2024－2025 学年度第一学期期中考试

高三数学

2024.11

本试卷共 4 页，19 题.全卷满分 150 分.考试用时 120 分钟

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将条形码粘贴在答题卡指定位置上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，请将答题卡上交.

一、单项选择题：本大题共 8 小题.每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知 O 为坐标原点，点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,-\sin\beta)$，$C(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$D(1,0)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　）

A. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$　　B. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$　　C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$　　D. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据数量积的坐标运算逐一求解，即可求解.

【详解】由题意可得 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,-\sin\beta)$，$\overrightarrow{OC}=(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，

$\overrightarrow{OD}=(1,0)$，

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\cos(\alpha+\beta)$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos\beta$，

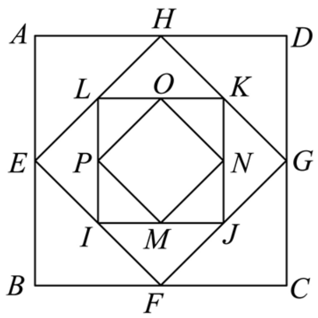
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\cos\alpha$，

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos[(\alpha+\beta)+\beta]=\cos(\alpha+2\beta)$，

因此$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，

故选：A

2. 如图，正方形$ABCD$的边长为a，取正方形$ABCD$各边的中点E，F，G，H，作第2个正方形$EFGH$，然后再取正方形$EFGH$各边的中点I，J，K，L，作第3个正方形$IJKL$，依此方法一直继续下去.则从正方形$ABCD$开始，连续5个正方形面积之和为31，则$a=$（　）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据条件，分别求得前5个正方形的面积，再结合条件，即可求解.

【详解】由题意得，第一个正方形$ABCD$边长为a，面积为a^2，

第二个正方形$EFGH$边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$，面积为$\frac{1}{2}a^2$，

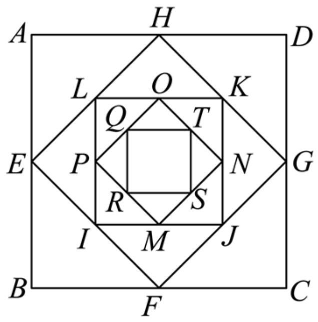
第三个正方形$IJKL$边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{2}a$，面积为$\frac{1}{4}a^2$，

第四个正方形$MNOP$边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，面积为$\frac{1}{8}a^2$，

第五个正方形$QRST$边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}a=\frac{1}{4}a$，面积为$\frac{1}{16}a^2$，

由题有$a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{16}a^2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})a^2$

$=\frac{[1-(\frac{1}{2})^5]a^2}{1-\frac{1}{2}}=31$，得到$a^2=16$，解得$a=4$，



故选：D.

3. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2$，若 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{3}$　　　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量垂直及数量积运算律、定义可得 $1-2\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0$，即可求夹角.

【详解】由题设 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，而 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，

所以 $1-2\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0\Rightarrow\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{1}{2}$，$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in[0,\pi]$，

所以 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$.

故选：B

4. 设集合 $A=\left\{x\middle|\ x^2-3x+2\le 0\right\},B=\{x|\ a<x<a+2\}$，则 $a>0$ 是 $A\subseteq B$ 的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式得 A，根据集合的基本关系确定 a 的范围结合充分、必要条件的定义判定即可.

【详解】由集合 $x^2-3x+2\le 0\Rightarrow x\in\left[1,2\right]\Rightarrow A=\left[1,2\right]$，

又 $B=\left(a,a+2\right),A\subseteq B$，所以 $\begin{cases}1>a\\2<a+2\end{cases}\Rightarrow a\in\left(0,1\right)$，

所以 $a>0$ 是 $A\subseteq B$ 的必要不充分条件.

故选：B.

5. 若正数 x,y 满足 $x^2-2xy+2=0$，则 $x+y$ 的最小值是（　　）

A. $\sqrt{6}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可得 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$，利用基本不等式求解.

【详解】由 $x^2-2xy+2=0$ 可得 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$，

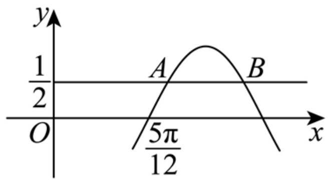
$\therefore x+y=x+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=\frac{3x}{2}+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{x}}=\sqrt{6}$，

当且仅当 $\frac{3x}{2}=\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，等号成立，此时 $y=\frac{2\sqrt{6}}{3}>0$ 符合题意.

所以 $x+y$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

故选：A.

6. 如图，已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$，点 A， B 是直线 $y=\frac{1}{2}$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象的两个交点，若 $\left|AB\right|=\frac{\pi}{3}$，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$（　）



A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据条件，利用 $y=\cos x$ 的图象与性质，可求得 ω，结合图象，利用 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0$，可求得 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，即可求解.

【详解】设 $A(x_1,\frac{1}{2}),B(x_2,\frac{1}{2})$，由 $\left|AB\right|=\frac{\pi}{3}$，得到 $x_2-x_1=\frac{\pi}{3}$，

当 $\omega>0$，由 $\cos\left(\omega x+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，得到 $\omega x_1+\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z,\omega x_2+\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

所以 $\omega(x_2-x_1)=\frac{\pi}{3}\omega=\frac{2\pi}{3}$，得到 $\omega=2$，

又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$，结合图象有 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

得到 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，所以 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

当 $\omega<0$ 时，$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)=\cos\left(-\omega x-\varphi\right)$，由 $\cos\left(-\omega x-\varphi\right)=\frac{1}{2}$，

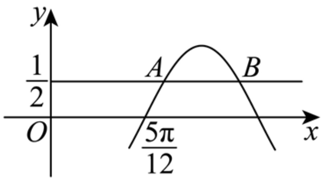
得到 $-\omega x_1-\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z,-\omega x_2-\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

所以 $\omega(x_2-x_1)=\frac{\pi}{3}\omega=-\frac{2\pi}{3}$，得到 $\omega=-2$，

又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\varphi\right)=0$，结合图象有 $\frac{5\pi}{6}-\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

得到 $-\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，所以 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

综上，$f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，



故选：C.

7. 2024 年 1 月 1 日，第五次全国经济普查正式启动.甲、乙、丙、丁、戊 5 名普查员分别去城东、城南、城西、城北四个小区进行数据采集，每个小区至少去一名普查员，若甲不去城东，则不同的安排方法共有（　）

A. 36 种　　B. 60 种　　C. 96 种　　D. 180 种

【答案】D

【解析】

【分析】按城东去 1 人和 2 人分类，再结合分组分配列式计算即得.

【详解】城东去 1 人，不同安排方法为 $C_4^1C_4^2A_3^3=144$（种）；

城东去 2 人，不同安排方法是 $C_4^2A_3^3=36$（种），

所以不同的安排方法共有 $144+36=180$（种）.

故选：D

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(1\right)=1$，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}f\left(5x\right)$，当 $0\le x_1<x_2\le 1$ 时，$f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$，则 $f\left(10\right)=$（　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}$ 和 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，再由当 $0\le x_1<x_2\le 1$ 时，$f(x_1)\le f(x_2)$，可得 $x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}$，再利用条件 $f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$ 将 10 逐步转化到 $[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ 内，代入求解即可.

【详解】由 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}f\left(5x\right)$ 可得 $f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$ 中令 $x=1$ 可得 $f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}$，

又因为 $0\le x_1<x_2\le 1$ 时，$f(x_1)\le f(x_2)$，又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

所以 $x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}$，

由 $f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$ 可得 $f\left(10\right)=2f\left(2\right)=4f\left(\frac{2}{5}\right)$，

因为 $\frac{2}{5}\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$，所以 $f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{2}$，

所以 $f\left(10\right)=2f\left(2\right)=4f\left(\frac{2}{5}\right)=4\times\frac{1}{2}=2$，

故选：A

【点睛】关键点点睛：根据 $f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2}$ 和 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，再由当 $0\le x_1<x_2\le 1$ 时，$f(x_1)\le f(x_2)$，可得 $x\in[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}$.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知二项式 $\left(x-\frac{1}{y}\right)^6$，则其展开式中（　）

A. x^4y^{-2} 的系数为 15　　B. 各项系数之和为 1

C. 二项式系数最大项是第 3 项　　　　D. 系数最大项是第 3 项或第 5 项

【答案】AD

【解析】

【分析】根据二项展开式的通项公式计算后可判断 ACD 的正误，利用赋值法可求各项系数之和，故可判断 B 的正误.

【详解】$\left(x-\frac{1}{y}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{y}\right)^r=(-1)^r\mathrm{C}_6^r x^{6-r}y^{-r}$，

对于 A，取 $6-r=4$，则 $r=2$，故 x^4y^{-2} 的系数为 $(-1)^2\mathrm{C}_6^2=15$，故 A 正确；

对于 B，因为 $\left(x-\frac{1}{y}\right)^6=\sum_{r=0}^{6}(-1)^r\mathrm{C}_6^r x^{6-r}y^{-r}$，

令 $x=y=1$，则各项系数之和为 $\left(1-\frac{1}{1}\right)^6=0$，故 B 错误；

对于 CD，由展开式的通项可得展开式中各项的系数依次为：$1,-6,15,-20,15,-6,1$，

故二项式系数最大项是第 3 项或第 5 项，故 C 错误，D 正确；

故选：AD.

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n+1$，则（　　）

A. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列　　　　B. $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

C. $\sum_{i=1}^{2024}\frac{1}{a_i}=\frac{4048}{2025}$　　　　D. $a_n\geq\ln(n!)+n$

【答案】BCD

【解析】

【分析】选项 A，根据条件，利用等差数列的定义，即可判断选项的正误；选项 B，根据条件，利用累加法，即可判断选项的正误；选项 C，由选项 B 可得 $\frac{1}{a_n}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，再利用裂项相消法，即可判断选项的正误；选项 D，构造函数 $f(x)=\ln(x+1)-x(x>0)$，利用导数与函数单调性间的关系，得到 $\ln(x+1)<x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，从而有 $\ln(k+1)<k,k\in\mathrm{N}^*$，再利用数学归纳法，即可判断选项的正误.

【详解】对于选项 A，因为 $a_{n+1}=a_n+n+1$，则 $a_{n+1}-a_n=n+1$ 不为常数，由等差数列的定义可知，数列

$\{a_n\}$不为等差数列，故选项 A 错误，

对于选项 B，由 $a_{n+1}=a_n+n+1$，得到 $a_{n+1}-a_n=n+1$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=n+(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

又当 $n=1$ 时，$a_1=1$，满足 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，故选项 B 正确，

对于选项 C，由选项 B 知 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，得到 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2024}\dfrac{1}{a_i}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2024}}=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2024}-\dfrac{1}{2025})=\dfrac{4048}{2025}$，故选项 C 正确，

对于选项 D，由选项 B 知，$a_n\geq\ln(n!)+n$，即 $\dfrac{n(n+1)}{2}\geq\ln(n!)+n$，整理得到 $\dfrac{n(n-1)}{2}\geq\ln(n!)$，

下面用数学归纳法证明 $\dfrac{n(n-1)}{2}\geq\ln(n!)$ 成立，

当 $n=1$，不等式左边等于 0，不等式右边等于 0，所以 $n=1$ 时，等式成立，

假设 $n=k,k\in\mathrm{N}^*$ 时，$\dfrac{k(k-1)}{2}\geq\ln(k!)$ 成立，

则 $n=k+1,k\in\mathrm{N}^*$ 时，因为 $\ln[(k+1)!]=\ln(k+1)+\ln(k!)<\ln(k+1)+\dfrac{k(k-1)}{2}$，

令 $f(x)=\ln(x+1)-x(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}<0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒立，

即 $f(x)=\ln(x+1)-x(x>0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)<f(0)=\ln(0+1)-0=0$，得到 $\ln(x+1)<x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\ln(k+1)+\dfrac{k(k-1)}{2}<k+\dfrac{k(k-1)}{2}=\dfrac{k(k+1)}{2}$，

即 $n=k+1,k\in\mathrm{N}^*$ 时，$\dfrac{k(k+1)}{2}\geq\ln[(k+1)!]$ 也成立，

综上，$a_n\geq\ln(n!)+n$ 对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$ 成立，故选项 D 正确，

故选：BCD.

【点睛】本题的关键在于选项 D，通过构造函数 $f(x)=\ln(x+1)-x(x>0)$，利用导数与函数单调性间的关系得 $\ln(x+1)<x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，从而有 $\ln(k+1)<k,k\in\mathrm{N}^*$，再利用数学归纳法来证明即可.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a=2$，$c=\sqrt{5}$，已知点 O 是 $\triangle ABC$

所在平面内一点，点 P 在 BC 上，点 Q 为 AC 中点，$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则（　）

A. 若 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $\triangle ABC$ 的面积为 2

B. 若 $\overrightarrow{CA}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影向量为 $\overrightarrow{CB}$，则 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

C. 若点 P 为 BC 中点，则 $2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\vec{0}$

D. 若 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=8$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据数量积的运算律可判断 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，故可判断 AD 的正误，结合投影向量的性质可判断 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故可判断 B 的正误，根据向量的线性运算可判断 C 的正误.

【详解】对于 A，因为 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，故 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=0$，

所以 $\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2$ 即 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 即 $b=c=2$，

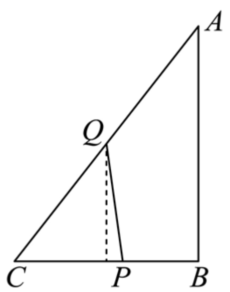
故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5-1}=2$，

故 A 正确；

对于 B，若 $\overrightarrow{CA}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影向量为 $\overrightarrow{CB}$，则 $AB\perp BC$，

当 $PQ\perp BC$ 时 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 取最小值，此时 $PQ//AB$，故 Q 为 BC 的中点，故此时 $\left|PQ\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

故 B 错误；



对于 C，因为 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+2\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$，

则 $2\overrightarrow{OQ}+4\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ 即 $\overrightarrow{OQ}+2\overrightarrow{OP}=\vec{0}$，故 C 正确；