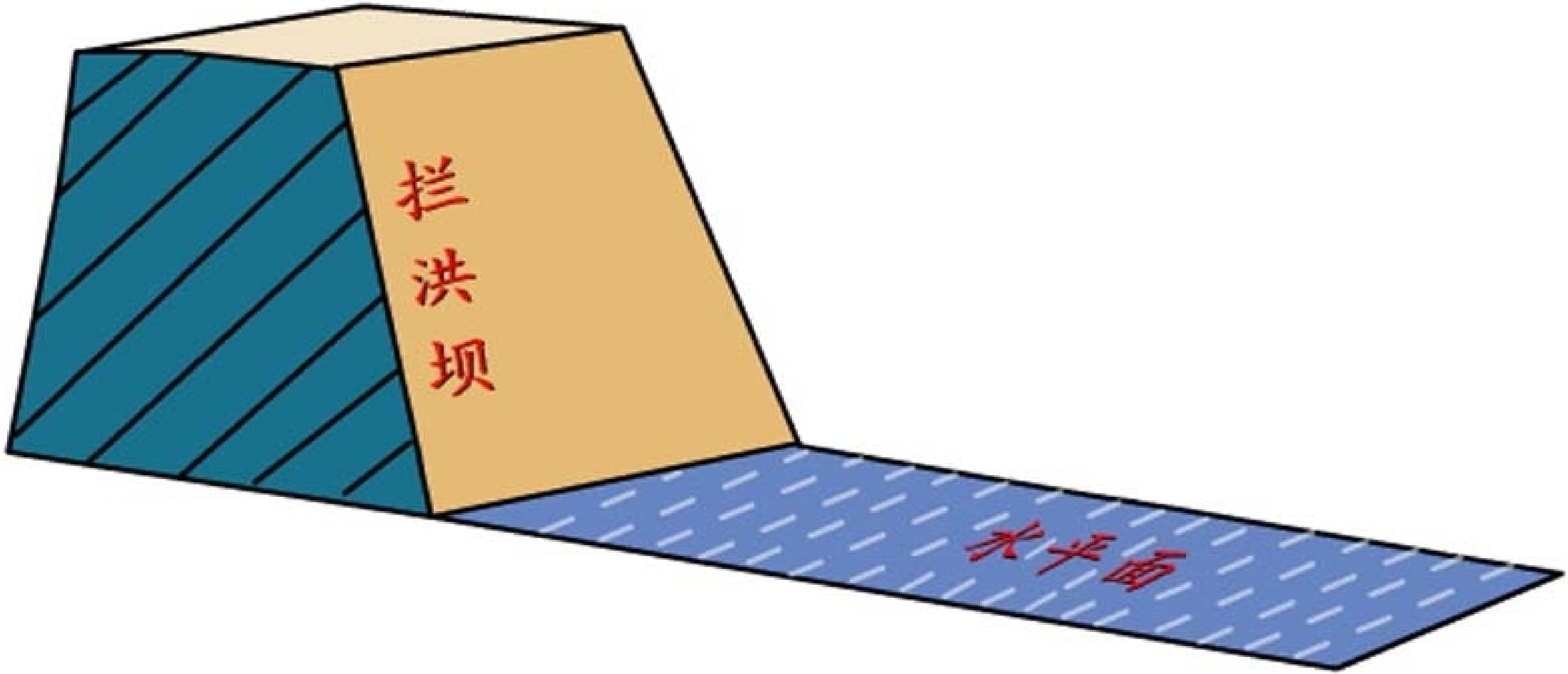
2.3.2《平面与平面垂直的判定》

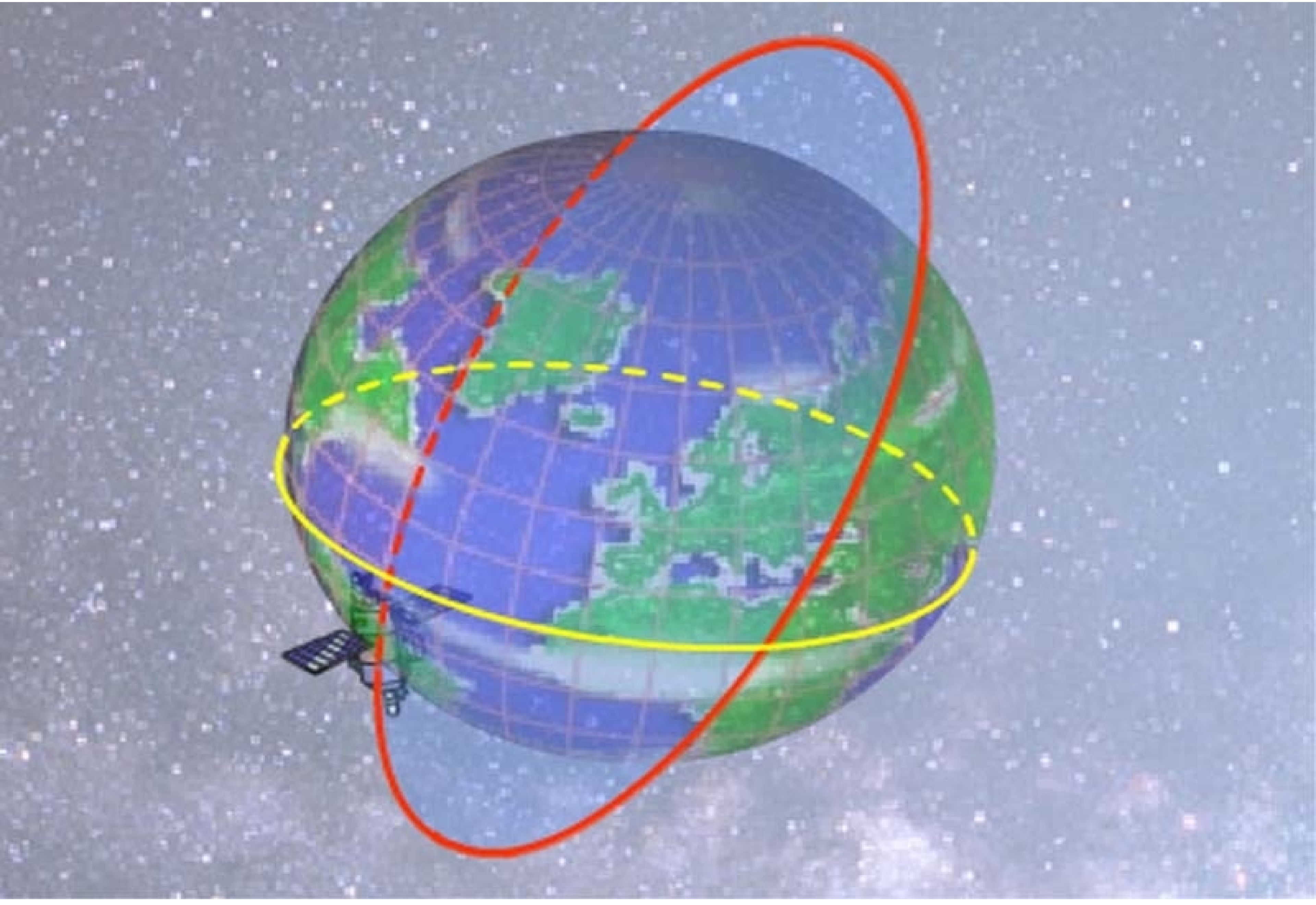
教学目标

1. 理解二面角及其平面角的概念, 能确认图形中的角是否为二面角的平面角.

2. 掌握二面角的平面角的一般作法, 会求简单的二面角的平面角:

3. 掌握两个平面互相垂直的概念， 能用定义和定理判定面面垂直。


拦
洪
坝
水平面



创设情景，揭示课题

问题1：平面几何中“角”是怎样定义的？

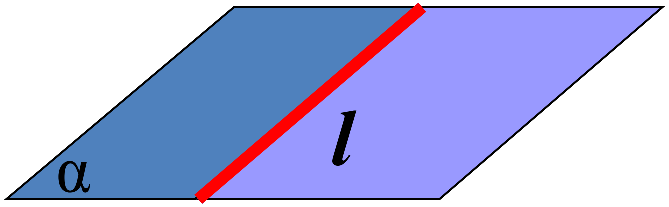
问题2：在立体几何中，“异面直线所成的角”、“直线和平面所成的角”又是怎样定义的？它们有什么共同的特征？

问题：在生产实践中，有许多问题要涉及到两个平面相交所成的角的情形，你能举出这个问题的一些例子吗？

这样的角有何特点，该如何表示呢？

一、　二面角及二面角的平面角

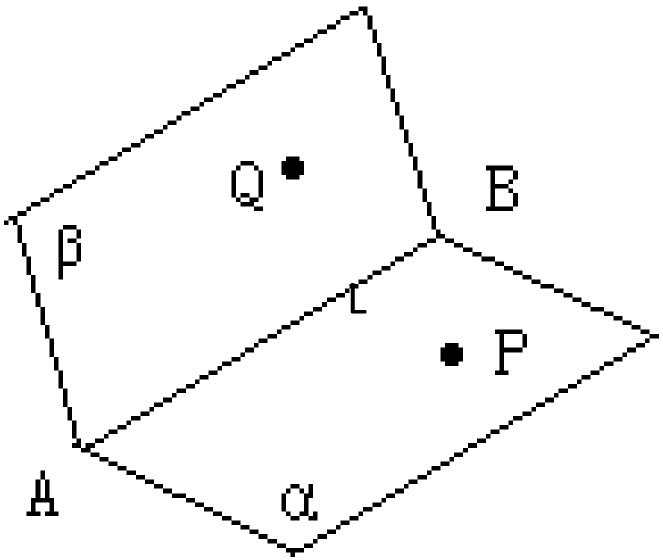
1 、 半平面——平面的一条直线把平面分为两局部，其中的每一局部都叫做一个半平面。



研探新知

1、二面角的有关概念及其记法与表示

棱为AB，面分别为α，β的二面角记作二面角α—AB—β。有时为了方便，也可在α，β内（棱以外的半平面局部）分别取点P，Q，将这个二面角记作二面角P—AB—Q。如果棱记作L，那么这个二面角记作二面角α—L—β或P—L—Q。



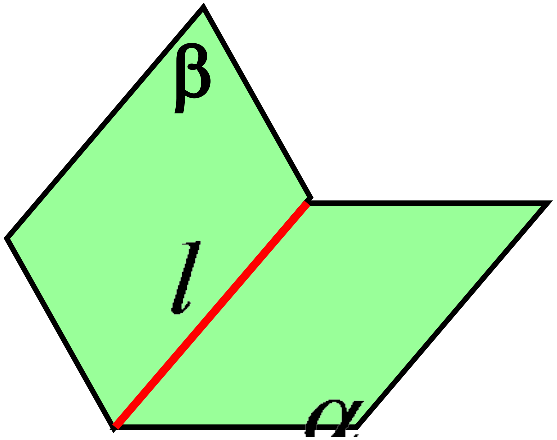
研探新知

2、二面角的有关概念及其记法与表示

观察思考:展示一张纸面，并对折让学生观察其形状，然后引导学生将它与角进行类比，归纳出二面角的概念及记法与表示.

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫二面角。

这条直线叫二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面。

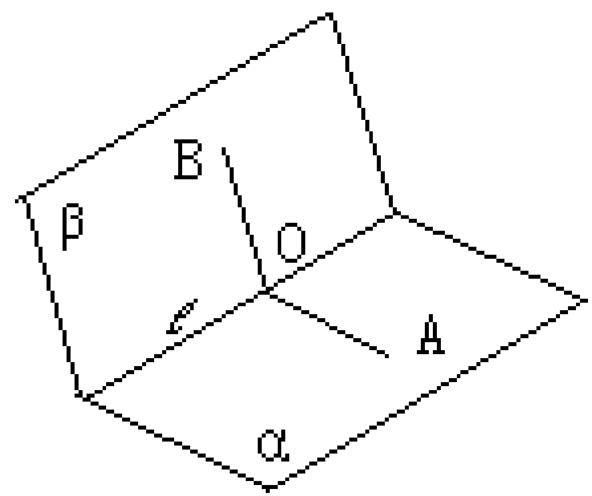


3、二面角的度量

提出问题:二面角的大小反映了两个平面相交的位置关系，如我们常说“把门开大一些”，是指二面角大一些，那我们应如何度量二面角的大小呢?

师生活动：在预先准备好的二面角的模型的棱上取一点为顶点，在两个半平面内各作一射线，通过实验操作，研探二面角大小的度量方法——二面角的平面角。

在二面角α—L—β的棱L上任取一点O，以点O为垂足，在半平面α和β内分别作垂直于棱L的射线OA和OB，那么射线OA和OB构成的∠AOB叫做二面角的平面角。



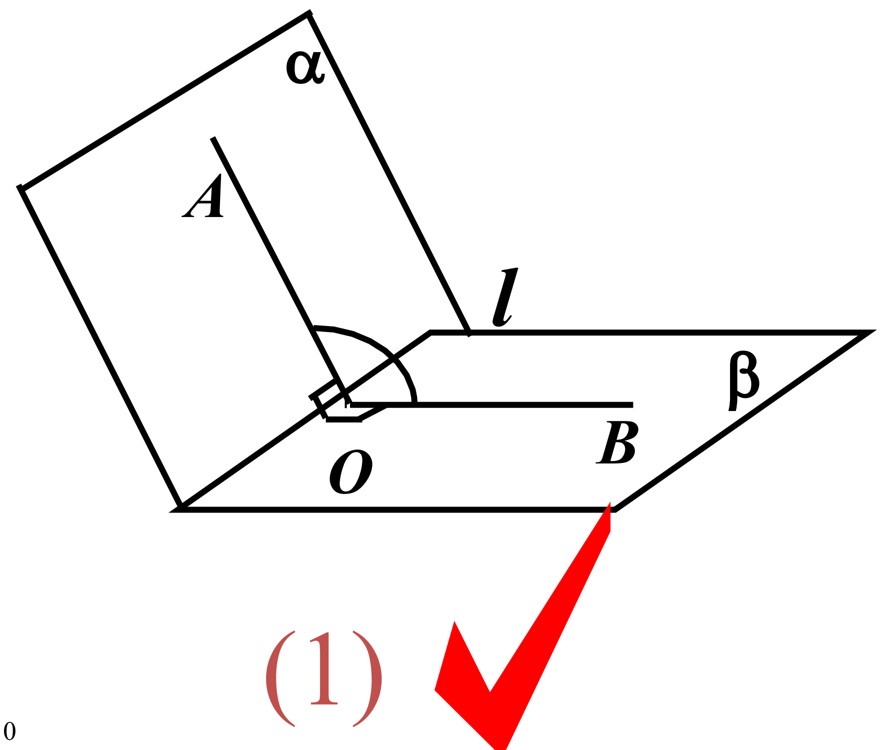
注：

二面角的平面角的特点：

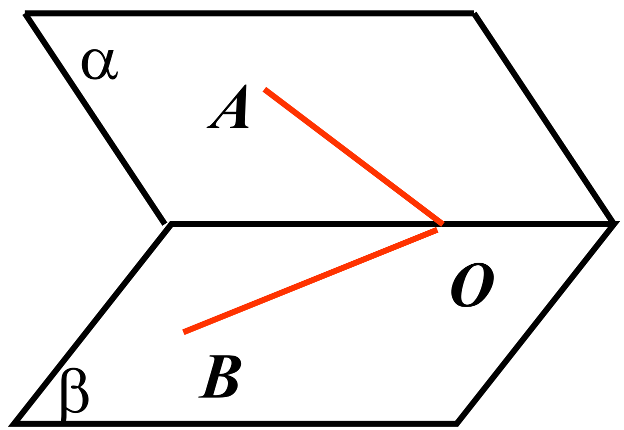
1〕角的顶点在棱上

2〕角的两边分别在两个半平面内

3〕角的边都要垂直于二面角的棱



(1)



(2)

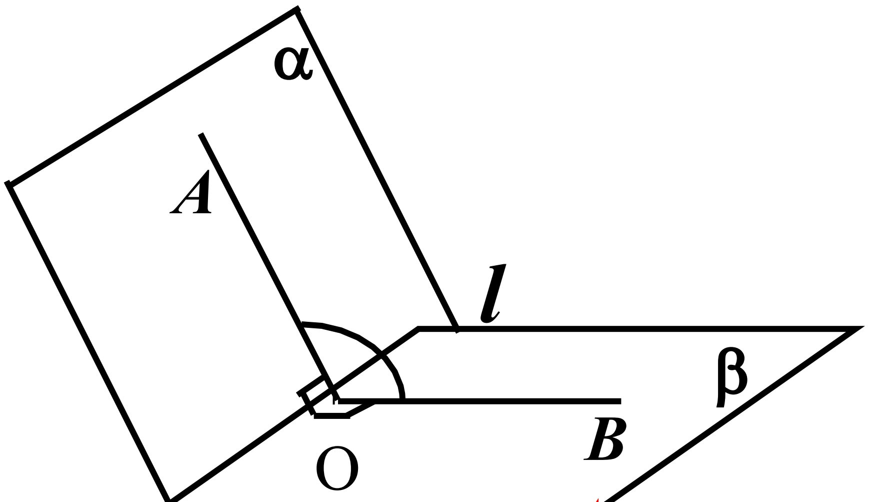
注:

二面角的平面角的特点:

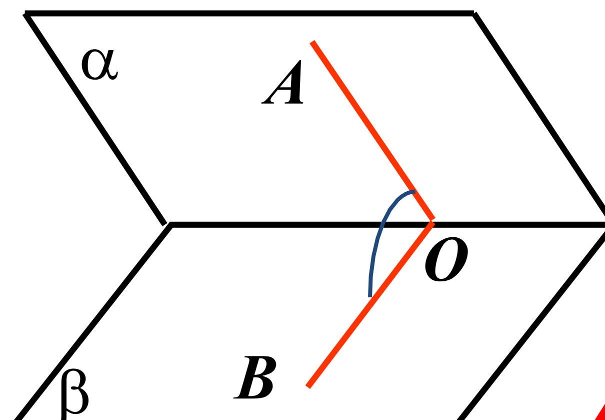
1〕角的顶点在棱上

2〕角的两边分别在两个半平面内

3〕角的边都要垂直于二面角的棱



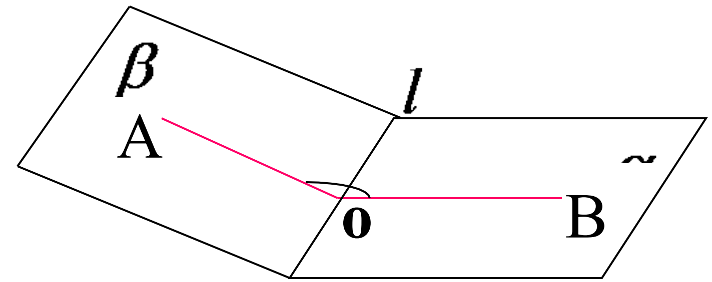
(1)



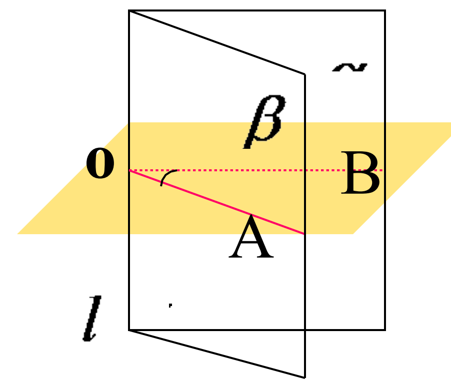
(2)

二面角的 平面角的定义、范围及作法

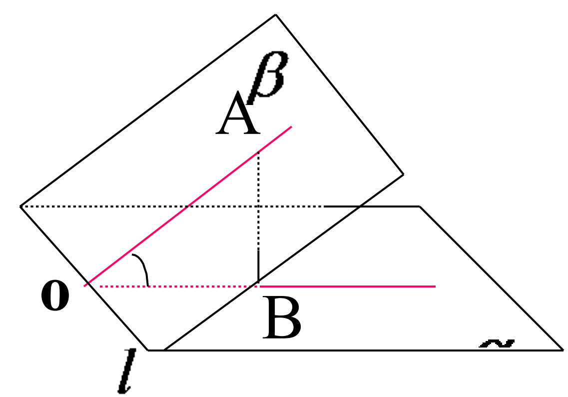
2、二面角的平面角的作法：



1、定义法：
根据定义作出来。

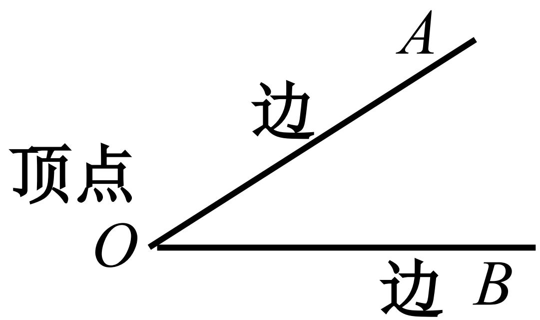
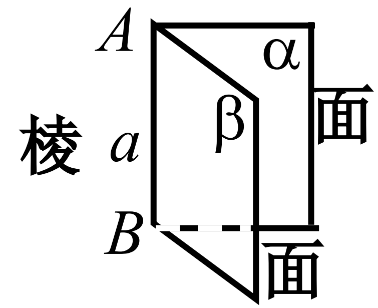


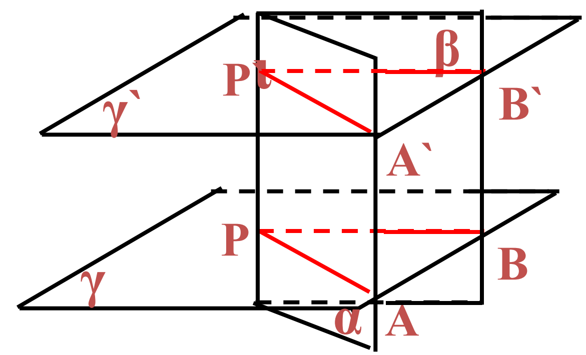
2、作垂面：
作与棱垂直的平面与两半平面的交线得到。



注意：二面角的平面角必须满足：
（1）、角的顶点在棱上。
（2）、角的两边分别在两个面内。
（3）、角的边都要垂直于二面角的棱。

角与二面角的比较

	角	二面角
图形		
定义	从一点出发的两条射线所组成的图形叫做**角**。	从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**。
构成	边—点—边 （顶点）	面—直线—面 （棱）
表示法	$\angle AOB$	二面角α—l—β 或二面角α—AB—β



$\alpha - l - \beta$

思考: $\angle A`P`B`$ 与 $\angle APB$是否相等? **相等**(利用等角定理)

二面角的大小用它的平面角的大小来度量.

约定: 二面角的平面角取值范围是: $[0^0, 180^0]$

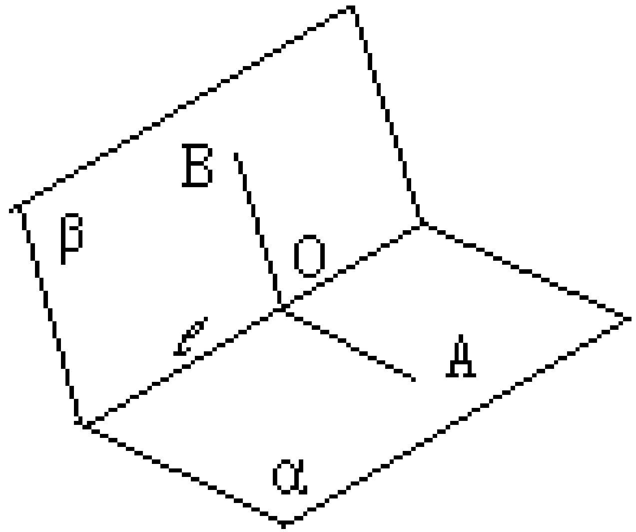
注意:

〔1〕在表示二面角的平面角时，要求“OA⊥L”，“OB⊥L”；

〔2〕∠AOB的大小与点O在L上位置无关

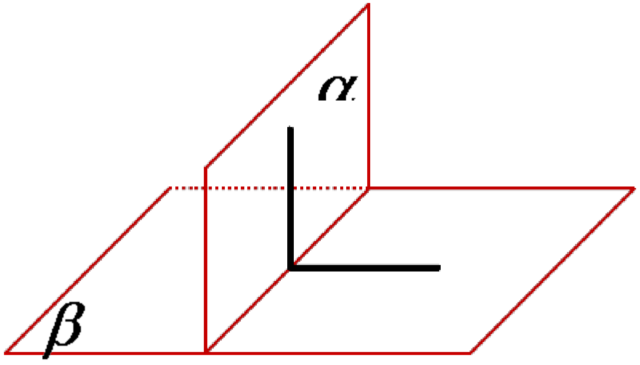
〔3〕二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度，平面角是直角时叫直二面角。

〔4〕二面角的平面角的范围是: $[0^{\circ},180^{\circ}]$



平面与平面垂直

定义：如果两个平面相交所成的二面角是**直二面角**，那么我们称这**两个平面互相垂直**。



记为：$\alpha \perp \beta$.

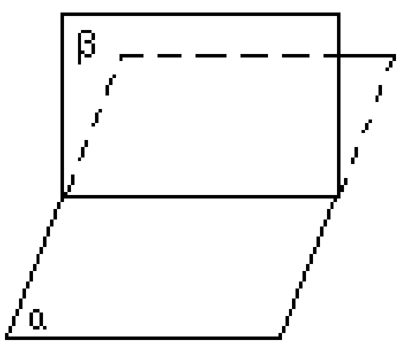
3、两个平面互相垂直

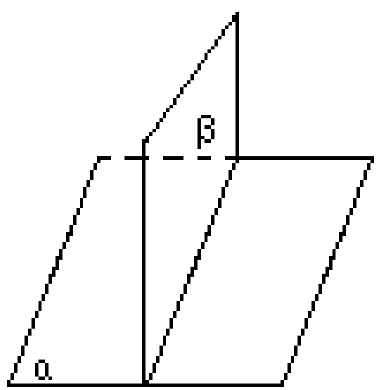
观察：教室里的墙面所在平面与地面所在平面相交，它们所成的二面角及其度数.

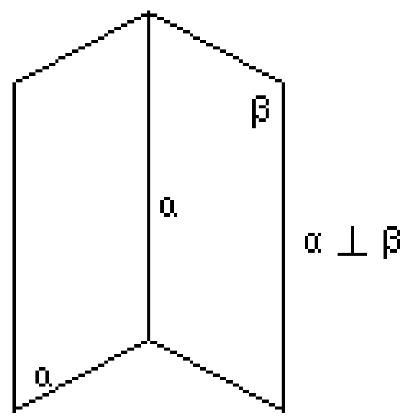
两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直。

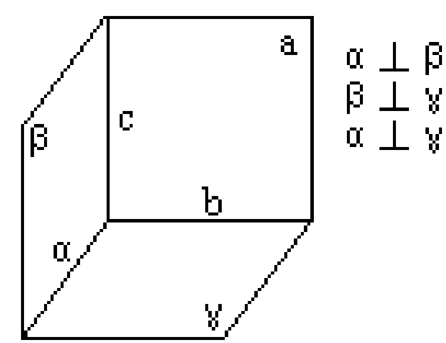
两个平面互相垂直的画法及其表示:

两个平面互相垂直通过画成：直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直。平面α与β垂直，记作：α⊥β。









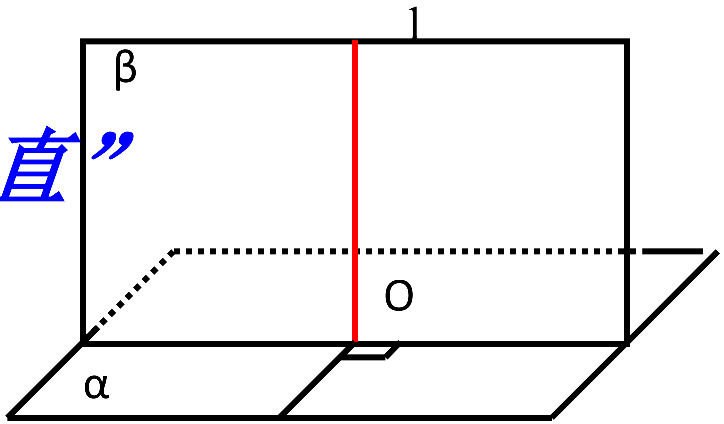
4、两个平面垂直的判定

判定两个平面互相垂直，除了定义外，还有下面的判定定理.

两个平面垂直的判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

注：这个定理简称

“线面垂直，那么面面垂直”



下面我们来证明这个定理

如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

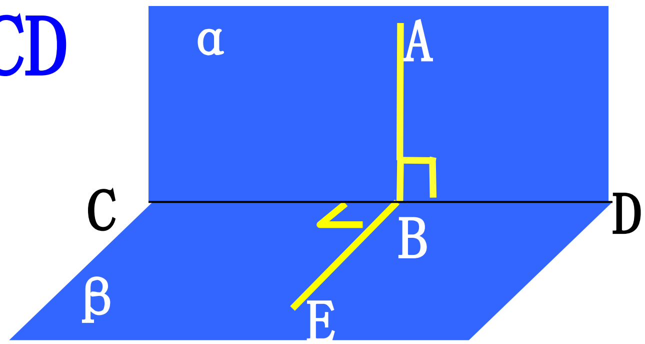
已知：$AB\perp\beta$，$AB\cap\beta=B$，$AB\subset\alpha$.

求证：$\alpha\perp\beta$.

证明：设$\alpha\cap\beta=CD$，那么$B\in CD$

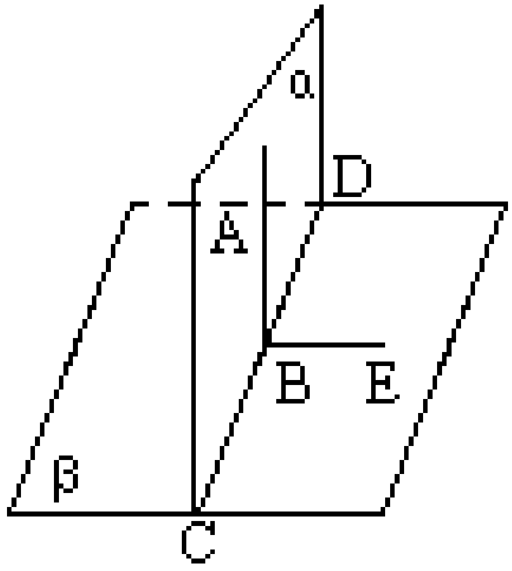
$\because AB\perp\beta$，$CD\subset\beta$，

$\therefore AB\perp CD$.



在平面β内过点B作直线$BE\perp CD$，那么$\angle ABE$是二面角α-CD-β的平面角，又$AB\perp BE$，即二面角α-CD-β是直二面角.

$\therefore\alpha\perp\beta$.



思考题？

：ABCD为正方形，SD⊥平面AC，

问：图中所示的7个平面中，共有多少个平面互相垂直？

1.平面SAD⊥平面$ABCD$

2.平面SBD⊥平面$ABCD$

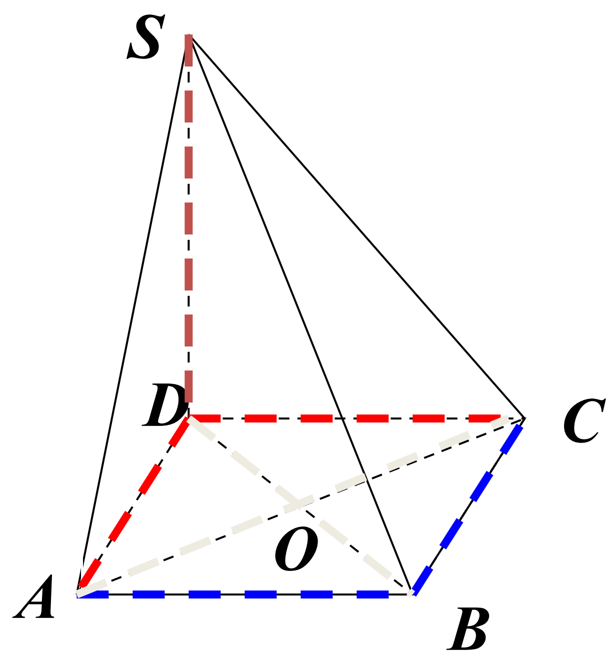
3.平面SCD⊥平面$ABCD$

4.平面SAD⊥平面SCD

5.平面SBC⊥平面SCD

6.平面SAB⊥平面SAD

7.平面SAC⊥平面SBD



课堂诊断:

1.如果平面α内有一条直线垂直于平面β内的一条直线，那么$\alpha \perp \beta$.（   ）×

2.如果平面α内有一条直线垂直于平面β内　的两条直线，那么$\alpha \perp \beta$.（   ）×

3. 如果平面α内的一条直线垂直于平面β内的两条 相交直线, 那么$\alpha \perp \beta$.（   ）√

4.假设$m \perp \alpha$，$m \quad \beta$，那么$\alpha \perp \beta$.(   )√

5. 二面角指的是（ B ）

A、从一条直线出发的两个半平面所夹的角度。

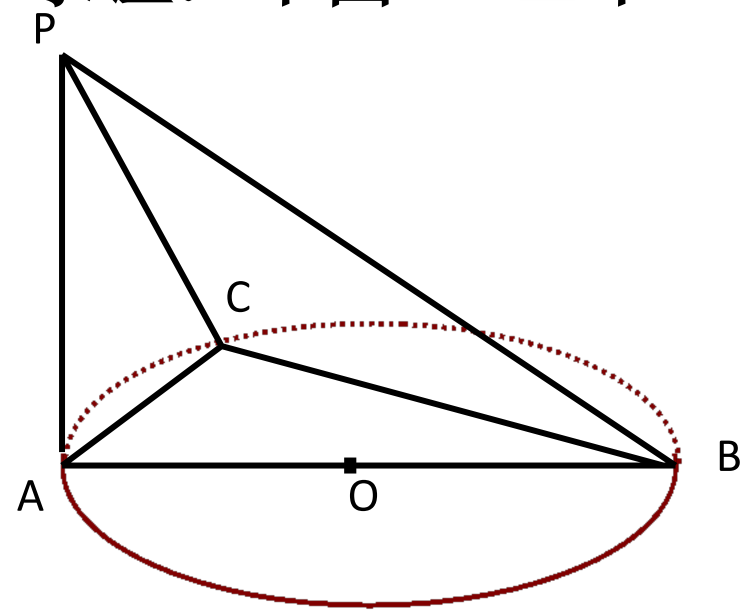
B、从一条直线出发的两个半平面所组成的图形。

C、两个平面相交时，两个平面所夹的锐角。

D、过棱上一点和棱垂直的二射线所成的角。

应用举例，强化所学

例1：如图，AB是⊙O的直径，PA垂直于⊙O所在的平面，C是圆周一不同于A，B的任意一点，求证：平面PAC⊥平面PBC



证明：设⊙O所在平面为α，
由条件，有
PA⊥α，BC在α内，
所以，PA⊥BC，
因为，点C是不同于A，B的任意一点，AB为⊙O的直径，
所以，∠BCA＝90°，即BC⊥CA
又因为PA与AC是△PAC所在平面内的两条相交直线，
所以，BC⊥平面PAC，
又因为BC在平面PBC内，
所以，平面PAC⊥平面PBC。

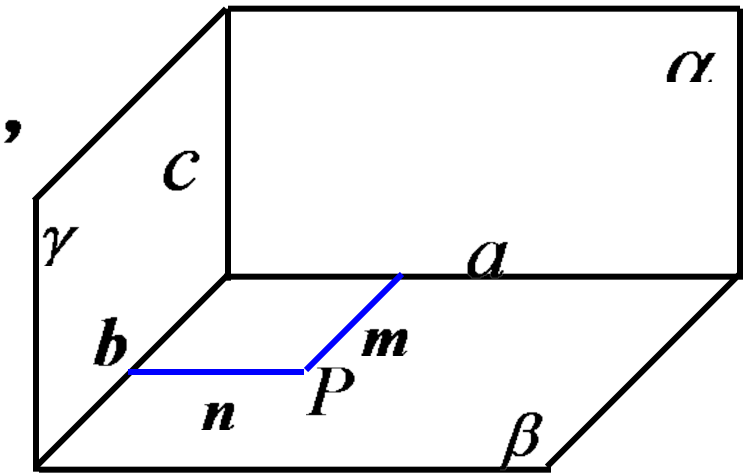
探究：你还能发现哪些面互相垂直？

例2： 求证三个两两垂直的平面的交线两两垂直．

已知：$\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma, \gamma \perp \alpha$，

且 $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b, \gamma \cap \alpha = c$，

求证：$a \perp b, b \perp c, c \perp a$．



证明： 在 β 内任取一点 P，

作 $m \perp a, n \perp b$，

$\because \alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$，

$\therefore m \perp \alpha, n \perp \gamma$，（面面垂直的性质定理）

又 $\gamma \cap \alpha = c$， $\therefore m \perp c, n \perp c$，

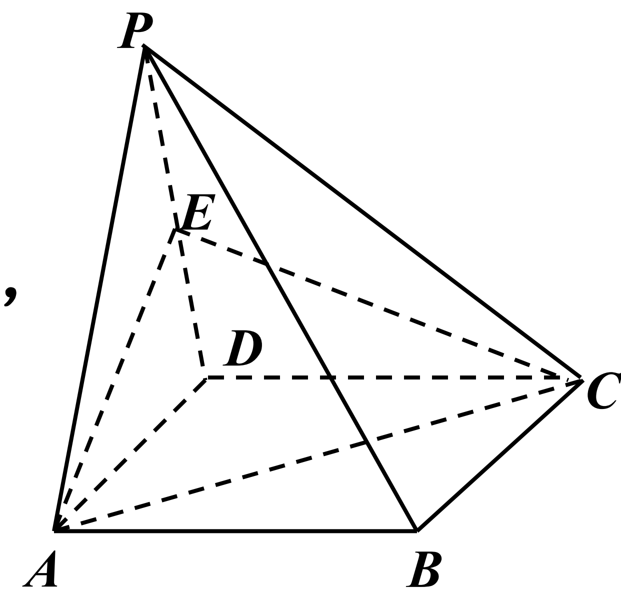
$\therefore c \perp \beta$． 又 $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b$，

$\therefore b \perp c, c \perp a$． 同理可证 $a \perp b$．

例3. 如图，立体图形P-ABCD的侧面PAD是正三角形且垂直于底面，底面ABCD是矩形，E是PD的中点.

〔1〕求证：平面ACE⊥平面PCD；

〔2〕假设PB⊥AC,求PB与底面AC所成的角.



解:〔1〕∵ △PAD是正三角形, E为PD的中点,

$\therefore\ AE \perp PD$.

又平面PAD⊥平面$ABCD$,

且$ABCD$是矩形, $CD \perp AD$,

$\therefore\ CD$⊥平面PAD.〔面面垂直的性质定理〕 $\therefore\ CD \perp AE$.

$\therefore\ AE$⊥平面PCD.

Q $AE \subset$平面ACE,

$\therefore$ 平面ACE⊥平面PCD.〔面面垂直的判定定理〕

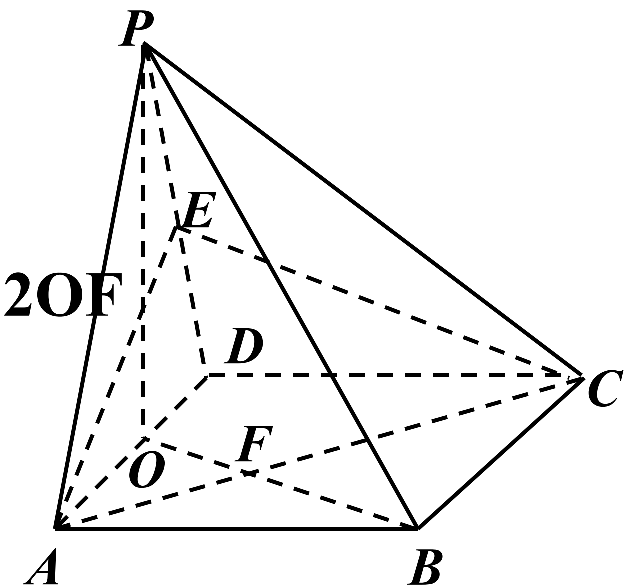
〔2〕设AD的中点为O，连 *PO*、*BO*，那么 PO⊥AD，

∵平面*PAD*⊥平面*AC*，∴ *PO*⊥平面*AC*，

∴ ∠*PBO*就是*PB*与底面*AC*所成的角.

设 $AO = a$，*AC*与*OB*的交点为*F*，那么 FB = 2OF

∵ *PB*⊥*AC*，由三垂线定理得：*AF*⊥*OB*.



Q $AO^2 = OF \cdot OB = \dfrac{1}{3} OB^2$，

∴ $OB = \sqrt{3}a$.

Q $PO = \sqrt{3}AO = \sqrt{3}a$，

∴ $\angle PBO = 45°$

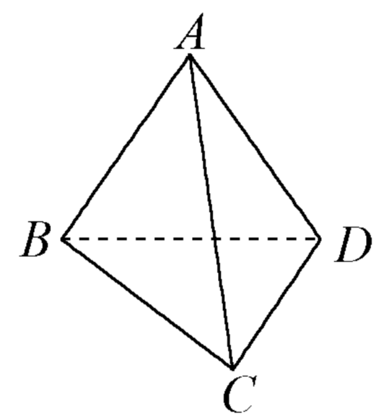
故 *PB*与底面*AC*所成的角为45°.

- 要点一　　　　　　定义法判定平面与平面垂直
- 利用两个平面互相垂直的定义可以直接判定两个平面垂直，判定的方法是：(1)找出两个相交平面的平面角；(2)证明这个平面角是直角；(3)根据定义，这两个平面互相垂直.

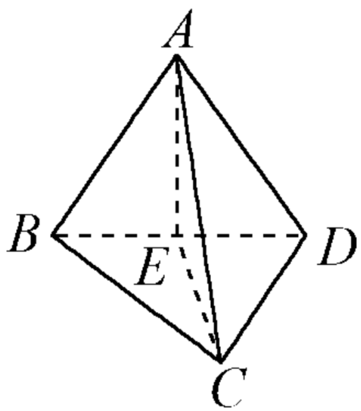
例 1　如图所示，在四面体 $ABCD$ 中，$BD=\sqrt{2}a$，$AB=AD=CB=CD=AC=a$.

求证：平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.

【分析】　作出二面角的平面角，通过计算这个角为 90°来证明两平面垂直.



- 【证明】∵AB＝AD＝CB＝CD＝a，
- ∴△ABD与△BCD是等腰三角形，
- ∴取 BD的 中 点 E， 连 结 AE、 CE， 那 么 AE⊥BD， BD⊥CE.
- ∴∠AEC为二面角A－BD－C的平面角.



在$\triangle ABD$中，$AB=a$，$BE=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

同理$CE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.在$\triangle AEC$中，$AE=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，