 若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有最小值, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-1, 0)$

7. (2016·天津市红桥区教师发展中心高三学业考试) 已知函数 $f(x)=(x^2-4)(x-a)$, a 为实数, $f'(-1)=0$, 则 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值是 ()

- A. $\frac{9}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{50}{27}$

8. (2023·宁夏·高三阶段练习(文)) 若函数 $f(x)=\frac{x^2+2x-a}{e^x}$ 在区间 $(a, a+1)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-2, -1)$
C. $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ D. $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1)$

二、多选题

9. (2023·重庆·三模) 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+x+1}{e^x}$ (e 为自然对数的底数, $e \approx 2.72$), 则关于函数 $f(x)$, 下列结论正确的是 ()

- A. 有 2 个零点 B. 有 2 个极值点 C. 在 $(0, 1)$ 单调递增 D. 最小值为 1

10. (2023·湖北·宜城市第一中学高三阶段练习) 已知 $f(x) = \frac{|x|}{e^x}$. 则下列说法正确的有 ()

A. 函数 $y = f(x)$ 有唯一零点 $x = 0$

B. 函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

C. 函数 $y = f(x)$ 有极大值 $\frac{1}{e}$

D. 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有三个不同的根. 则实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$

11. (2023·福建省德化第一中学模拟预测) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $x_0 (x_0 \neq 0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 以下结论一定正确的是 ()

A. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$

B. $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极大值点

C. $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点

D. $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

12. (2023·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = (a - ex)e^{-x} + xe^x$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 则下列说法正确的是 ()

A. $a = e$

B. $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增

C. $x = \frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点

D. $f(x)$ 仅有两个零点

三、填空题

13. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 + 2(m-1)x$ 在 $(0, 4)$ 上无极值, 则 $m =$ _____.

14. (2023·天津河西·二模) 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 9$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 则 $f(2) =$ _____.

15. (2023·湖南·长郡中学高三阶段练习) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln|x|$ 的极值点为 _____.

16. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq a, \\ 4x^3 - 3x, & x < a, \end{cases}$ 则下列命题正确的有: _____.

①若 $f(x)$ 有两个极值点, 则 $a = 0$ 或 $\frac{1}{2} < a < 1$

②若 $f(x)$ 有极小值点, 则 $a > \frac{1}{2}$

③若 $f(x)$ 有极大值点, 则 $a > -\frac{1}{2}$

④使 $f(x)$ 连续的 a 有 3 个取值

四、解答题

17. (2023·四川省叙永第一中学校高三阶段练习(文)) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x=1$ 与 $x=-\frac{2}{3}$ 时, 都取得极值.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若 $f(-1) = \frac{3}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调增区间和极值.

18. (2023·河南郑州·高三阶段练习(文)) 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间及其最大值与最小值.

19. (2023·陕西·武功县普集高级中学高三期末(文)) 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$.

(1) 若 $a=-3$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[e, e^3]$ 上单调递增, 求 a 的取值范围.

20. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + ax + 1$ 在 $(-1, 0)$ 上有两个极值点, x_1, x_2 , 且

$x_1 < x_2$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: 当 $-\frac{1}{2} < x < 0$ 时, $f(x) > \frac{11}{12}$.

21. (2023·北京·人大附中三模) 设函数 $f(x) = [ax^2 - (4a+1)x + 4a+3]e^x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a ;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值, 求 a 的取值范围.

22. (2023·浙江嘉兴·模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - e, a \in \mathbf{R}$. (注: $e = 2.71828\text{L}$ 是自然对数的底数)

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 只有一个极值点, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若存在 $b \in \mathbf{R}$, 对与任意的 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x) \geq b$ 恒成立, 求 $a-b$ 的最小值.

专题 16 极值与最值

【考点预测】

知识点一：极值与最值

1. 函数的极值

函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极大值，记作 $y_{\text{极大值}} = f(x_0)$ 。如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极小值，记作 $y_{\text{极小值}} = f(x_0)$ 。极大值与极小值统称为极值，称 x_0 为极值点。

求可导函数 $f(x)$ 极值的一般步骤

(1) 先确定函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求导数 $f'(x)$ ；

(3) 求方程 $f'(x) = 0$ 的根；

(4) 检验 $f'(x)$ 在方程 $f'(x) = 0$ 的根的左右两侧的符号，如果在根的左侧附近为正，在右侧附近为负，那么函数 $y = f(x)$ 在这个根处取得极大值；如果在根的左侧附近为负，在右侧附近为正，那么函数 $y = f(x)$ 在这个根处取得极小值。

注①可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值的充要条件是： x_0 是导函数的变号零点，即 $f'(x_0) = 0$ ，且在 x_0 左侧与右侧， $f'(x)$ 的符号异号。

注② $f'(x_0) = 0$ 是 x_0 为极值点的既不充分也不必要条件，如 $f(x) = x^3$ ， $f'(0) = 0$ ，但 $x_0 = 0$ 不是极值点。另外，极值点也可以是不可导的，如函数 $f(x) = |x|$ ，在极小值点 $x_0 = 0$ 是不可导的，于是有如下结论： x_0 为可导函数 $f(x)$ 的极值点 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ ；但 $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点。

2. 函数的最值

函数 $y = f(x)$ 最大值为极大值与靠近极小值的端点之间的最大者；函数 $f(x)$ 最小值为极小值与靠近极大值的端点之间的最小者。

导函数为 $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($m < x_1 < x_2 < n$)

(1) 当 $a > 0$ 时，最大值是 $f(x_1)$ 与 $f(n)$ 中的最大者；最小值是 $f(x_2)$ 与 $f(m)$ 中的最小者。

(2) 当 $a < 0$ 时，最大值是 $f(x_2)$ 与 $f(m)$ 中的最大者；最小值是 $f(x_1)$ 与 $f(n)$ 中的最小者。

一般地，设 $y = f(x)$ 是定义在 $[m, n]$ 上的函数， $y = f(x)$ 在 (m, n) 内有导数，求函数

$y = f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最大值与最小值可分为两步进行:

(1) 求 $y = f(x)$ 在 (m, n) 内的极值 (极大值或极小值);

(2) 将 $y = f(x)$ 的各极值与 $f(m)$ 和 $f(n)$ 比较, 其中最大的一个为最大值, 最小的一个为最小值.

注①函数的极值反映函数在一点附近情况, 是局部函数值的比较, 故极值不一定是最值. 函数的最值是对函数在整个区间上函数值比较而言的, 故函数的最值可能是极值, 也可能是区间端点处的函数值;

②函数的极值点必是开区间的点, 不能是区间的端点;

③函数的最值必在极值点或区间端点处取得.

【方法技巧与总结】

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在最小值 $f(x)_{\min}$ 和最大值 $f(x)_{\max}$, 则

不等式 $f(x) > a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > a$;

不等式 $f(x) \geq a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a$;

不等式 $f(x) < b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < b$;

不等式 $f(x) \leq b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq b$;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上不存在最大 (小) 值, 且值域为 (m, n) , 则

不等式 $f(x) > a$ (或 $f(x) \geq a$) 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m \geq a$.

不等式 $f(x) < b$ (或 $f(x) \leq b$) 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m \leq b$.

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在最小值 $f(x)_{\min}$ 和最大值 $f(x)_{\max}$, 即 $f(x) \in [m, n]$,

则对不等式有解问题有以下结论:

不等式 $a < f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a < f(x)_{\max}$;

不等式 $a \leq f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a \leq f(x)_{\max}$;

不等式 $a > f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a > f(x)_{\min}$;

不等式 $a \geq f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a \geq f(x)_{\min}$;

(4) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上不存在最大 (小) 值, 如值域为 (m, n) , 则对不等式有解问题有以下结论:

不等式 $a < f(x)$ (或 $a \leq f(x)$) 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a < n$

不等式 $b > f(x)$ (或 $b \geq f(x)$) 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow b > m$

(5) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得
 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \leq g(x_2)_{\max}$;

(6) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得
 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \geq g(x_2)_{\min}$;

(7) 若存在 $x_1 \in [a, b]$, 对于任意的 $x_2 \in [m, n]$, 使得
 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \leq g(x_2)_{\min}$;

(8) 若存在 $x_1 \in [a, b]$, 对于任意的 $x_2 \in [m, n]$, 使得
 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \geq g(x_2)_{\max}$;

(9) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [m, n]$ 使得
 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \leq g(x_2)_{\min}$;

(10) 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [m, n]$ 使得
 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \geq g(x_2)_{\max}$;

(11) 若存在 $x_1 \in [a, b]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得
 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\min} \leq g(x_2)_{\max}$

(12) 若存在 $x_1 \in [a, b]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得
 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)_{\max} \geq g(x_2)_{\min}$.

【题型归纳目录】

题型一：求函数的极值与极值点

题型二：根据极值、极值点求参数

题型三：求函数的最值（不含参）

题型四：求函数的最值（含参）

题型五：根据最值求参数

题型六：函数单调性、极值、最值得综合应用

题型七：不等式恒成立与存在性问题

【典例例题】

题型一：求函数的极值与极值点

例 1. (2023·江西·上饶市第一中学模拟预测 (文)) 已知函数 $f(x) = e^x - a(x-1) (a \in \mathbf{R})$.

当 $a=1$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的极值;

【解析】

由题知, 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x-(x-1)$, $x \in \mathbf{R}$

$\therefore f'(x)=e^x-1$, 令 $f'(x)=0$, $x=0$.

$\therefore x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(0)=2$, 无极大值.

例 2. (2023·湖北·襄阳四中模拟预测) 设 $f(x)=e^x \sin x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的极值;

(2) 若对 $\forall x_1, x_2 \in [0, \pi]$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a > 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

答案: (1) 极小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$, 极大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

(2) $\left[\frac{e^\pi}{2\pi}, +\infty\right)$

【解析】

分析:

(1) 直接求导计算即可.

(2) 将问题转化为 $f(x_2)+ax_2^2 > f(x_1)+ax_1^2$, 构造新函数 $g(x)=f(x)+ax^2$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增即可, 然后参变分离或者分类讨论都可以.

(1)

由 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x) \leq 0$, $x \in [-\pi, \pi]$

得 $f(x)$ 的单调减区间是 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$,

同理, $f(x)$ 的单调增区间是 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

故 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$, 极大值为 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

(2)

由对称性, 不妨设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$,

则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a > 0$ 即为 $f(x_2)+ax_2^2 > f(x_1)+ax_1^2$.

设 $g(x)=f(x)+ax^2$, 则 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

故 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立.

方法一: (含参讨论)

设 $h(x)=g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax \geq 0$,

则 $h(0)=1 > 0$, $h(\pi)=-e^\pi+2a\pi \geq 0$, 解得 $a \geq \frac{e^\pi}{2\pi}$.

$h'(x)=2(e^x \cos x+a)$, $h'(0)=2(a+1) > 0$, $h'(\pi)=2(a-e^\pi)$.

① 当 $a \geq e^\pi$ 时, $[h'(x)]' = 2e^x(\cos x - \sin x)$,

故, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $[h'(x)]' = 2e^x(\cos x - \sin x) \geq 0$, $h'(x)$ 递增;

当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 时, $[h'(x)]' = 2e^x(\cos x - \sin x) \leq 0$, $h'(x)$ 递减;

此时, $h'(x) \geq \min\{h'(0), h'(\pi)\} = h'(\pi) = 2(a - e^\pi) \geq 0$, $h(x) = g'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,
故 $h(x) = g'(x) \geq g'(0) = 1 > 0$, 符合条件.

② 当 $\frac{e^\pi}{2\pi} \leq a < e^\pi$ 时, 同①, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $h'(x)$ 递增; 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 时, $h'(x)$ 递减;

$\therefore h'\left(\frac{\pi}{4}\right) > h'(0) = 2(a+1) > 0$, $h'(\pi) = 2(a - e^\pi) < 0$,

\therefore 由连续函数零点存在性定理及单调性知, $\exists x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$, $h'(x_0) = 0$.

于是, 当 $x \in [0, x_0]$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x) = g'(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_0, \pi]$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x) = g'(x)$ 单调递减.

$\therefore h(0) = 1 > 0$, $h(\pi) = -e^\pi + 2a\pi \geq 0$, $\therefore g'(x) = h(x) \geq \min\{h(0), h(\pi)\} \geq 0$, 符合条件.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{e^\pi}{2\pi}, +\infty\right)$.

方法二: (参变分离)

由对称性, 不妨设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$,

则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} + a > 0$ 即为 $f(x_2) + ax_2^2 > f(x_1) + ax_1^2$.

设 $g(x) = f(x) + ax^2$, 则 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

故 $g'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + 2ax \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立.

$\therefore g'(0) = 1 > 0$, $\therefore g'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + 2ax \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow -2a \leq \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{x}$, $\forall x \in (0, \pi]$.

设 $h(x) = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{x}$, $x \in (0, \pi]$, 则 $h'(x) = \frac{e^x(2x \cos x - \sin x - \cos x)}{x^2}$, $x \in (0, \pi]$.

设 $\varphi(x) = 2x - \tan x - 1$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

则 $\varphi'(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

由 $\varphi'(x) > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 得 $\varphi(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递增;

由 $\varphi'(x) < 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 得 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递减.

故 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 < 0$;

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时 $\varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} > 0$.

从而, $\varphi(x) \cos x = 2x \cos x - \sin x - \cos x < 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

又 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $2x \cos x - \sin x - \cos x = -1 < 0$, 故 $h'(x) = \frac{e^x(2x \cos x - \sin x - \cos x)}{x^2} < 0$,

$x \in (0, \pi]$,

$$h(x) = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{x}, \quad x \in (0, \pi] \text{ 单调递减, } h(x)_{\min} = h(\pi) = -\frac{e^\pi}{\pi}, \quad x \in (0, \pi].$$

于是, $-2a \leq -\frac{e^\pi}{\pi} \Leftrightarrow a \geq \frac{e^\pi}{2\pi}$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{e^\pi}{2\pi}, +\infty\right)$.

例3. (2023·天津市咸水沽第一中学模拟预测) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x} - e \ln x$ ($e = 2.71828 \dots$ 自然对数底数).

(1) 当 $a = e$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a > e$ 时,

(i) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(ii) 证明: $f(x) < (a-1)e$

答案: (1) 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

(2) 证明见详解

【解析】

分析:

(1) 求导, 利用导数判断函数单调性; (2) 利用导数判断单调性, 利用零点存在性定理判断零点, 进而确定极值点, 利用零点代换结合函数最值处理极值的范围.

(1)

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(ax) - ex}{x^2}, \quad \text{构建 } \varphi(x) = 1 - \ln(ax) - ex$$

当 $a = e$ 时, 则 $\varphi(x) = 1 - \ln(ex) - ex$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $\varphi(x) < 0$

则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

(2)

(i) 由 (1) 可知: 当 $a > e$ 时, $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

$$\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \ln a < 0, \quad \varphi\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{e}{a} > 0$$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内存在唯一的零点 $x_0 \in \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right)$

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\varphi(x) < 0$

则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, x_0)$, 单调递减区间为 $(x_0, +\infty)$

$\therefore f(x)$ 存在唯一的极值点 x_0

$$(ii) \text{ 由 (i) 可知: } f(x) \leq f(x_0) = \frac{\ln(ax_0)}{x_0} - e \ln x_0$$

$$\because 1 - \ln(ax_0) - ex_0 = 0, \quad \text{即 } 1 - ex_0 = \ln(ax_0)$$

$$f(x_0) = \frac{\ln(ax_0)}{x_0} - e \ln x_0 = \frac{1}{x_0} - e \ln x_0 - e, \quad \text{且 } x_0 \in \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right)$$

$\therefore g(x) = \frac{1}{x} - e \ln x - e$ 在 $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right)$ 单调递减

$$\text{则 } g(x) < g\left(\frac{1}{a}\right) = a + e \ln a - e$$

构建 $h(x) = (e-1)x - e \ln x$ ($x > e$), 则 $h'(x) = \frac{(e-1)x - e}{x} > 0$ 当 $x > e$ 时恒成立

则 $h(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x) \geq h(e) = e(e-2) > 0$

则 $e(x-1) > x + e \ln x - e(x > e)$, 即 $(a-1)e > a + e \ln a - e$

$\therefore f(x) < (a-1)e$

例 4. (2023·江西师大附中三模(理)) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \sin x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 判断函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是否存在极值, 若存在, 请判断是极大值还是极小值; 若不存在, 说明理由;

(2) 求证: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \pi)$ 上只有两个零点.

答案: (1) 存在; 极小值

(2) 证明见解析

【解析】

分析:

(1) 转化为判断导函数是否存在变号零点, 对 $g'(x)$ 求导后, 判断 $g'(x)$ 的单调性, 结合零点存在性定理可得结果;

(2) 当 $x < 0$ 时, 利用单调性得 $f(x) < 0$ 恒成立, 此时 $f(x)$ 无零点; 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$; 当 $0 < x < \pi$ 时, 利用导数得到单调性, 结合零点存在性定理可得 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上只有一个零点. 由此可证结论正确.

(1)

由 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \sin x$, 可得 $g(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} - \cos x = \frac{1-x}{e^x} - \cos x$,

则 $g'(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} + \sin x = \frac{x-2}{e^x} + \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

令 $h(x) = \frac{x-2}{e^x} + \sin x$, 其中 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 可得 $h'(x) = \frac{e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2} + \cos x = \frac{3-x}{e^x} + \cos x > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 即 $g'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

因为 $g'(0) = -2 < 0, g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}-2}{e^{\frac{\pi}{2}}} + 1 > 0$, 所以存在 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以当 $x = x_0$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极小值.

(2)

由 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \sin x$, 当 $x < 0$ 时, $\frac{1-x}{e^x} > 1$, 所以 $f'(x) = g(x) = \frac{1-x}{e^x} - \cos x > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数, 所以 $f(x) < f(0) = 0$,

此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上没有零点;

当 $x = 0$ 时, 可得 $f(0) = \frac{0}{e^0} - \sin 0 = 0$, 所以 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点;

当 $0 < x < \pi$ 时, 由 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \sin x = \frac{1}{e^x}(x - e^x \sin x)$,

令 $m(x) = x - e^x \sin x, x \in (0, \pi)$,

可得 $m'(x) = 1 - e^x(\sin x + \cos x)$, 令 $\varphi(x) = 1 - e^x(\sin x + \cos x)$

则 $\varphi'(x) = -e^x(\sin x + \cos x) - e^x(\cos x - \sin x) = -2e^x \cos x$,

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 可得 $\varphi'(x) = -2e^x \cos x < 0$;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 可得 $\varphi'(x) = -2e^x \cos x > 0$,

即 $m'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增,

又因为 $m'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - e^{\frac{\pi}{2}} < 0, m'(\pi) = 1 + e^\pi > 0$, 所以存在 $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 使得 $m'(x_1) = 0$,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $m'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, \pi)$ 时, $m'(x) > 0$,

又因为 $m(x_1) < m(0) = 0, m(\pi) = \pi > 0$,

所以存在 $x_2 \in (x_1, \pi)$ 使得 $m(x_2) = 0$, 即 x_2 是函数 $f(x)$ 的一个零点.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \pi)$ 上有且仅有两个零点.

【点睛】

关键点点睛: 第二问中, 分段讨论并利用导数和零点存在性定理求解是解题关键.

例 5. (2023·江苏苏州·模拟预测) 函数 $f(x) = x - \sin x - \cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的极值;

(2) 证明: $F(x) = f(x) - \ln x$ 有两个零点.

答案: (1) 极大值, $1 - \frac{\pi}{2}$; 极小值, -1 ;

(2) 详见解析.

【解析】

分析:

(1) 由题可得 $f'(x) = 1 - \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 进而可得:

(2) 当 $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, 利用导数可得函数的最小值, 进而可得函数有两个零点, 当 $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $x \in \left[\frac{7\pi}{4}, +\infty\right)$ 时, 利用导数可得 $F(x) > 0$, 即得.

(1)

$\because f(x) = x - \sin x - \cos x$,

$\therefore f'(x) = 1 - \cos x + \sin x = 1 - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$,

由 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -\frac{\pi}{2}$, 或 $x = 0$,

$\therefore x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

$\therefore x = -\frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极大值 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值 $f(0) = -1$;

(2)

$\because F(x) = f(x) - \ln x = x - \sin x - \cos x - \ln x, x > 0$,

$\therefore h(x) = F'(x) = 1 - \cos x + \sin x - \frac{1}{x}, x > 0$,

$\therefore h'(x) = \sin x + \cos x + \frac{1}{x^2} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{x^2}$,

当 $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, 即 $F'(x)$ 单调递增,

又 $F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{4}{\pi} < 0, F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{2}{\pi} > 0$,

故存在 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $F'(x_0) = 0$,

所以 $x \in (0, x_0)$, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减, $x \in (x_0, \frac{3\pi}{4})$, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增,

$\therefore x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, 函数 $F(x)_{\min} = F(x_0) < F(1) = 1 - \sin 1 - \cos 1 < 0$,

$F(e^{-2}) = e^{-2} - \sin e^{-2} - \cos e^{-2} + 2 > 0$, $F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} - \ln \frac{3\pi}{4} > 0$,

故 $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, $F(x) = f(x) - \ln x$ 有两个零点,

当 $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ 时,

$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$, $F(x) = x - \sin x - \cos x - \ln x = x - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \ln x \geq x - \ln x$,

对于函数 $\varphi(x) = x - \ln x$, 则 $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$, 又 $\varphi(1) = 0$,

$\therefore x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, 即 $F(x) > 0$, 此时函数 $F(x) = f(x) - \ln x$ 没有零点,

当 $x \in \left[\frac{7\pi}{4}, +\infty\right)$ 时, $F(x) = x - \sin x - \cos x - \ln x = x - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \ln x \geq x - \sqrt{2} - \ln x$,

由上可知 $F(x) \geq \frac{7\pi}{4} - \sqrt{2} - \ln \frac{7\pi}{4} > 0$, 故当 $x \in \left[\frac{7\pi}{4}, +\infty\right)$ 时, 函数 $F(x) = f(x) - \ln x$ 没有零点,

综上, 函数 $F(x) = f(x) - \ln x$ 有两个零点.

【点睛】

利用导数研究零点问题:

(1) 确定零点的个数问题: 可利用数形结合的办法判断交点个数, 如果函数较为复杂, 可用导数知识确定极值点和单调区间从而确定其大致图象;

(2) 方程的有解问题就是判断是否存在零点的问题, 可参变分离, 转化为求函数的值域问题处理. 可以通过构造函数的方法, 把问题转化为研究构造的函数的零点问题;

(3) 利用导数研究函数零点或方程根, 通常有三种思路: ①利用最值或极值研究; ②利用数形结合思想研究; ③构造辅助函数研究.

【方法技巧与总结】

1. 因此, 在求函数极值问题中, 一定要检验方程 $f'(x) = 0$ 根左右的符号, 更要注意变号后极大值与极小值是否与已知有矛盾.

2. 原函数出现极值时, 导函数正处于零点, 归纳起来一句话: 原极导零. 这个零点必须穿越 x 轴, 否则不是极值点. 判断口诀: 从左往右找穿越 (导函数与 x 轴的交点); 上坡低头找极小, 下坡抬头找极大.

题型二: 根据极值、极值点求参数

例 6. (2023·四川·绵阳中学实验学校模拟预测 (文)) 若函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10, 则 $a-b =$ ()

A. 6

B. -15

C. -6 或 15

D. 6 或 -15

答案: B

【解析】

分析:

先求出函数的导函数 $f'(x)$, 然后根据在 $x=1$ 时 $f(x)$ 有极值 10, 得到 $\begin{cases} 3-2a-b=0 \\ 1-a-b+a^2=0 \end{cases}$

，求出满足条件的 a, b ，然后验证在 $x=1$ 时 $f(x)$ 是否有极值，即可求出 $a-b$

【详解】

$$Q \quad f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2, \therefore f'(x) = 3x^2 - 2ax - b$$

又 $x=1$ 时 $f(x)$ 有极值 10

$$\therefore \begin{cases} 3-2a-b=0 \\ 1-a-b+a^2=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-4 \\ b=11 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$$

当 $a=3, b=-3$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$

此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无极值, 不符合题意

经检验, $a=-4, b=11$ 时满足题意

$$\therefore a-b = -15$$

故选: B

例 7. (2023·江苏南通·模拟预测) 已知函数 $f(x) = (x-a)(x-b)e^x$ 在 $x=a$ 处取极小值, 且 $f(x)$ 的极大值为 4, 则 $b =$ ()

A. -1

B. 2

C. -3

D. 4

答案: B

【解析】

分析:

对 $f(x)$ 求导, 由函数 $f(x) = (x-a)(x-b)e^x$ 在 $x=a$ 处取极小值, 所以 $f'(a) = 0$, 所以 $a=b$, $\therefore f(x) = (x-a)^2 e^x$, 对 $f(x)$ 求导, 求单调区间及极大值, 由 $f(x)$ 的极大值为 4, 列方程得解.

【详解】

解: $f(x) = (x-a)(x-b)e^x = (x^2 - ax - bx + ab)e^x$, 所以

$$f'(x) = (2x - a - b)e^x + (x^2 - ax - bx + ab)e^x = e^x [x^2 + (2-a-b)x + ab - a - b]$$

因为函数 $f(x) = (x-a)(x-b)e^x$ 在 $x=a$ 处取极小值, 所以

$$f'(a) = e^a [a^2 + (2-a-b)a + ab - a - b] = e^a (a-b) = 0, \text{ 所以 } a=b, \therefore f(x) = (x-a)^2 e^x,$$

$$f'(x) = e^x [x^2 + (2-2a)x + a^2 - 2a] = e^x (x-a)[x - (a-2)],$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x=a$ 或 $x=a-2$, 当 $x \in (-\infty, a-2)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, a-2)$ 单调递增, 当 $x \in (a-2, a)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(a-2, a)$ 单调递减, 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=a-2$ 处有极大值为

$$f(a-2) = 4e^{a-2} = 4, \text{ 解得 } a=2, \text{ 所以 } b=2.$$

故选: B

例 8. (2023·四川绵阳·二模(文)) 若 $x=2$ 是函数 $f(x) = x^2 + 2(a-2)x - 4a \ln x$ 的极大值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-2, +\infty)$

C. $(2, +\infty)$

D. $(-2, 2)$

答案: A

【解析】

分析:

求出 $f'(x)$, 分 $a \geq 0$, $a < -2$, $-2 < a < 0$, $a = -2$ 分别讨论出函数的单调区间, 从而可得其极值情况, 从而得出答案.

【详解】

$$f'(x) = 2x + 2(a-2) - \frac{4a}{x} = \frac{2x^2 + 2(a-2)x - 4a}{x} = \frac{2(x-2)(x+a)}{x}, \quad (x > 0)$$

若 $a \geq 0$ 时, 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$;

则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减; 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 与条件不符合, 故满足题意.

当 $a < -2$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 可得 $0 < x < 2$ 或 $x > -a$; 由 $f'(x) < 0$ 可得 $2 < x < -a$

所以在 $(0, 2)$ 上单调递增; 在 $(2, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取得极大值, 满足条件.

当 $-2 < a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 可得 $0 < x < -a$ 或 $x > 2$; 由 $f'(x) < 0$ 可得 $-a < x < 2$

所以在 $(0, -a)$ 上单调递增; 在 $(-a, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 不满足条件.

当 $a = -2$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

此时 $f(x)$ 无极值.

综上所述: $a < -2$ 满足条件

故选: A

例 9. (2023·河南·模拟预测 (文)) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$ 的极值为 $-\frac{1}{2}$, 则 $a =$ ()

- A. e B. $\frac{1}{2}e$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

答案: C

【解析】

分析:

求导得到导函数, 考虑 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况, 根据函数的单调性得到极值, 计算得到答案.

【详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 无极值, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, $f'(x) = -\frac{2a\left(x^2 - \frac{1}{2a}\right)}{x}$,

当 $x \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in \left(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty\right)$ 上单调递减,

则 $f(x)_{\text{极大值}} = f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2a) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, 解得 $a = \frac{1}{2}$.

故选: C.

例 10. (2023·河南·高三阶段练习 (文)) 若函数 $f(x) = (x^2 + ax + 2) \cdot e^x$ 在 \mathbb{R} 上无极值, 则实数 a 的取值范围 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
C. $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ D. $[-2, 2]$

答案: D

【解析】

分析:

求 $f'(x) = [x^2 + (a+2)x + a + 2] \cdot e^x$, 由分析可得 $y = x^2 + (a+2)x + a + 2 \geq 0$ 恒成立, 利用 $\Delta \leq 0$ 即可求得实数 a 的取值范围.

【详解】

由 $f(x) = (x^2 + ax + 2) \cdot e^x$ 可得

$$f'(x) = (2x+a) \cdot e^x + (x^2+ax+2) \cdot e^x = [x^2 + (a+2)x + a+2] \cdot e^x,$$

$e^x > 0$ 恒成立, $y = x^2 + (a+2)x + a+2$ 为开口向上的抛物线,

若函数 $f(x) = (x^2+ax+2) \cdot e^x$ 在 \mathbb{R} 上无极值,

则 $y = x^2 + (a+2)x + a+2 \geq 0$ 恒成立, 所以 $\Delta = (a+2)^2 - 4(a+2) \leq 0$,

解得: $-2 \leq a \leq 2$,

所以实数 a 的取值范围为 $[-2, 2]$,

故选: D.

例 11. (2023·四川省南充高级中学高三阶段练习(理)) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3mx^2 + nx + m^2$

在 $x = -1$ 处取得极值 0, 则 $m+n =$ ()

A. 2

B. 7

C. 2 或 7

D. 3 或 9

答案: B

【解析】

分析:

求导得到导函数, 根据题意得到 $f'(-1) = 0$ 且 $f(-1) = 0$, 解得答案并验证即可.

【详解】

$$f(x) = x^3 - 3mx^2 + nx + m^2, \quad f'(x) = 3x^2 - 6mx + n,$$

根据题意: $f'(-1) = 3 + 6m + n = 0$, $f(-1) = -1 - 3m - n + m^2 = 0$,

$$\text{解得} \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = -2 \\ n = 9 \end{cases},$$

当 $\begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases}$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0$, 函数单调递增, 无极值点, 舍去.

当 $\begin{cases} m = -2 \\ n = 9 \end{cases}$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+4)$,

在 $x \in (-\infty, -4)$ 和 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数单调递增;

在 $x \in (-4, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数单调递减, 故函数在 $x = -1$ 出有极小值, 满足条件.

综上所述: $m+n = 9 - 2 = 7$.

故选: B.

例 12. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - a(x - \ln x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值, 则实数 a

的取值范围是 ()

A. $(-\infty, e)$

B. $(0, e)$

C. $(e, +\infty)$

D. $[e, +\infty)$

答案: C

【解析】

分析:

由可导函数在开区间内有极值的充要条件即可作答.

【详解】

$$\text{由 } f(x) = \frac{e^x}{x} - a(x - \ln x) \text{ 得, } f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) - a \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{e^x}{x} - a \right),$$

因函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - a(x - \ln x)$ 在 $(0, 1)$ 内有极值, 则 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{e^x}{x}$ 有解,

即在 $x \in (0, 1)$ 时, 函数 $g(x) = \frac{e^x}{x}$ 与直线 $y = a$ 有公共点,

而 $g'(x) = \frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) < 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\forall x \in (0, 1), g(x) > g(1) = e$, 则 $a > e$, 显

然在 $a = \frac{e^x}{x}$ 零点左右两侧 $f'(x)$ 异号,

所以实数 a 的取值范围是 $(e, +\infty)$.

故选: C

【点睛】

结论点睛: 可导函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$, 且在 x_0 左侧与右侧 $f'(x)$ 的符号不同.

例 13. (2023·陕西·西北工业大学附属中学模拟预测(理)) 已知函数

$f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$, 若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{2}{3}]$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-1, +\infty)$

答案: B

【解析】

分析:

根据导函数的正负, 对 a 分类讨论, 判断极值点, 即可求解.

【详解】

由 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$ 得 $f'(x)=(ax-1)(x-2)e^x$, 令

$$f'(x)=(ax-1)(x-2)e^x > 0 \Rightarrow (ax-1)(x-2) > 0,$$

若 $a < 0$, 则 $(ax-1)(x-2) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < x < 2$, 此时在 $\frac{1}{a} < x < 2$ 单调递增, 在 $x > 2, x < \frac{1}{a}$ 单调递减, 这与 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点矛盾, 故舍去.

若 $a = 0$, 可知 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 故不符合题意.

若 $\frac{1}{2} > a > 0$, $(ax-1)(x-2) > 0 \Rightarrow x < 2, x > \frac{1}{a}$, 此时 $f(x)$ 在 $x < 2, x > \frac{1}{a}$ 单调递增, 在 $2 < x < \frac{1}{a}$ 单调递减, 可知 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 故不符合题意.

当 $a > \frac{1}{2}$, $(ax-1)(x-2) > 0 \Rightarrow x > 2, x < \frac{1}{a}$, 此时 $f(x)$ 在 $x > 2, x < \frac{1}{a}$ 单调递增, 在 $2 > x > \frac{1}{a}$ 单调递减, 可知 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 符合题意.

若 $a = \frac{1}{2}$, $f(x)$ 在定义域内单调递增, 无极值, 不符合题意, 舍去.

综上所述: $a > \frac{1}{2}$

故选: B

例 14. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + x$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 3)$ 上既有极大值又有极小值, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(2, \frac{5}{2})$ D. $(2, \frac{10}{3})$

答案: C

【解析】

分析:

把题意转化为 $f'(x)=0$ 在 $(\frac{1}{2}, 3)$ 内应有两个不同的异号实数根, 利用零点存在定理列不等式组即可求得.

【详解】

函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + x$, 导函数 $f'(x) = x^2 - ax + 1$.

因为 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 3)$ 上既有极大值又有极小值, 所以 $f'(x)=0$ 在 $(\frac{1}{2}, 3)$

内应有两个不同的异号实数根.

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \\ f'(3) > 0 \\ \frac{1}{2} < \frac{a}{2} < 3 \\ f'\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \end{cases}, \text{解得: } 2 < a < \frac{5}{2}, \text{实数 } a \text{ 的取值范围 } \left(2, \frac{5}{2}\right).$$

故选: C.

例 15. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 + 2(m-1)x$ 在 $(0,4)$ 上无极值, 则 $m =$ _____.

答案: 3

【解析】

分析:

把题意转化为 $f'(x) = x^2 - (m+1)x + 2(m-1)$ 在 $(0,4)$ 上恒有 $f'(x) \geq 0$, 对 m 分类讨论, 求出 m 的范围.

【详解】

函数 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上无极值即导函数 $f'(x)$ 在 $(0,4)$ 上无根.

$f'(x) = x^2 - (m+1)x + 2(m-1)$ 在 $(0,4)$ 上恒有 $f'(x) \geq 0$ ①;

而 $f'(x) = x^2 - (m+1)x + 2(m-1) = (x-2)[x-(m+1)]$,

当 $m-1 > 2$ 时, ①式解为 $x \leq 2$ 或 $x \geq m-1$; 显然 $x \in (0,4)$ 时, ①式不成立;

当 $m-1 < 2$ 时, ①式解为 $x \leq m-1$ 或 $x > 2$; 显然 $x \in (0,4)$ 时, ①式不成立;

当 $m-1 = 2$ 时, ①式解为 $x = 2$, $m = 3$.

故答案为: 3.

例 16. (2023·吉林长春·模拟预测(文)) 已知函数 $f(x) = ax + \sin x$, $x \in (0, \pi)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 过 $(0,1)$ 做函数 $f(x)$ 的切线, 求切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 存在极值, 求极值的取值范围.

答案: (1) $y = x + 1$

(2) $(0, \pi)$

【解析】

分析:

(1) 设切点, 再根据导数的几何意义求解即可;

(2) 求导分析导函数为 0 时的情况, 设极值点为 x_0 得到 $a = -\cos x_0$, 代入极值再构造函数 $h(x) = -x \cos x + \sin x$, 求导分析单调性与取值范围即可

(1)

由题, 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x + \sin x$, $f'(x) = 1 + \cos x$,

设切点为 $(x_0, x_0 + \sin x_0)$, 则 $f'(x_0) = 1 + \cos x_0$,

故切线方程为 $y - x_0 - \sin x_0 = (1 + \cos x_0)(x - x_0)$,

又切线过 $(0,1)$, 故 $1 - x_0 - \sin x_0 = -x_0(1 + \cos x_0)$, 即 $\sin x_0 - x_0 \cos x_0 - 1 = 0$,

设 $g(x) = \sin x - x \cos x - 1$, $x \in (0, \pi)$, 则 $g'(x) = x \sin x > 0$,

故 $g(x)$ 为增函数. 又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 1 = 0$,

故 $\sin x_0 - x_0 \cos x_0 - 1 = 0$ 有唯一解 $x_0 = \frac{\pi}{2}$,

故切点为 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right)$ ，斜率为1，故切线方程为 $y-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=x-\frac{\pi}{2}$ ，即 $y=x+1$ ；

(2)

因为 $f'(x)=a+\cos x$ ， $x\in(0,\pi)$ 为减函数，故若函数 $f(x)$ 存在极值，

则 $f'(x)=0$ 在区间 $x\in(0,\pi)$ 上有唯一零点设为 x_0 ，

则 $a+\cos x_0=0$ ，即 $a=-\cos x_0$ ，

故极值 $f(x_0)=ax_0+\sin x_0=-x_0\cos x_0+\sin x_0$ ，

设 $h(x)=-x\cos x+\sin x$ ， $x\in(0,\pi)$ ，则 $h'(x)=x\sin x>0$ ，

故 $h(x)$ 为增函数，故 $h(0)<h(x)<h(\pi)$ ，故 $0<h(x)<\pi$ ，即 $f(x_0)\in(0,\pi)$ ，

故极值的取值范围 $(0,\pi)$

【点睛】

本题主要考查了过点的切线问题，同时也考查了利用导数研究函数的极值问题，需要根据题意设极值点，得到极值点满足的关系，再代入极值构造函数分析，属于难题

例 17. (2023·北京市第十二中学三模) 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$ ， $a\in\mathbf{R}$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 设函数 $g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$ ，若 $g(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上存在极值，求 a 的取值范围。

答案：(1) 减区间为 $(0,1)$ ，增区间为 $(1,+\infty)$ 。

(2) $\left(0, \frac{e}{2}\right)$

【解析】

分析：

(1) 当 $a=1$ 时，求得 $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$ ，结合导数的符号，即可求得函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求得 $g'(x)=\frac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$ ，设 $h(x)=2x-x\ln x-2a$ ，得到 $h'(x)=1-\ln x$ ，求得 $h(x)$

的单调性，结合 $h(1)=2-2a$ ， $h(e)=e-2a$ ， $h(e^2)=-2a$ ，根据题意，列出不等式组 $\begin{cases} h(e)>0 \\ h(1)<0 \end{cases}$

或 $\begin{cases} h(1)\geq 0 \\ h(e^2)<0 \end{cases}$ ，即可求解。

(1)

解：当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ ，其定义域为 $(0,+\infty)$ ，

可得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ ，

当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增；

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$ ，单调递增区间为 $(1,+\infty)$ 。

(2)

解：由 $g(x)=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$ ， $x\in[1,e^2]$ ，

可得 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}=\frac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$ ，

设 $h(x)=2x-x\ln x-2a$ ，则 $h'(x)=2-(1+\ln x)=1-\ln x$ ，

令 $h'(x)=0$ ，即 $1-\ln x=0$ ，解得 $x=e$ ，

当 $x \in [1, e]$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (e, e^2]$ 时, $h'(x) < 0$,
 所以 $h(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递增, 在区间 $(e, e^2]$ 上, 单调递减,
 且 $h(1) = 2 - 2a, h(e) = e - 2a, h(e^2) = -2a$,
 显然 $h(1) > h(e^2)$,

若 $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上存在极值, 则满足 $\begin{cases} h(e) > 0 \\ h(1) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} h(1) \geq 0 \\ h(e^2) < 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a < \frac{e}{2}$,

综上所述, 当 $0 < a < \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上存在极值,

所以实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{e}{2})$.

例 18. (2023·天津·耀华中学二模) 已知函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x} + \ln x - x (a > 0)$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极小值点 x_1, x_2 , 求实数 a 的取值范围.

答案: (1) 递减区间为 $(0, 1)$, 递增区间为 $(1, +\infty)$

(2) $(0, \frac{1}{e})$

【解析】

分析:

(1) 当 $a = 1$ 时, 求得 $f'(x) = \frac{(x-1)(e^x - x)}{x^2}$, 令 $m(x) = e^x - x$, 利用导数求得 $m(x) > 0$, 进而求得函数的单调区间;

(2) 求得 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)(a - \frac{x}{e^x})}{x^2}$, 令 $u(x) = \frac{x}{e^x}$, 结合单调性得到 $u(x) \leq \frac{1}{e}$, 进而得到

$0 < \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$, 分 $a \geq \frac{1}{e}$ 和 $0 < a < \frac{1}{e}$, 两种情况分类讨论, 结合单调性与极值点的概念, 即可求解.

(1)

解: 当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \ln x - x$,

可得 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = \frac{(x-1)(e^x - x)}{x^2}$,

令 $m(x) = e^x - x, x \in (0, +\infty)$, 可得 $m'(x) = e^x - 1 > 0$, 所以函数 $m(x)$ 单调递增,

因为 $m(x) > m(0) = 1$, 所以 $m(x) > 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

(2)

解: 由函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x} + \ln x - x, x \in (0, +\infty)$,

可得 $f'(x) = \frac{(ae^x - x)(x-1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)(a - \frac{x}{e^x})}{x^2}, x > 0$,

令 $u(x) = \frac{x}{e^x}$, 可得 $u'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

所以函数 $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $u(x) \leq \frac{1}{e}$,

当 $x > 0$ 时, 可得 $e^x > 1$, 所以 $0 < \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$,

① 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $a - \frac{x}{e^x} \geq 0$, 此时当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = ae - 1$, 无极大值;

② 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $u(a) = \frac{a}{e^a} < \frac{a}{e^0} = a, u(1) = \frac{1}{e} > a$,

又由 $u(x)$ 在 $(a, 1)$ 上单调递增, 所以 $f'(x)$ 在 $(a, 1)$ 上有唯一的零点 x_1 , 且 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = a$,

因为当 $x > e$ 时, 令 $g(x) = 2 \ln x - x$, 可得 $g'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} < 0$,

又因为 $g(e) = 2 - e < 0$, 所以 $g(x) < 0$, 即 $2 \ln x < x$, 所以 $2 \ln \frac{1}{a} < \frac{1}{a}$,

所以 $u(\ln \frac{1}{a^2}) = \frac{\ln \frac{1}{a^2}}{e^{\frac{1}{a^2}}} = a \cdot \frac{2 \ln \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} < a$, $u(1) = \frac{1}{e} > a$,

因为 $u(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, \ln \frac{1}{a^2})$ 上有唯一的零点 x_2 , 且 $\frac{x_2}{e^{x_2}} = a$,

所以当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_1, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 有两个极小值点, 故实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{e})$.

例 19. (2023·河北·石家庄二中模拟预测) 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$.

(1) 当 $a = 0, b = 1$ 时, 证明: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) < \ln x$;

(2) 若 $b = a^2$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在极大值, 求 a 的取值范围.

答案: (1) 证明见解析

(2) $(-6, -3) \cup (1, 2)$

【解析】

分析:

(1) 利用导数求出 $f(x)$ 得出 $f(x) < f(1) = 0$, 根据 $g(x) = \ln x$ 的单调性得 $g(x) > \ln 1$, 可得答案;

(2) 求出 $f'(x)$, 分 $a = 0$ 、 $a > 0$ 、 $a < 0$ 讨论 $f(x)$ 单调性可得答案.

(1)

由题意得 $f(x) = -x^3 + x$, 则 $f'(x) = -3x^2 + 1$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上是减函数, $\therefore f(x) < f(1) = 0$, 设 $g(x) = \ln x$, $g(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore g(x) > \ln 1 = 0$, \therefore 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) < \ln x$.

(2)

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/226040032100010135>