第二章　函数的概念与基本初等函数

2.6　对数与对数函数

内容索引

考试要求

1．理解对数的概念和运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数.

2．通过具体实例，了解对数函数的概念．能用描点法或借助计算工具画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与特殊点.

3．知道对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数($a>0$，且 $a\neq 1$).

第一部分

必备知识　回顾

课前预习·基础回扣

知识梳理

1．对数的概念

一般地，如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq 1)$，那么数 x 叫做<u>以 a 为底 N 的对数</u>，记作<u>$x=\log_a N$</u>，其中 a 叫做<u>对数的底数</u>，N 叫做<u>真数</u>.

2．对数的性质与运算性质

(1)对数的性质：$\log_a 1=$<u>0</u>，$\log_a a=$<u>1</u>，$a^{\log_a N}=$<u>N</u>$(a>0$，且 $a\neq 1$，$N>0)$.

(2)对数的运算性质

如果 $a>0$，且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么：

①$\log_a(MN)=$<u>$\log_a M+\log_a N$</u>.

②$\log_a\frac{M}{N}=$<u>$\log_a M-\log_a N$</u>.

③$\log_a M^n=$<u>$n\log_a M$</u>$(n\in\mathbf{R})$.

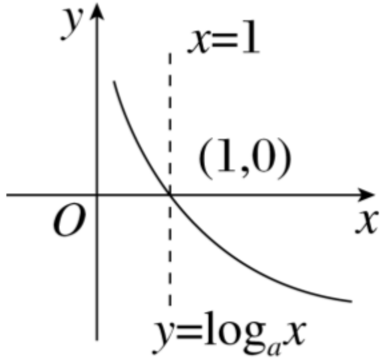
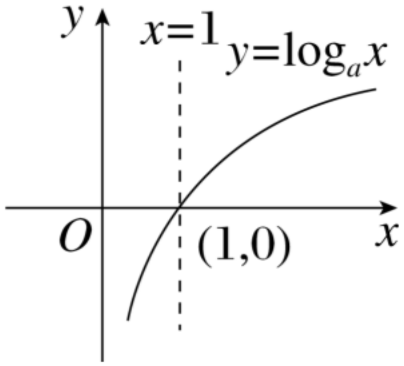
3．换底公式

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$($a$>0，且 $a\neq1$；c>0，且 $c\neq1$；b>0)．

4．对数函数的概念

一般地，函数 $y=$ ___$\log_a x$(a>0，且 $a\neq1$)___ 叫做对数函数，其中 ___x___ 是自变量，函数的定义域是 ___$(0，+\infty)$___．

5．对数函数的图象及性质

<table>
<tr><td colspan="2">a 的范围</td><td>$0<a<1$</td><td>$a>1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td>定义域</td><td colspan="2">$(0，+\infty)$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">**R**</td></tr>
<tr><td>定点</td><td colspan="2">过定点$(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在$(0，+\infty)$上是减函数</td><td>在$(0，+\infty)$上是增函数</td></tr>
</table>

6.指数函数与对数函数的关系

一般地，指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$与对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$互为反函数，它们的定义域与值域正好__互换__，图象关于直线__$y=x$__对称.

常用结论与知识拓展

1．换底公式及其推论

(1)$\log_a b\cdot\log_b a=1$，即 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$($a$，$b$ 均大于 0 且不等于 1)；

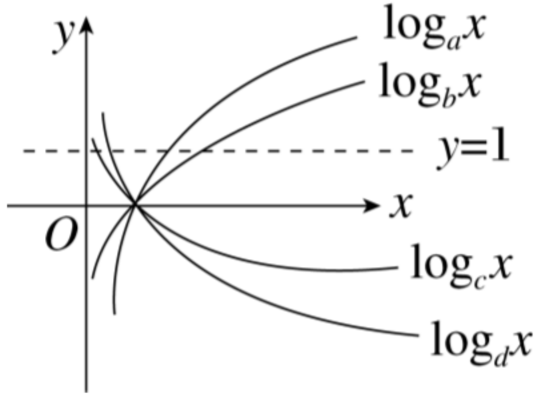
(2)$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$；

(3)$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$.

2．对数函数的图象与底数大小的关系

如图，作直线 $y=1$，则该直线与四个函数图象交点的横坐标为相应的底数．故 $0<c<d<1<a<b$.

由此我们可得到此规律：在第一象限内与 $y=1$ 相交的对数函数从左到右底数逐渐增大．



基础检测

1．判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”．

(1)若 $MN>0$，则 $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$.(×)

(2)对数函数 $y=\log_ax(a>0$ 且 $a\neq1)$在$(0，+\infty)$上是增函数．(×)

(3)函数 $y=\log_ax^2$ 与函数 $y=2\log_ax$ 是同一个函数．(×)

(4)若 $M>N>0$，则 $\log_aM>\log_aN$.(×)

(5)对数函数 $y=\log_ax(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象过定点$(1,0)$，且过点$(a,1)$，$\left(\frac{1}{a}，-1\right)$.(√)

2．(教材改编题)函数 $f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$ 的定义域是(D)

A．$(1,+\infty)$　　B．$(2,+\infty)$

C．$[1,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

解析： 要使函数 $f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$ 有意义，只需 $\begin{cases}\ln(x-1)\geq 0,\\ x-1>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-1\geq 1,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解得 $x\geq 2$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2,+\infty)$．故选 D.

3．(教材改编题)化简 $2\lg 5+\lg 4-5^{\log_5 2}$ 的结果为(　A　)

A．0　　B．2

C．4　　D．6

解析： 因为 $2\lg 5+\lg 4=2\lg 5+2\lg 2=2(\lg 5+\lg 2)=2$. 又 $5^{\log_5 2}=2$，所以 $2\lg 5+\lg 4-5^{\log_5 2}=2-2=0$. 故选 A.

4. (教材改编题)已知函数 $f(x)=2^x$ 的图象与函数 $y=g(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $g\left(\frac{1}{2}\right)$的值为(A)

A. -1　　B. 1

C. 12　　D. 2

解析： 解法 1：由 $y=f(x)=2^x$，得 $x=\log_2 y$，所以函数 $f(x)$的反函数为 $g(x)=\log_2 x$，则 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$.故选 A.

解法 2：设 $g\left(\frac{1}{2}\right)=t_0$，则函数 $y=g(x)$过点$\left(\frac{1}{2}, t_0\right)$，由于函数 $f(x)=2^x$ 的反函数为 $y=g(x)$，因此有 $2^{t_0}=\frac{1}{2}$，故 $t_0=-1$.故选 A.

5．(多选题)(2022·江苏苏州四校联考)对于函数$f(x)=\lg\left(\frac{1}{|x-2|}+1\right)$，下列说法正确的有(AD)

A．$f(x+2)$是偶函数

B．$f(x+2)$是奇函数

C．$f(x)$在区间$(-\infty，2)$上单调递减，在区间$(2，+\infty)$上单调递增

D．$f(x)$没有最小值

解析：对于 A，B，因为 $f(x)=\lg\left(\frac{1}{|x-2|}+1\right)$，故 $f(x+2)=\lg\left(\frac{1}{|x|}+1\right)$，又 $f(-x+2)=\lg\left(\frac{1}{|-x|}+1\right)=\lg\left(\frac{1}{|x|}+1\right)$，故 $f(x+2)$为偶函数，故 A 正确，B 错误．对于 C，因为 $f(x)=$

$\lg\left(\frac{1}{|x-2|}+1\right)=\begin{cases}\lg\left(\frac{1}{x-2}+1\right), & x>2,\\ \lg\left(\frac{1}{2-x}+1\right), & x<2,\end{cases}$ 当 $x\in(2,+\infty)$时，因为 $y=\frac{1}{x-2}$在 $x\in(2,+\infty)$时单调递减，故 $y=\frac{1}{x-2}+1$ 单调递减，所以 $y=\lg\left(\frac{1}{x-2}+1\right)$在区间$(2,+\infty)$上单调递减，故 C 错误．对于 D，因为当 $x\in(2,+\infty)$时，$y=\lg\left(\frac{1}{x-2}+1\right)$单调递减，同理当 $x\in(-\infty,2)$时，$y=\lg\left(\frac{1}{2-x}+1\right)$单调递增，当 $x\to+\infty$时，$y\to0$，当 $x\to-\infty$时，$y\to0$，故 $f(x)$没有最小值．故 D 正确．

第二部分

关键能力　提升

课堂探究·考点精讲

【例 1】　(1)设 $a=\log_3 6$，$b=\log_5 20$，则 $\log_2 15$ 等于(D)

A. $\dfrac{a+b-3}{(a-1)(b-1)}$　　B. $\dfrac{a+b-2}{(a-1)(b-1)}$

C. $\dfrac{a+2b-3}{(a-1)(b-1)}$　　D. $\dfrac{2a+b-3}{(a-1)(b-1)}$

解析： 因为 $a=\log_3 6=1+\log_3 2$，$b=\log_5 20=1+2\log_5 2$，所以 $\log_2 3=\dfrac{1}{a-1}$，$\log_2 5=\dfrac{2}{b-1}$，则 $\log_2 15=\log_2 3+\log_2 5=\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{2}{b-1}=\dfrac{2a+b-3}{(a-1)(b-1)}$.故选 D.

(2)计算：$(\lg 2)^2+\lg 2\cdot\lg 50+\lg 25=$__2__.

解析： 原式$=\lg 2(\lg 2+\lg 50)+\lg 25=2\lg 2+\lg 25=\lg 4+\lg 25=2$.

规律总结

(1)利用对数的运算性质化简对数式主要有以下两种方法:

一是“正向”利用对数的运算法则，把各对数分成更为基本的一系列对数的代数和;二是“逆向”运用对数运算法则，把同底的各对数合并成一个对数.

(2)利用已知对数式表示不同底数的对数式时，可以将待求式中的底数利用换底公式化为已知对数式的底数表示.

【对点训练 1】 (1)若 $2^a=3^b=6$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$等于(D)

A. 2　　　　B. 3

C. $\frac{1}{2}$　　　　D. 1

解析：因为 $2^a=3^b=6$，所以 $a=\log_2 6$，$\frac{1}{a}=\log_6 2$，$b=\log_3 6$，$\frac{1}{b}=\log_6 3$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_6 2+\log_6 3=\log_6 6=1$.故选 D.

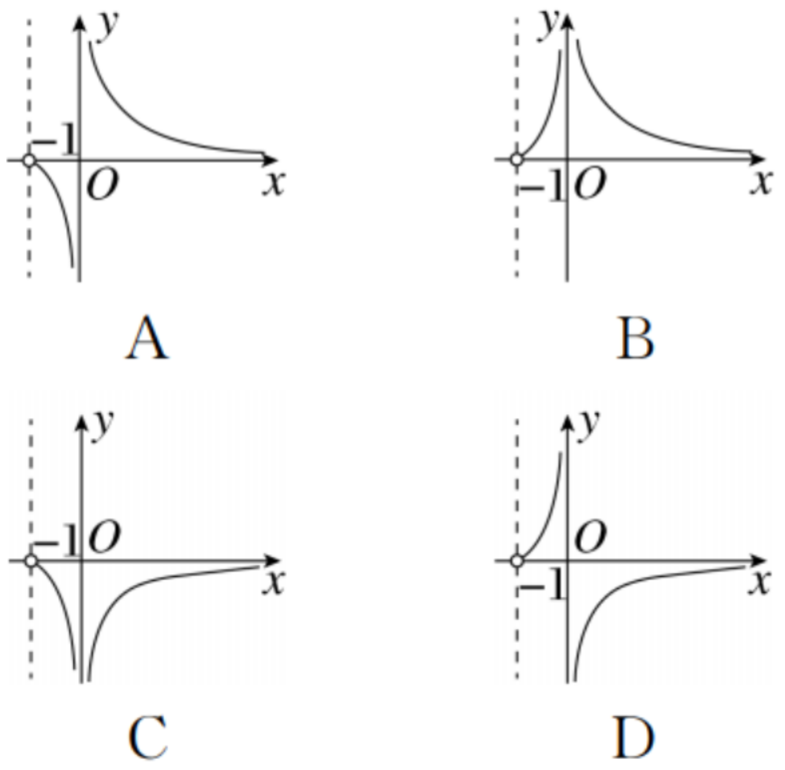
(2)(2020·全国Ⅰ卷)设 $a\log_3 4=2$，则 4^{-a}等于(B)

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{6}$

解析： 因为 $a\log_3 4=2$，所以 $\log_3 4^a=2$，则有 $4^a=3^2=9$，所以 $4^{-a}=\frac{1}{4^a}=\frac{1}{9}$.故选 B.

【例 2】　(2022·河北唐山模拟)函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x+1)}$的大致图象为(　A　)



解析： 当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{\ln 2}>0$，排除 C，D.当 $x=-\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{-\ln 2}<0$，排除 B.

故选 A.

规律总结

(1)求解形如 $y=\log_a(x\pm b)$对数型函数的图象问题，首先应明确基本的对数函数的图象(即明确当 $a>1$ 与 $0<a<1$ 时两种对数函数 $y=\log_a x$ 的图象)，在此基础上研究由其复合而成的函数的图象.

(2)在识别函数图象时，要善于利用已知函数的性质、函数图象上的特殊点(与坐标轴的交点、最高点、最低点等)排除不符合要求的选项.

(3)一些对数型方程、不等式问题常转化为相应的函数图象问题，利用数形结合法求解.

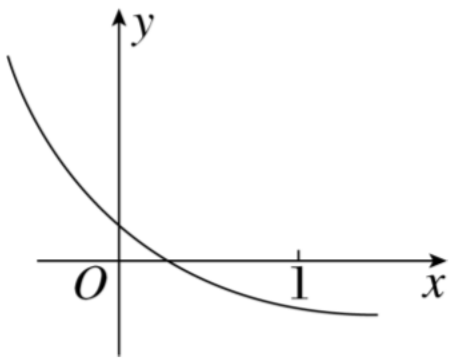
【对点训练 2】 (1)已知函数 $y=\log_a(x+c)$(a，c 为常数，其中 $a>0$，$a\neq 1$)的图象如图，则下列结论成立的是(D)

A．$a>1$，$c>1$

B．$a>1,0<c<1$

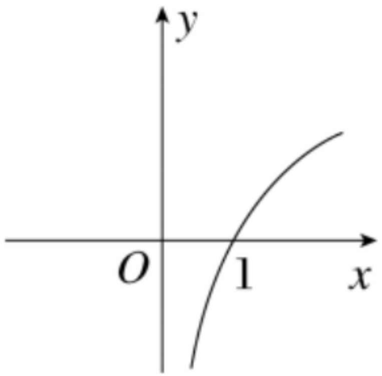
C．$0<a<1$，$c>1$

D．$0<a<1,0<c<1$

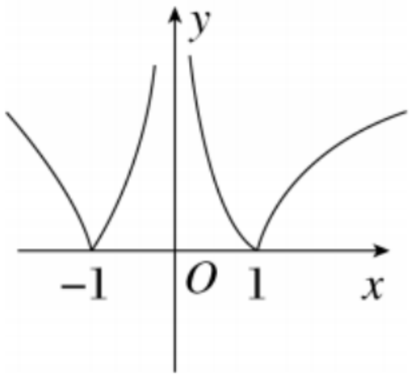


解析： 由该函数的图象通过第一、二、四象限知该函数为减函数，所以 $0<a<1$；因为图象与 x 轴的交点在区间(0,1)之间，所以该函数的图象是由函数 $y=\log_a x$ 的图象向左平移不到 1 个单位长度后得到的，所以 $0<c<1$.

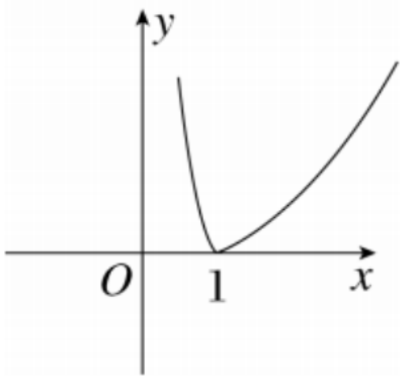
(2)函数 $y=|\log_2 x|$的图象是(D)



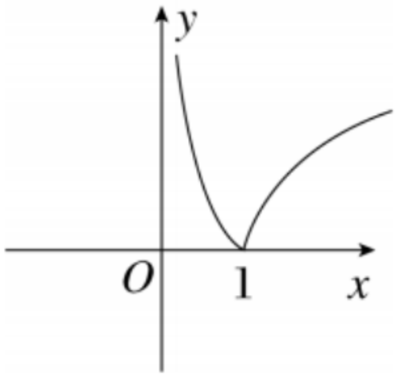
A



B



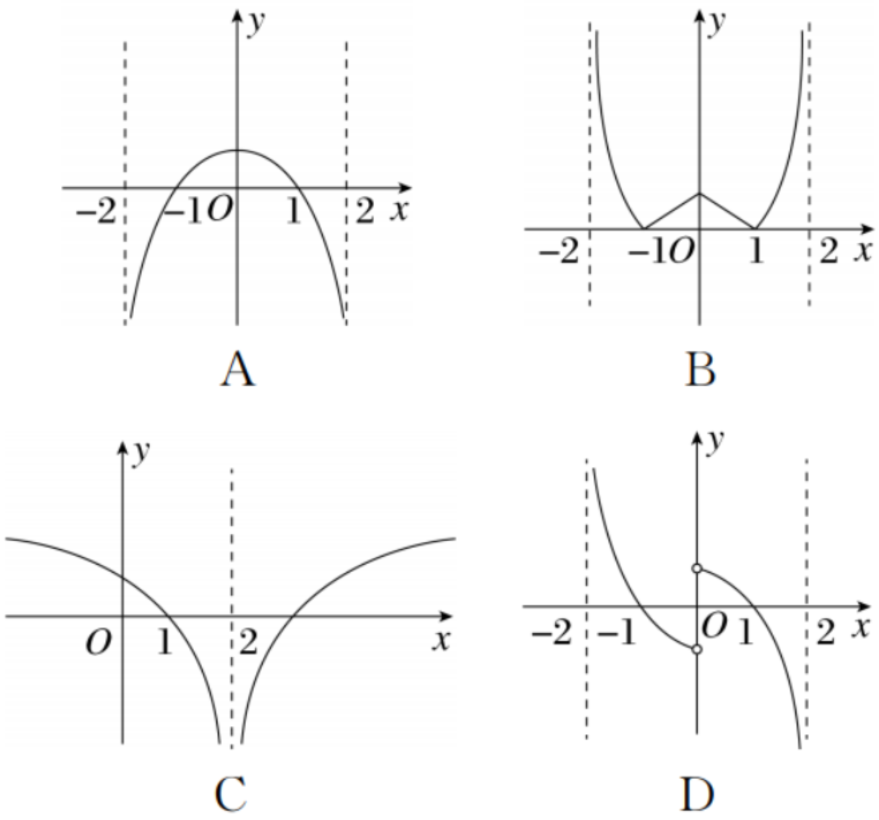
C



D

解析： 因为 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x\geq 1,\\ -\log_2 x, & 0<x<1,\end{cases}$ 所以函数的定义域为$(0,+\infty)$，即函数图象只出现在 y 轴右侧．值域为$(0,+\infty)$，即函数图象只出现在 x 轴上方．其图象为在区间$(0,1)$上是下降的曲线，在区间$(1,+\infty)$上是上升的曲线，由增长趋势知 C 不正确，只有 D 满足要求．故选 D.

(3)函数 $y=\ln(2-|x|)$ 的大致图象为(A)



解析： 令 $f(x)=\ln(2-|x|)$，易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|-2<x<2\}$，且 $f(-x)=\ln(2-|-x|)=\ln(2-|x|)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，排除选项 C，D；当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}<0$，排除选项 B.故选 A.

命题角度 1　利用对数函数的单调性比较大小

【例 3】　(2020·全国Ⅲ卷)设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 3$，$c=\frac{2}{3}$，则(A)

A．$a<c<b$　　B．$a<b<c$

C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

解析：因为 $a=\frac{1}{3}\log_3 2^3<\frac{1}{3}\log_3 9=\frac{2}{3}=c$，$b=\frac{1}{3}\log_5 3^3>\frac{1}{3}\log_5 25=\frac{2}{3}=c$，所以 $a<c<b$.