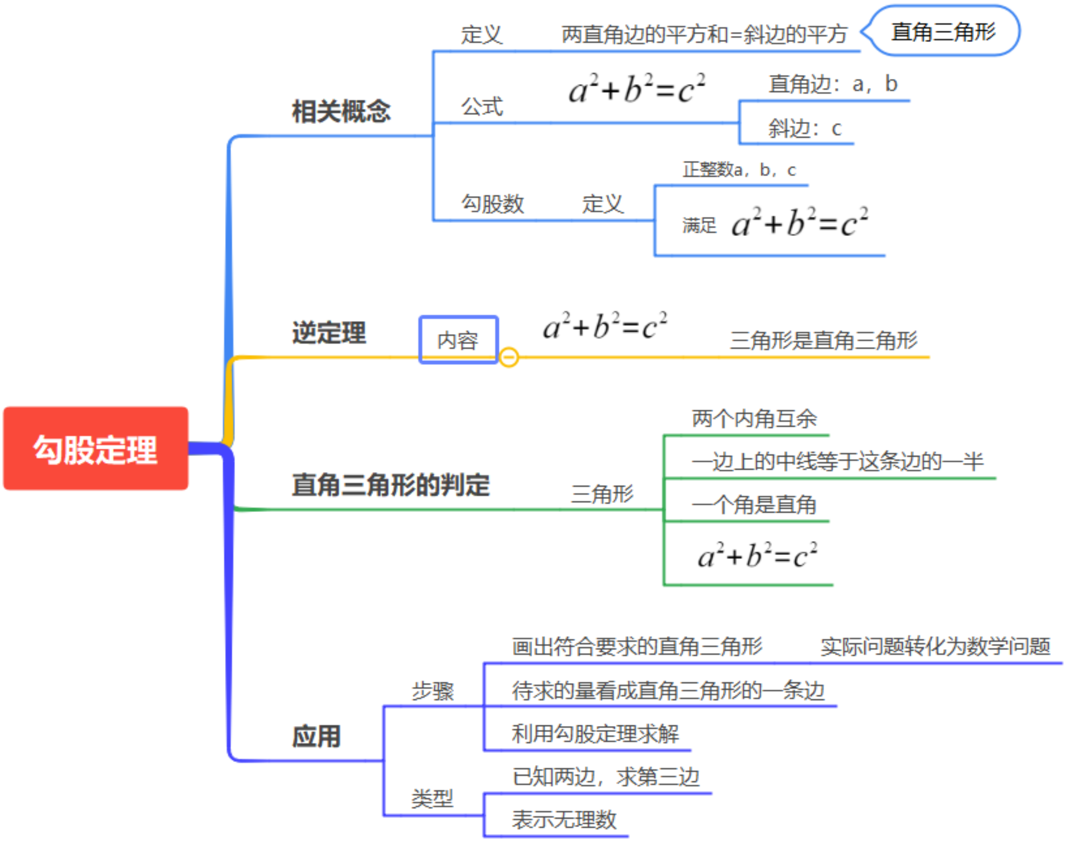
考点清单 3-1 勾股定理

（5 个考点梳理+16 种题型解读+4 种方法解读）



考点清单

【清单 01】直角三角形

定义：有一个角是直角的三角形叫做直角三角形.

性质：1）直角三角形两个锐角互余.

2）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

3）在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半.

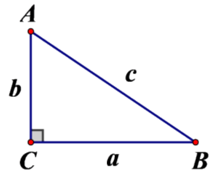
判定：1）两个内角互余的三角形是直角三角形.

2）三角形一边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

3）有一个角是直角的三角形叫做直角三角形.

4）勾股定理逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

【清单 02】勾股定理



文字语言：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

符号语言：如果直角三角形的两直角边分别为a，b，斜边为c，那么$a^2+b^2=c^2$.

变式：$a^2=c^2-b^2$，$b^2=c^2-a^2$，

$c=\sqrt{a^2+b^2}$,$a=\sqrt{c^2-b^2}$,$b=\sqrt{c^2-b^2}$.

【清单 03】勾股定理的实际应用

利用勾股定理解决实际问题的一般步骤：

1）从实际问题中抽象出几何图形；

2）确定与问题相关的直角三角形；

3）找准直角边和斜边，根据勾股定理建立等量关系；

4）求得符合题意的结果.

【清单 04】勾股数

勾股数：能够构成直角三角形的三边长的三个正整数称为勾股数，即满足关系$a^2+b^2=c^2$的 3 个正整数 a，b，c 称为勾股数.

勾股数需要满足的两个条件：1）这三个数均是正整数；

2）两个较小数的平方和等于最大数的平方.

常见的勾股数：1）3，4，5；2）6，8，10；3）5，12，13 等.

【清单 05】勾股定理的逆定理

内容：如果三角形三边长a，b，c满足$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形，其中c为斜边.

题型清单

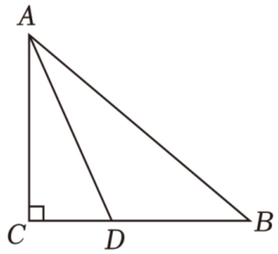
【考点题型一】利用勾股定理解三角形

（24-25 八年级上·贵州毕节·期末）

1．一直角三角形两边分别是 4 和 3，则它的另一边长是________.

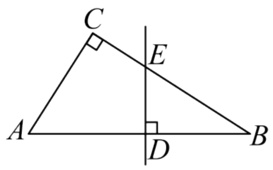
（23-24 八年级上·江西九江·期末）

2．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，AD平分$\angle BAC$，$AB=15$，$AC=9$，则点D到AB的距离是______．



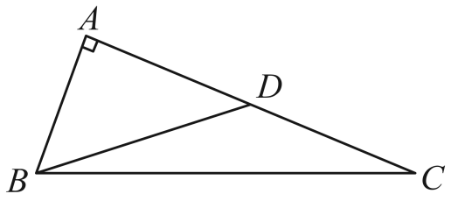
（23-24 八年级下·全国·期末）

3．如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，AB的垂直平分线交BC于点E，若$BE=5$，$CE=3$，则$AC=$_______．



（24-25 八年级上·全国·期末）

4．如图，在$\triangle ABC$中，$AB\perp AC$，$AB=5\mathrm{cm}$，$BC=13\mathrm{cm}$，BD是边 AC 上的中线，则$\triangle BCD$的面积是______cm^{2}．



【考点题型二】已知两点坐标求两点距离

（23-24 八年级下·山东临沂·期末）

5．在直角坐标系中，点$P(-3,-4)$到原点的距离是_____．

（23-24 八年级上·上海长宁·期末）

6．在直角坐标平面内点$A\left(2,-1\right)$与点$B\left(-2,-3\right)$的距离等于_____________．

（23-24 八年级上·江苏泰州·期末）

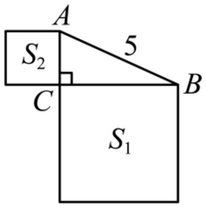
7．在平面直角坐标系xOy中，点$E\left(4t+8,-3t-3\right)$是该平面内任意一点，连接OE，则OE的最小值是___．

【考点题型三】以直角三角形三边为边长的图形面积

（23-24 八年级下·陕西渭南·期末）

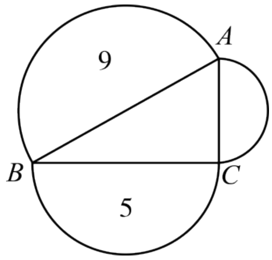
8．如图，已知$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的斜边$AB=5$，分别以直角边BC、AC为边向外作正方形，正方

形的面积分别记为S_1，S_2，则S_1+S_2的值为_____．



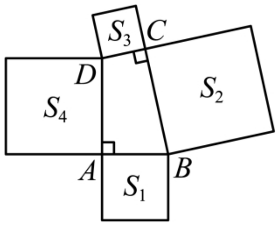
（23-24 八年级下·河南洛阳·期末）

9．如图，已知$\triangle ABC$中$\angle ACB=90°$，以$\triangle ABC$的三边为直径向外作 3 个半圆，以AB、BC为直径的半圆面积分别为 9 和 5，则以AC为直径的半圆面积为_____．



（23-24 八年级下·山西大同·期末）

10．如图，在四边形$ABCD$中，$\angle DAB=\angle BCD=90°$，分别以四边形的四条边为边向外作四个正方形，面积分别记为S_1，S_2，S_3，S_4．若$S_1+S_4=135$，$S_3=49$，则$S_2=$_____．



（23-24 八年级下·北京·期末）

11．有一个边长为 1 的正方形，经过 1 次“生长”后，在它的左右肩上长出两个小正方形，其中，三个正方形的三条边围成的三角形是直角三角形，再经过 1 次这样的“生长”后，变成了如图 1 所示的图形．如果照此规律继续“生长”下去，它将变成如图 2 所示的“枝繁叶茂的勾股树”，请你算出“生长”了 2025 次后形成的图形中所有正方形的面积和是______．

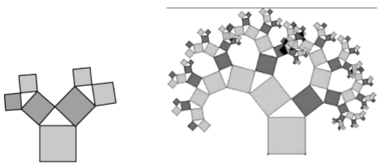


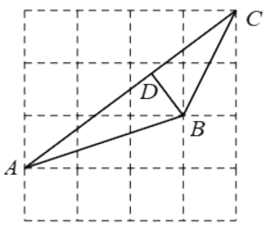
图1　　　图2

【考点题型四】勾股定理与网格问题

解题方法：正方形网格中的每一个角都是直角，在正方形网格中的长度计算都可以归结为求任意两个点之间的距离，一般情况下都是运用勾股定理来进行计算，关键是确定每一条边所在的直角三角形.

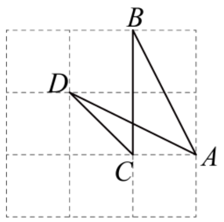
（24-25 八年级上·江苏泰州·期中）

12．在如图所示的网格中，每个小正方形的边长均为 1，$\triangle ABC$ 各顶点均在网格的格点上，$BD\perp AC$ 于点 D，则 BD 的长为____.



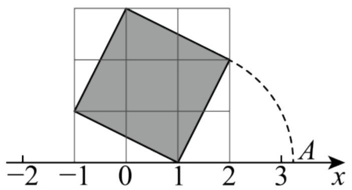
（24-25 八年级上·江苏常州·期中）

13．如图所示，在边长为1的正方形网格图中，点A、B、C、D 均在正方形网格格点上．图中 $\angle B+\angle D=$______°．



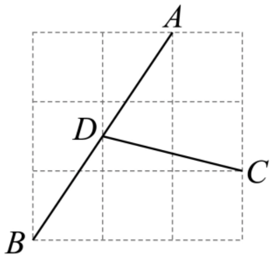
（23-24 七年级上·浙江温州·期中）

14．如图，正方形网格中每个小正方形的边长为 1，以数 1 表示的点为圆心，阴影正方形边长为半径，画圆弧交数轴于点 A（点 A 位于原点右侧），则点 A 表示的数为________.



（23-24 八年级·江苏·期末）

15．如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长为2cm，点 A、B、C 均在格点上，线段 AB 与竖直网格线相交于点 D，则线段 CD 的长为__________cm．



（22-23 八年级上·江苏镇江·期末）

16．把由 5 个小正方形组成的十字形纸板（如图 1）剪开，以下剪法中能够将剪成的若干块拼成一个大正方形的有_____（填写序号）．

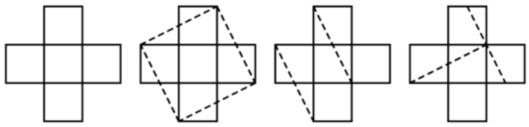
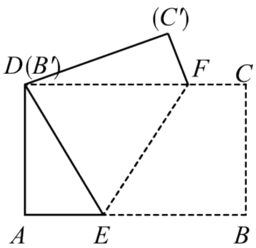


图1　①　②　③

【考点题型五】勾股定理与折叠问题

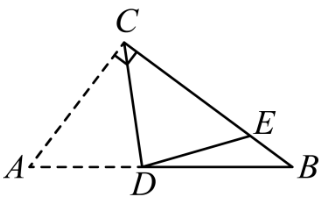
（23-24 八年级上·江苏扬州·期末）

17．如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=18$，$BC=12$，E、F 分别在边 AB、CD 上．现将四边形 $BCFE$ 沿 EF 折叠，点 B、C 的对应点分别为点 B'、C'．当点 B' 恰好与点 D 重合时，则 $CF=$____．



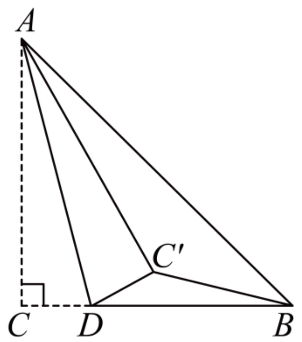
（23-24 八年级上·江苏常州·期末）

18．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，点 D 在斜边 AB 上，将△ACD 沿 CD 折叠，使点 A 恰好落在 BC 边上的点 E 处，则△BDE 的周长为______________．



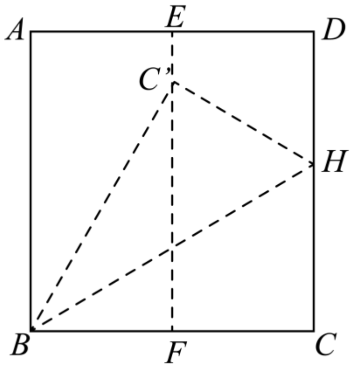
（23-24 九年级上·江苏徐州·阶段练习）

19．如图，在直角△ABC 中，$\angle C=90°$，$CA=CB=5$，点 D 在边 BC 上．将△ACD 沿 AD 折叠，使点 C 落在点 C' 处，连接 BC'，则 BC' 的最小值为______．



（21-22 八年级上·江苏泰州·期末）

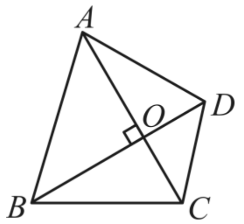
20．如图，小明将一张正方形纸片对折，使得 AB 与 CD 重合，折痕为 EF，展开后再沿 BH 折叠，使得点 C 刚好落在折痕 EF 上的 C'处，若 CH=1cm，则 BC= ____cm．



【考点题型六】利用勾股定理求线段的平方和/差

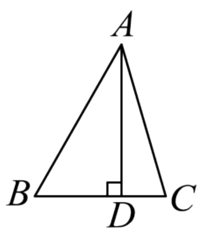
（23-24 八年级上·辽宁沈阳·阶段练习）

21．如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O．若 $AC\perp BD$， $AB=4$， $CD=\sqrt{5}$，则 $BC^2+AD^2=$_____．



（23-24 八年级下·安徽蚌埠·期中）

22．如图，在$\triangle ABC$ 中， $AD\perp BC$ ．

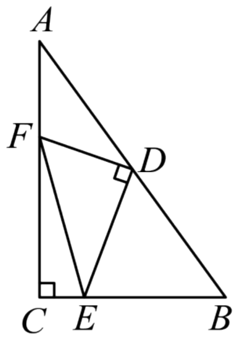


(1)求证： $AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$；

(2)当 $AB=8$，$BC=6$，$AC=2\sqrt{13}$ 时，求 AD 的值．

（22-23 八年级下·辽宁抚顺·阶段练习）

23．如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，D 为 AB 中点，点 E 在 BC 边上（点 E 不与点 B，C 重合），连接 DE，过点 D 作 $DE\perp DF$ 交 AC 于点 F，连接 EF．

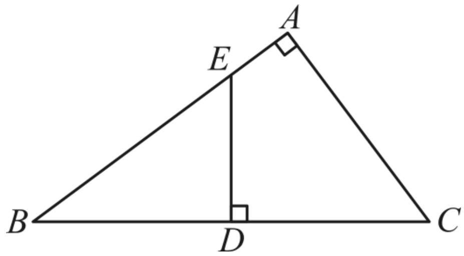


(1)求证：$AF^2+BE^2=EF^2$．

(2)若 $AC=7$，$BC=5$，$EC=1$，直接写出线段 AF 的长．

（23-24 八年级上·陕西西安·期中）

24．如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=90^{\circ}$，D 是斜边 BC 的中点，$DE\perp BC$ 交 AB 于点 E，连接 CE．



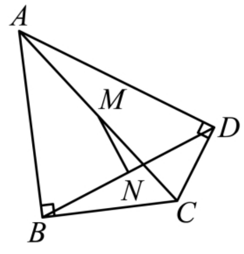
(1)求证：$BE^2-AE^2=AC^2$；

(2)若 $AC=6$，$BD=5$，求 $\triangle ACE$ 的周长及 AE 的长．

【考点题型七】利用勾股定理证明线段的平方关系

（24-25 八年级上·江苏泰州·期中）

25．如图，$\angle ABC=\angle ADC=90^{\circ}$，$M$，$N$ 分别是 AC，BD 的中点．

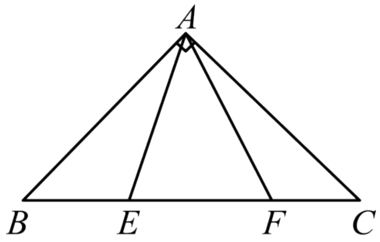


(1)猜想 MN 与 BD 的位置关系？并证明你的猜想．

(2)直接写出 AC 、BD、MN 三者之间的数量关系：________

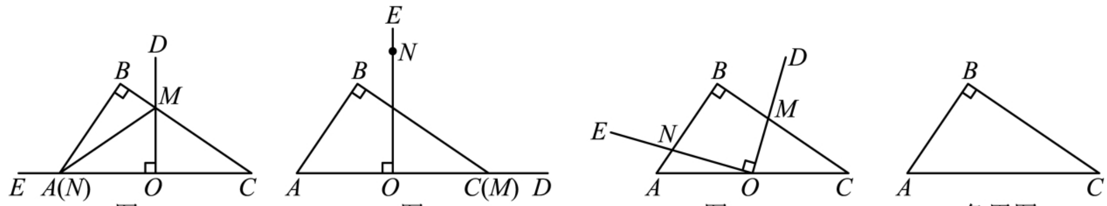
（23-24 八年级下·福建莆田·阶段练习）

26．如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90°,\angle EAF=45°$，求证：$BE^2+CF^2=EF^2$．



（23-24 八年级上·四川成都·期中）

27．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，O 为 AC 中点，$\angle DOE=90°$，射线 OD 、OE 分别交直线 BC 、AB 于 M 、N ．



(1)如图 1，OA 在射线 OE 上，连接 MN ，试判断 CM 、BM 、BN 之间的数量关系并证明；

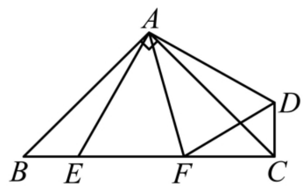
(2)如图 2，OC 在射线 OD 上，将 $\angle DOE$ 绕点 O 逆时针旋转 $\alpha°$．

①如图 3，当射线 OE 交线段 AB 于点 N 时，求证：$BM^2+BN^2=CM^2+AN^2$；

②当 $0<\alpha<180$ 时，若 $AB=3$，$BC=4$，当 $BM=1$ 时，求 AN 的长度．

（23-24 八年级上·广东茂名·阶段练习）

28．如图，E．F 是等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的两动点，$\angle EAF=45°$，$CD\perp BC$ 且 $CD=BE$．求证：



(1) $\triangle ABE\cong\triangle ACD$；

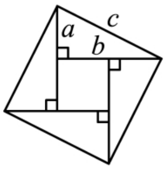
(2) $EF^2=BE^2+CF^2$；

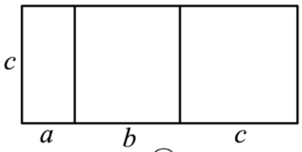
(3)连接 DE，若 $BC=8$，求 DE 的最小值．

【考点题型八】勾股定理的证明方法

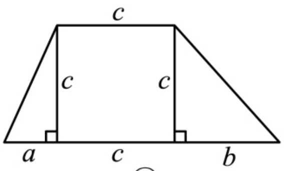
（23-24 八年级上·吉林长春·期末）

29．人们很早就发现直角三角形的三边a,b,c满足的关系$a^2+b^2=c^2$，我国汉代“赵爽弦图”（如图）就巧妙的利用图形面积证明了这一关系．下列几何图形中，可以正确的解释直角三角形三边这一关系的图有_____．（直接填写图序号）

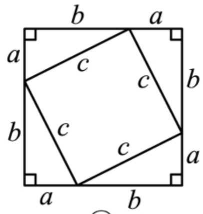




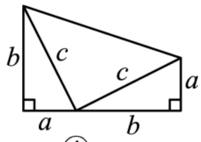
①



②



③



④

（24-25八年级上·江苏常州·期中）

30．勾股定理是几何学中的明珠，充满着魅力，图1中的2个全等的直角三角形可以拼成不同的图形，用来证明勾股定理．

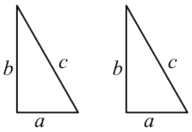


图1

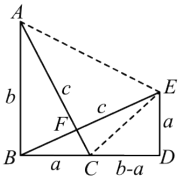


图2

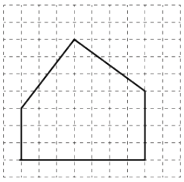


图3(1)

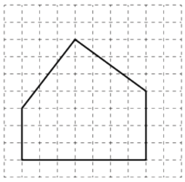


图3(2)

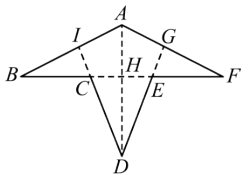


图4

(1)把两个全等的直角$\triangle ABC$和$\triangle DEA$如图2放置，其三边长分别为a，b，c，$\angle ABC=\angle BDE=90°$，可得$AC\perp BE$．请用$a$，$b$，$c$分别写出梯形$ABDE$，四边形$ABCE$，$\triangle CDE$的面积，再根据这三个图形面积之间的关系，证明勾股定理$a^2+b^2=c^2$．

(2)若图1中$a=3$，$b=4$，图3中方格纸中的小正方形的边长为1，请你用两种不同的方式将图1中两个全等的直角三角形放入图3的两个五边形中，并涂上阴影，则图3（1）中空白部分的面积为________，图3（2）中空白部分的面积为________，从而得到$a^2+b^2=c^2$．

(3)用（2）中4个全等的直角三角形（$AH=a=3$，$BH=b=4$）拼成如图4中的形状，则这个图形外围轮廓（实线）的周长为________．

（23-24八年级上·江苏泰州·期中）

31．勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．

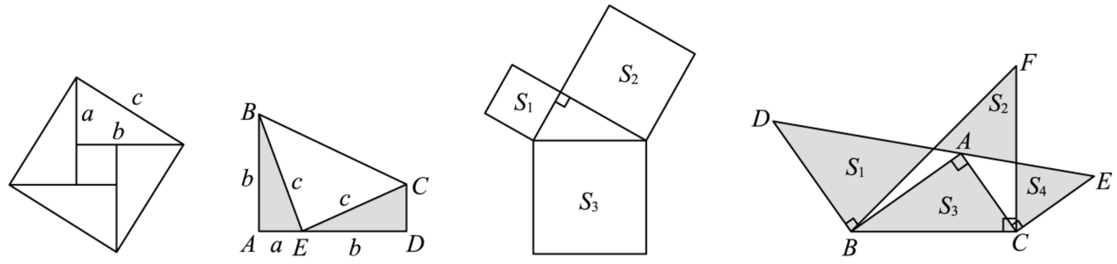


图1　　图2　　图3　　图4

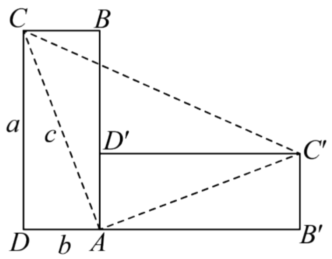
(1)将两个全等的直角三角形按如图所示方式摆放，使点 A、E、D 在同一条直线上，请利用图 2 证明勾股定理.

(2)探究发现：如图 3 以直角三角形的三边为边，向外部作正方形面积分别为 S_1，S_2，S_3，请猜想 S_1，S_2，S_3 的等量关系，并证明你的结论.

(3)拓展应用：如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，分别以 $\triangle ABC$ 的三条边为直角边作三个等腰直角三角形：$\triangle ABD$、$\triangle ACE$、$\triangle BCF$，若图中阴影部分的面积 $S_1=7.5$，$S_2=3.5$，$S_3=5.5$，则 S_4_.

（23-24 八年级上·江苏宿迁·期中）

32．如图，火柴盒的侧面为长方形 $ABCD$，其中 $CD=a$，$AD=b$，$AC=c$．把直立的火柴盒放倒，侧面 $ABCD$ 旋转至长方形 $AB'C'D'$ 处（如图）.



(1) $S_{\triangle ADC}=$________，$S_{\triangle AB'C'}=$________，$S_{\triangle ACC'}=$________；（用 a、b、c 有关代数式表示）$S_{四边形CDB'C'}=$________；（用 a、b 有关代数式表示）

(2)由（1）的结论证明勾股定理：$a^2+b^2=c^2$；

(3)若 $a+b=7$，$c=5$，求 $S_{\triangle ADC}$ 的值.

【考点题型九】以弦图为背景的计算题

（23-24 八年级上·广西南宁·期末）

33．数学家波利亚说过：“为了得到一个方程，我们必须把同一个量用两种不同的方法表示出来，即将一个量算两次，从而建立等量关系．”类似的，我们可以用两种不同的方法来表示同一个图形的面积，从而得到一个等式．

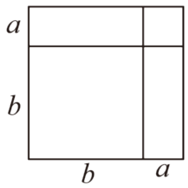


图1

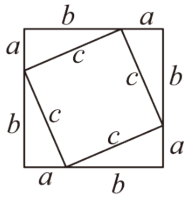


图2

(1)如图1，大正方形是由两个小正方形和两个形状大小完全相同的长方形拼成，请用两种不同的方法表示图中大正方形的面积．

方法1：$S_{大正方形}=$______；方法2：$S_{大正方形}=$______；

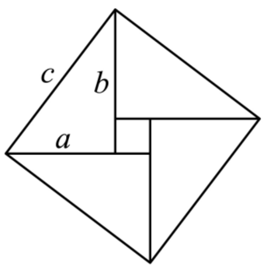
根据以上信息，可以得到的等式是______；

(2)如图2，大正方形是由四个边长分别为a，b，c的直角三角形（c为斜边）和一个小正方形拼成，请用两种不同的方法分别表示小正方形的面积，并推导得到a，b，c之间的数量关系；

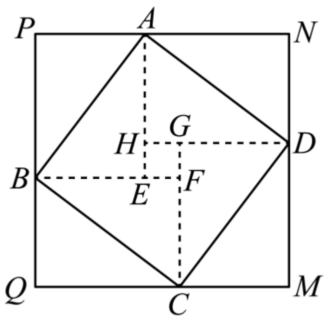
(3)在（2）的条件下，若$a=3$，$b=4$，求斜边c的值．

（23-24八年级上·江苏泰州·阶段练习）

34．用四个全等的直角三角形拼成如图①所示的大正方形，中间也是一个正方形．它是美丽的弦图．其中四个直角三角形的直角边长分别为a，b（$a<b$），斜边长为c．



图①



图②

(1)结合图①，求证：$a^2+b^2=c^2$；

(2)如图②③，将八个全等的直角三角形紧密地拼接成正方形$PQMN$，记正方形$PQMN$、正方形$ABCD$、正方形$EFGH$的面积分别为S_1、S_2、S_3，若$S_1+S_3=20$，求S_2．

（22-23八年级上·江苏·期中）

35．我国三国时期的数学家赵爽利用四个全等的直角三角形拼成如图1的“弦图”（史称“赵

爽弦图”）　.

(1)弦图中包含了一大一小两个正方形，已知每个直角三角形较长的直角边为a，较短的直角边为b，斜边长为c，结合图1，试验证勾股定理；

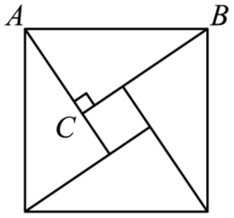


图1

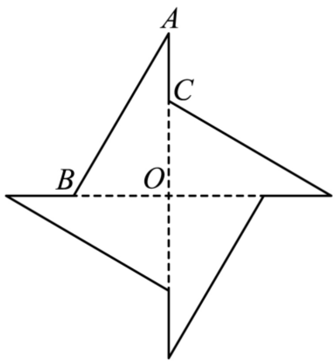


图2

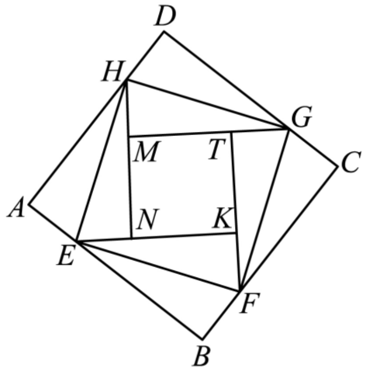


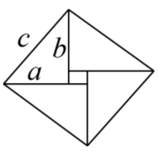
图3

(2)如图2，将四个全等的直角三角形紧密地拼接，形成“勾股风车”，已知外围轮廓（粗线）的周长为24，$OC=3$，求该“勾股风车”图案的面积；

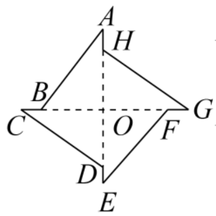
(3)如图3，将八个全等的直角三角形（外围四个和内部四个）紧密地拼接，记图中正方形$ABCD$，正方形$EFGH$，正方形$MNKT$的面积分别为S_1、S_2、S_3，若$S_1+2S_2+S_3=20$，则$S_2=$_.

（21-22八年级下·贵州遵义·阶段练习）

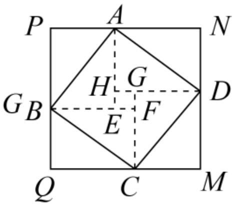
36．用四个全等的直角三角形拼成如图①所示的大正方形，中间也是一个正方形，它是美丽的弦图，其中四个直角三角形的直角边长分别为a，　b　（$a<b$），斜边长为c　.



图①



图②



图③

(1)结合图①，求证：$a^2+b^2=c^2$；

(2)如图②，将这四个全等的直角三角形无缝隙无重叠地拼接在一起，得到图形$ABCDEFGH$．若该图形的周长为48，OH=6．求该图形的面积；

(3)如图③，将八个全等的直角三角形紧密地拼接成正方形$PQMN$，记正方形$PQMN$、正方形$ABCD$、正方形$EFGH$的面积分别为S_1、S_2、S_3，$S_1+S_2+S_3$=24，S_2=_.

【考点题型十】用勾股定理构造图形解决问题

解题方法：勾股定理是解决三角形中线段问题最有效的方法之一，若图中没有含特征线段的直角三角形，则需添加辅助线，构造满足条件的直角三角形.

（23-24 八年级上·江苏南京·期末）

37．在$\triangle ABC$中，$BC=a,AC=b,AB=c$，且$c\geq b\geq a$．

(1)当$\triangle ABC$是锐角三角形时，小明猜想：$a^2+b^2>c^2$．以下是他的证明过程：

小明的证明过程

如图①，过点A作$AD\perp CB$，垂足为D．设$CD=x$．

$\because$在$Rt\triangle ADC$中，$AD^2=b^2-x^2$，

在$Rt\triangle ADB$中，$AD^2=$__①__，

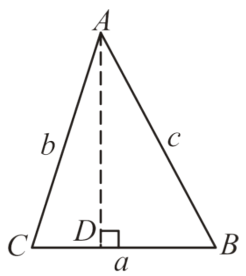
$\therefore b^2-x^2=$__①__．

化简得，$a^2+b^2-c^2=2ax$．

$\because a>0,x>0,\therefore$__②__$>0$．

$\therefore a^2+b^2-c^2>0.$

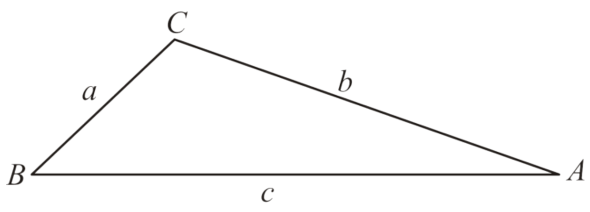
$\therefore a^2+b^2>c^2.$



图①

其中，①是______；②是______．

(2)如图②，当$\triangle ABC$是钝角三角形时，猜想a^2+b^2与c^2之间的关系并证明．



图②

（24-25 八年级上·辽宁沈阳·期中）

38．【问题背景】

在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且$c\geq b\geq a$．若$\angle C$为直角，则$a^2+b^2=c^2$；若$\angle C$

为锐角或钝角，则a^2+b^2与c^2之间有怎样的大小关系呢？

【探究结论】

（1）当$\triangle ABC$是锐角三角形时，小明猜想：$a^2+b^2>c^2$．以下是他的证明过程：

如图1，过点A作$AD\perp CB$，垂足为D．设$CD=x$．

$\because$在Rt$\triangle ADC$中，$AD^2=b^2-x^2$，

在Rt△ADB中，$AD^2=$①，$\therefore b^2-x^2=$①.

化简得，$a^2+b^2-c^2=2ax$．

$\because a>0$，$x>0$，$\therefore$②>0．$\therefore a^2+b^2-c^2>0$．

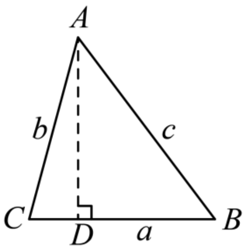
$\therefore a^2+b^2>c^2$．

其中，①是_；②是_.

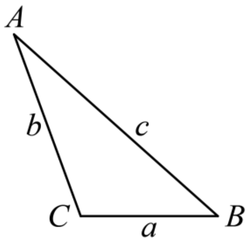
（2）如图2，当$\triangle ABC$是钝角三角形时，猜想a^2+b^2与c^2之间的关系，并证明．

【拓展应用】

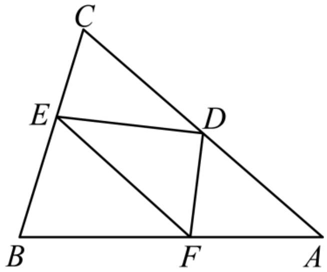
（3）如图3，在$\triangle ABC$中，$\angle B$为锐角，点D是AC的中点，点E在BC上，点F在AB上．若$CE=5$，$EF=11$，$\angle EDF=90^\circ$，求AF长的最大整数值．



(图1)



(图2)



(图3)

【考点题型十一】根据已知条件判断能否构成直角三角形

（24-25八年级上·江苏宿迁·期中）

39．满足下列条件的$\triangle ABC$不是直角三角形的是（ ）

A．$a=1,b=2,c=\sqrt{3}$ B．$a:b:c=3:4:5$

C．$\angle A+\angle B=\angle C$ D．$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$

（24-25八年级上·辽宁沈阳·期中）

40．在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边，在下列条件中，不能确定$\triangle ABC$是直角三角形的是（　　）

A．$a^2+c^2=b^2$ B．$a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

C．$a=2$，$b=3$，$c=4$　　D．$\angle A:\angle B:\angle C=1:1:2$

（24-25 八年级上·广东深圳·期中）

41．已知△ABC中，a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边，下列条件中不能判断△ABC是直角三角形的是（　）

A．$b^2-c^2=a^2$　　B．$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$

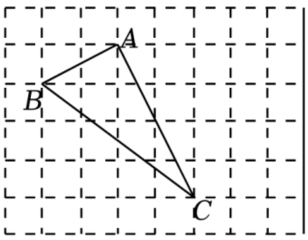
C．$\angle A=\angle B-\angle C$　　D．$a:b:c=8:15:17$

【考点题型十二】网格中判断直角三角形

解题方法：根据勾股定理求出三角形三边长，再根据勾股定理逆定理判断△ABC是否是直角三角形

（24-25 八年级上·广东茂名·期中）

42．如图，在边长为 1 的正方形组成的网格图中，$\triangle ABC$的三个顶点均在格点上

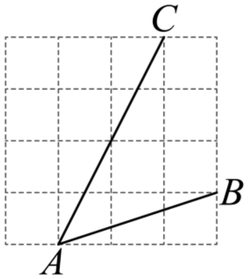


(1)求$\triangle ABC$的周长；

(2)试判断$\triangle ABC$的形状．

（24-25 八年级上·河北保定·期中）

43．如图，网格中每个小正方形的边长都是 1，且 A，B，C 都在格点（每个小正方形的顶点）上．



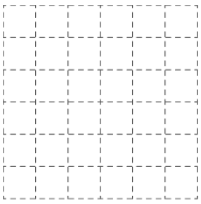
(1)填空：$AB=$ ______，$AC=$______．

(2)求$\angle BAC$的度数．

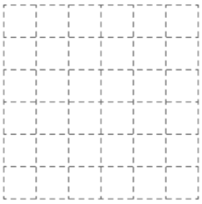
（24-25 八年级上·辽宁锦州·阶段练习）

44．如图，正方形网格中的每个小正方形边长都是 1，每个小格的顶点叫做格点，以格点为

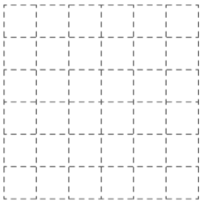
顶点分别按下列要求画三角形.



图a



图b



图c

(1)在图（a）中，画一个直角三角形，使它的三边长都是有理数；

(2)在图（b）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为$\sqrt{17}$；

(3)在图（c）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为5，直角边长都是无理数.

【考点题型十三】勾股数

判断方法：1）确定是三个正整数a，b，c；

2）确定最大的数c；

3）计算较小的两个数的平方a^2+b^2是否等于c^2.

（22-23 八年级下·湖北咸宁·阶段练习）

45．下列各组数不是勾股数的是（　）

A．$a=3,b=4,c=5$　　B．$a=30,b=40,c=50$

C．$a=8,b=15,c=17$　　D．$a=7,b=14,c=15$

（22-23 八年级下·黑龙江哈尔滨·期末）

46．如果m表示大于1的整数，$a=2m$，$b=m^2-1$，$c=m^2+1$，求证：a，b，c为勾股数.

（23-24 八年级下·安徽芜湖·期中）

47．能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，我们称为勾股数，观察下面表格中左栏给出的三个正整数a，b，$c\left(a<b<c\right)$.

a，b，c	
3，4，5	$3^2+4^2=5^2$
5，12，13	$5^2+12^2=13^2$
7，24，25	$7^2+24^2=25^2$
9，40，41	$9^2+40^2=41^2$
…	…

15，b，c	$15^2+b^2=c^2$
…	…

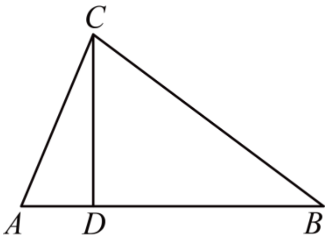
(1)写出它们的共同点．（写出两条即可）

(2)当$a=15$时，求 b，c 的值．

【考点题型十四】利用勾股定理逆定理求解

（23-24 八年级上·江苏扬州·期末）

48．如图所示，在$\triangle ABC$中，$AC=13$，$BC=20$，$CD=12$，$AD=5$．求：

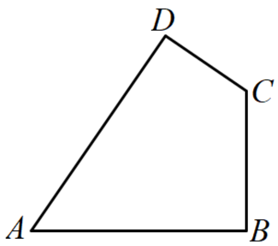


(1) BD的长；

(2)点 D 到 BC 的距离．

（20-21 八年级上·江苏扬州·期末）

49．如图，在四边形$ABCD$中，$AB=20, BC=15, CD=7, AD=24, \angle ABC=90°$．

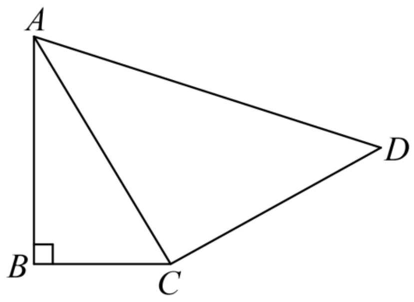


(1)求$\angle ADC$的度数；

(2)求出四边形$ABCD$的面积．

（23-24 八年级下·全国·期末）

50．如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B=90°$，$AB=\sqrt{3}$，$\angle BAC=30°$，$CD=2$，$AD=2\sqrt{2}$，求$\angle ACD$的度数．



（23-24 八年级下·广东肇庆·期末）

51．【再读教材】我们八年级下册数学课本第16页介绍了“海伦－秦九韶公式”：如果一个三角形的三边长分别为a，b，c，记$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，那么三角形的面积为$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$．

【解决问题】已知，在$\triangle ABC$中，$AC=5$，$BC=4$，$AB=3$．

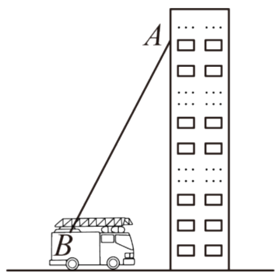
(1)请你用“海伦－秦九韶公式”求$\triangle ABC$的面积；

(2)除了利用“海伦－秦九韶公式”求$\triangle ABC$的面积外，你有其它解法吗？请写出你的解法．

【考点题型十五】勾股定理的简单应用

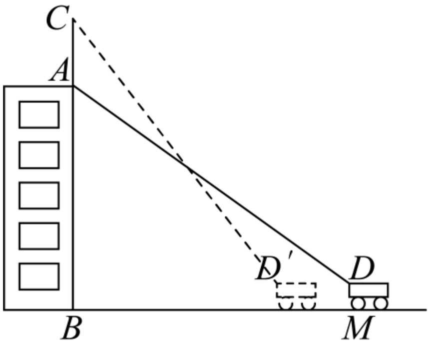
（23-24 八年级上·江苏常州·期末）

52．防火安全无小事，时时处处需留心．一天晚上，某居民楼的点A处着火，消防大队派出云梯消防车展开紧急救援．已知点A离地面28米，消防车的云梯底部（点B)与地面的垂直距离是4米，与居民楼的水平距离是10米．云梯需要伸长多少米才能到达着火处？



（23-24 八年级上·江苏泰州·期末）

53．如图，学校高17m的教学楼AB上有一块高5m的校训宣传牌AC，为美化环境，对校训牌AC进行维护．一辆高2m的工程车在教学楼前点M处，伸长25m的云梯（云梯最长25m）刚好接触到AC的底部点A处．问工程车向教学楼方向行驶多少米，长25m的云梯刚好接触到AC的顶部点C处？



（22-23 八年级上·江苏淮安·期末）

54．勾股定理是人类早期发现并证明的重要数学定理之一，是用代数思想解决几何问题的最重要的工具之一，它不但因证明方法层出不穷吸引着人们，更因为应用广泛而使人着迷．

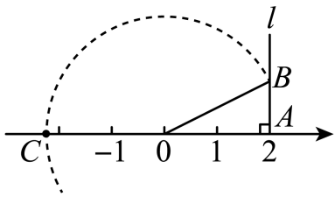


图1

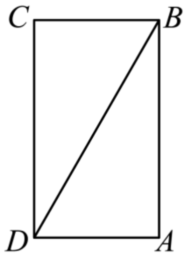


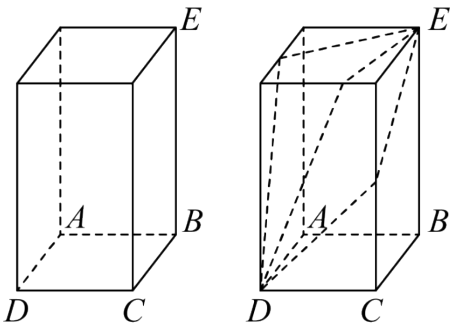
图2

(1)应用场景 1——在数轴上画出表示无理数的点．如图 1，在数轴上找出表示 2 的点 A，过点 A 作直线 l 垂直于 OA，在 l 上取点 B，使 $AB=1$，以原点 O 为圆心，OB 为半径作弧，则弧与数轴负半轴的交点 C 表示的数是__________；

(2)应用场景 2——解决实际问题．如图 2，有一个小朋友拿着一根竹竿要通过一个长方形的门，如果把竹竿竖放就比门高出 2 尺，斜放就恰好等于门的对角线（BD），已知门宽 6 尺，求竹竿长．

（22-23 八年级下·湖南永州·阶段练习）

55．如图是长 $AB=4\text{cm}$、宽 $BC=3\text{cm}$、高 $BE=12\text{cm}$ 的长方体容器．



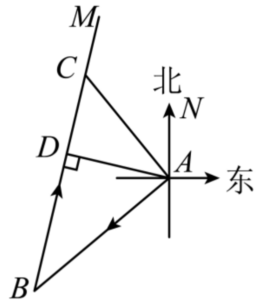
(1)求底面矩形 $ABCD$ 的对角线的长；

(2)长方体容器内可完全放入的棍子最长是多少？

(3)一只蚂蚁从 D 点爬到 E 点最短路径是多少？

（20-21 八年级上·江苏盐城·期末）

56．一艘轮船从 A 港向南偏西 48°方向航行 100km 到达 B 岛，再从 B 岛沿 BM 方向航行 125km 到达 C 岛，A 港到航线 BM 的最短距离是 60km．

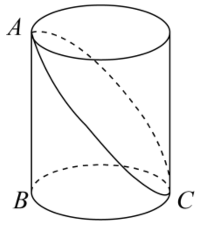


(1)若轮船速度为 25km/小时，求轮船从 C 岛沿 CA 返回 A 港所需的时间．

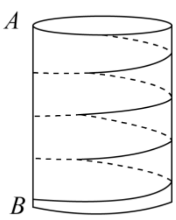
(2)C 岛在 A 港的什么方向？

（21-22 八年级上·江西景德镇·期中）

57．如图，已知圆柱底面的周长为 12，圆柱的高为 8，在圆柱的侧面上，过点 A，C 嵌有一圈长度最短的金属丝．

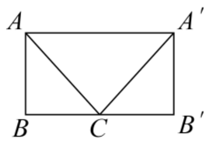


图①

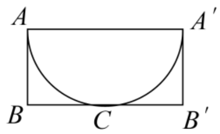


图②

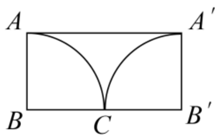
(1)现将圆柱侧面沿 AB 剪开，所得的圆柱侧面展开图是______．



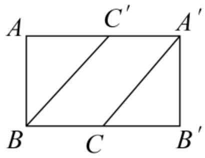
A



B



C



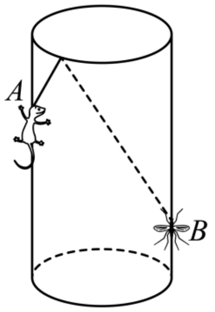
D

(2)如图①，求该长度最短的金属丝的长．

(3)如图②，若将金属丝从点 B 绕四圈到达点 A，则所需金属丝最短长度是多少？

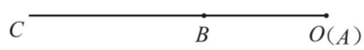
（21-22 八年级·全国·假期作业）

58．如图，圆柱形容器的高为 120cm，底面周长为 100cm，在容器内壁离容器底部 40cm 的点 B 处有一蚊子，此时一只壁虎正好在容器外壁，离容器上沿 40cm 与蚊子相对的点 A 处，求壁虎捕捉蚊子的最短距离．

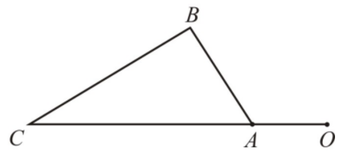


（21-22 八年级上·江苏南京·期末）

59．滑撑杆在悬窗中应用广泛．如图，某款滑撑杆由滑道OC，撑杆AB、BC组成，滑道OC固定在窗台上．悬窗关闭或打开过程中，撑杆AB、BC的长度始终保持不变．当悬窗关闭时，如图①，此时点A与点O重合，撑杆AB、BC恰与滑道OC完全重合；当悬窗完全打开时，如图②，此时撑杆AB与撑杆BC恰成直角，即$\angle B=90°$，测量得$OA=12\text{cm}$，撑杆$AB=15\text{cm}$，求滑道OC的长度．



图①

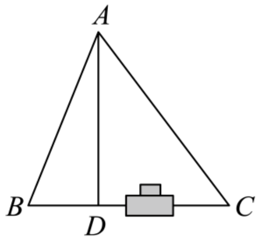


图②

【考点题型十六】勾股定理逆定理的实际应用

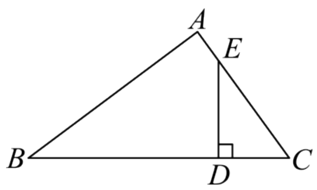
（23-24 八年级下·辽宁抚顺·期末）

60．某工程的测量人员在规划一块如图所示的三角形地时，由于在BC上有一处古建筑，使得BC的长不能直接测出，于是工作人员在BC上取一点D，测得$AD=120$米，$BD=50$米后，又测得$AB=130$米，$AC=150$米，请你根据测量数据，求出BC的长度．



（23-24 八年级上·吉林长春·期中）

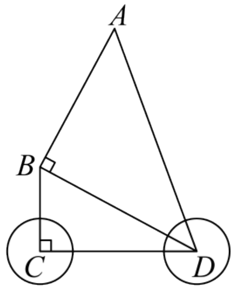
61．如图，一块三角形空地ABC，计划将这块三角形空地分割成四边形$ABDE$和$\triangle EDC$，分别摆放甲、乙两种不同的花卉，经测量，$\angle EDC=90°$，$DC=3$，$CE=5$，$BD=7$，$AB=8$，$AE=1$，求四边形$ABDE$的面积．



（23-24 八年级下·广东云浮·期中）

62．3 月 15 日是国际消费者权益日，广东各地开展“3·15”消费维权活动，重拳出击，推进高质量发展，营造良好消费环境．图①是某品牌婴儿车，图②为其简化结构示意图．根据安全标准需满足 $BC \perp CD$，现测得 $AB = CD = 6\text{dm}$， $BC = 3\text{dm}$， $AD = 9\text{dm}$，其中 AB 与 BD 之间由一个固定为$90°$的零件连接（即$\angle ABD = 90°$），通过计算说明该车是否符合安全标准．

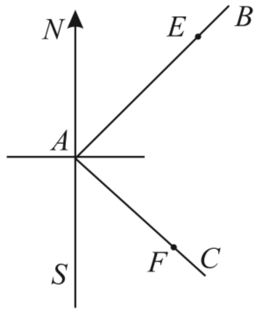
①



②

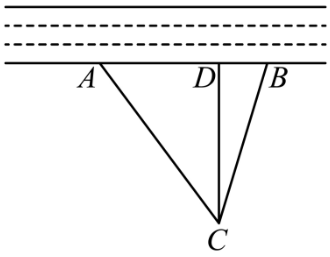
（23-24 八年级下·全国·期末）

63．如图，甲、乙两艘轮船同时从港口 A 出发，分别沿 AB 方向和 AC 方向航行，甲船速度为 16 海里/时，乙船速度为 12 海里/时，离开港口 1 小时后两船分别到达点 E，F 处，且相距 20 海里．若甲船沿东北方向航行，则乙船沿哪个方向航行？



（23-24 八年级下·辽宁盘锦·期末）

64．在一条东西走向的河流一侧有一村庄C，河边原有两个取水点A,B，其中$AB = AC$，由于某种原因，由C到A 的路现在已经不通，该村为方便村民取水，决定在河边新建一个取水点D（A,D,B在同一条直线上），并新修一条路CD，测得$CB = 6.5$千米，$CD = 6$千米，$BD = 2.5$千米．



(1)求$\angle CDB$的度数；

(2)求原来的路线AC的长．

1．5或$\sqrt{7}$ ##$\sqrt{7}$或5

【分析】此题考查了勾股定理．分两种情况：①当4和3为直角边长时，由勾股定理求出斜边即可；②当4为斜边长时，由勾股定理求出第三边长即可；即可得出结果．

【详解】解：分两种情况：

①当4和3为直角边长时，第三边长为斜边$=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ；

②当4为斜边长时，第三边长为$=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$．

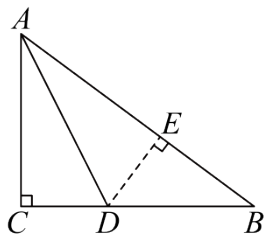
综上所述：直角三角形的第三边长为5或$\sqrt{7}$．

故答案为：5或$\sqrt{7}$．

2．$\frac{9}{2}$

【分析】本题主要考查解平分线的性质，勾股定理．过点D作$DE\perp AB$于点E，由角平分线性质定理得$DE=CD$，由勾股定理求出BC，最后根据三角形面积可求出DE．

【详解】解：如图，过点D作$DE\perp AB$于点E，



$\because AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore DE=CD$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，由勾股定理得，

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12$，

又$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}$，

$\therefore \frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}AC\times CD+\frac{1}{2}AB\times DE$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 9\times 12=\frac{1}{2}\times 9\times DE+\frac{1}{2}\times 15\times DE$，

解得，$DE=\frac{9}{2}$，

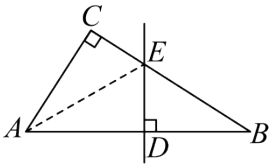
即：点D到AB的距离是$\frac{9}{2}$，

故答案为：$\frac{9}{2}$.

3．4

【分析】本题考查的是线段垂直平分线的性质及勾股定理，根据线段垂直平分线性质先求出$AE=BE=5$，再根据勾股定理求出AC即可.

【详解】解：连接AE，



$\because AB$的垂直平分线交BC于点E，$BE=5$，

$\therefore AE=BE=5$，

$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，$CE=3$，

$\therefore AC=\sqrt{5^{2}-3^{2}}=4$，

故答案为：4.

4．15

【分析】本题考查了勾股定理，三角形中线的性质，先根据勾股定理求得$AC=12$，进而求得$S_{\triangle ABC}=30$，根据三角形中线的性质，即可求解.

【详解】解：$\because$在$\triangle ABC$中，$AB\perp AC$，$AB=5\mathrm{cm}$，$BC=13\mathrm{cm}$，

$\therefore AC=\sqrt{BC^{2}-AB^{2}}=12\mathrm{cm}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=30$，

$\because BD$是边 AC 上的中线，则$\triangle BCD$的面积是$\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 30=15$，

故答案为：15.

5．5

【分析】本题主要考查两点间的距离公式，根据两点之间的距离公式计算即可.

【详解】解：点$P(-3,-4)$到原点的距离是$\sqrt{(-3)^{2}+(-4)^{2}}=5$，

故答案为：5.

6．$2\sqrt{5}$

【分析】本题考查两点间的距离公式：设有两点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则这两点间的距离为$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^{2}+(y_1-y_2)^{2}}$，直接利用两点间的距离公式求解，熟练掌握两点间的距离

公式是解此题的关键.

【详解】解：$\because A\left(2,-1\right)$、$B\left(-2,-3\right)$，

$\therefore$点A和点B的距离$=\sqrt{\left[2-\left(-2\right)\right]^2+\left[-1-\left(-3\right)\right]^2}=2\sqrt{5}$，

故答案为：$2\sqrt{5}$.

7．$\frac{12}{5}$##2.4##$2\frac{2}{5}$

【分析】本题考查利用勾股定理求两点间得距离，以及平方式非负，根据点$E\left(4t+8,-3t-3\right)$，表示出OE，再利用$\left(x+\frac{41}{25}\right)^2\geq 0$求出$OE^2$最小值，即可解题.

【详解】解：$\because$点$E\left(4t+8,-3t-3\right)$，

$\therefore OE^2=\left(4t+8\right)^2+\left(-3t-3\right)^2$，

整理得$OE^2=25t^2+82t+73=25\left(x+\frac{41}{25}\right)^2+\frac{144}{25}$，

$\because \left(x+\frac{41}{25}\right)^2\geq 0$，

$\therefore 25\left(x+\frac{41}{25}\right)^2\geq 0$，

$\therefore 25\left(x+\frac{41}{25}\right)^2+\frac{144}{25}\geq\frac{144}{25}$

$\therefore OE^2$有最小值为$\frac{144}{25}$，

即OE的最小值为$\frac{12}{5}$，

故答案为：$\frac{12}{5}$.

8．25

【分析】本题考查了勾股定理，根据勾股定理求出AB的平方即为S_1+S_2的值，熟练掌握勾股定理，采用数形结合的思想是解此题的关键.

【详解】解：在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，由勾股定理得，$AB^2=AC^2+BC^2=5^2=25$，

$\because AC^2=S_1, BC^2=S_2$，

$\therefore S_1+S_2=25$，

故答案为：25．

9．4

【分析】题目主要考查勾股定理解三角形及圆的面积，根据题意得出$AB^2=AC^2+BC^2$，$\frac{1}{8}\pi AB^2=9,\frac{1}{8}\pi BC^2=5$，然后求解即可．

【详解】解：$\because\triangle ABC$中$\angle ACB=90°$，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，

$\because$以AB、BC为直径的半圆面积分别为9和5，

$\therefore \pi\times\left(\frac{1}{2}AB\right)^2\times\frac{1}{2}=9,\pi\times\left(\frac{1}{2}BC\right)^2\times\frac{1}{2}=5$，

即$\frac{1}{8}\pi AB^2=9,\frac{1}{8}\pi BC^2=5$，

$\therefore$以AC为直径的半圆面积为：

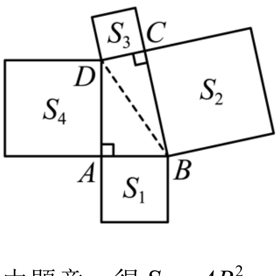
$\pi\times\left(\frac{1}{2}AC\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\pi AC^2=\frac{1}{8}\pi(AB^2-BC^2)=\frac{1}{8}\pi AB^2-\frac{1}{8}\pi BC^2=4$，

故答案为：4．

10．86

【分析】本题主要考查了勾股定理，根据正方形面积计算公式得到$S_1=AB^2$，$S_2=BC^2$，$S_3=CD^2$，，再由勾股定理推出$S_1+S_4=S_2+S_3$，据此可得答案．

【详解】解：如图，连接BD．



由题意，得$S_1=AB^2$，$S_2=BC^2$，$S_3=CD^2$，$S_4=AD^2$．

在Rt△ABD中，由勾股定理得$BD^2=AB^2+AD^2=S_1+S_4$．

在Rt△BCD中，由勾股定理得$BD^2=BC^2+CD^2=S_2+S_3$．

$\therefore S_1+S_4=S_2+S_3$．

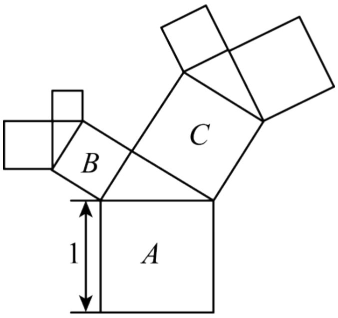
$\therefore S_2 = S_1 + S_4 - S_3 = 135 - 49 = 86$，

故答案为：86．

11．2026

【分析】根据勾股定理求出"生长"了1次后形成的图形中所有的正方形的面积和，结合图形总结规律，根据规律解答即可．本题考查的是勾股定理，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$．

【详解】解：如图，由题意得，正方形 A 的面积为1，由勾股定理得，正方形 B 的面积＋正方形 C 的面积＝1，



∴"生长"了1次后形成的图形中所有的正方形的面积和为2，

同理可得，"生长"了2次后形成的图形中所有的正方形的面积和为3，

∴"生长"了3次后形成的图形中所有的正方形的面积和为4，……

∴"生长"了2025次后形成的图形中所有的正方形的面积和为2026，

故答案为：2026．

12．1

【分析】本题考查了勾股定理，三角形的面积公式，熟练掌握勾股定理是解题的关键．由勾股定理可求 AC 的长，利用割补法求出 $\triangle ABC$ 的面积，由三角形的面积公式求出 BD 即可．

【详解】解：由题意可得：$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 4-\frac{1}{2}\times 1\times 3-\frac{1}{2}\times 1\times 2-1\times 1=\frac{5}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\cdot BD=\frac{5}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 5\times BD=\frac{5}{2}$，

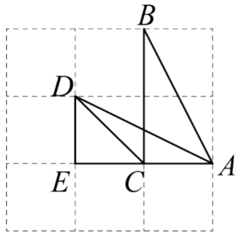
$\therefore BD=1$，

故答案为：1．

13． 45

【分析】本题考查了网格问题，根据网格线段及三角形的特征即可求解．根据勾股定理可得 $AD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，从而得 $AD=AB$,由图推出 $\triangle ABC\cong\triangle ADE$ 得 $\angle B=\angle ADE$，据此即可求解；

【详解】解：如图，



由图可知：$AD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore AD=AB$，

由图可知：$AC=DE, BC=AE, \angle ACB=\angle DEA=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DAE$，

$\therefore \angle B=\angle DAE$，

$\therefore \angle B+\angle ADC=\angle DAE+\angle ADC=\angle DCE=45^\circ$，

故答案为：45

14．$\sqrt{5}+1$

【分析】本题考查了实数与数轴和勾股定理．先根据勾股定理求出圆弧的半径，再求出点 A 到原点的距离，然后结合点 A 在数轴上的位置即可得出答案．

【详解】解：∵正方形网格中每个小正方形的边长为 1，

∴阴影正方形的边长即圆弧半径为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴点 A 到原点的距离是 $\sqrt{5}+1$，

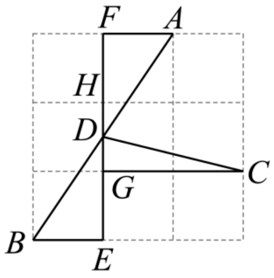
∴点 A 表示的数是 $\sqrt{5}+1$，

故答案为：$\sqrt{5}+1$．

15．$\sqrt{17}$

【分析】先证明 $\triangle ADF\cong\triangle BDE(\mathrm{AAS})$ 则 $DF=DE$，进而得出 $DH=DG=1$，最后根据勾股定理求解即可．

【详解】解：如图，



在$\triangle ADF$和$\triangle BDE$中，

$$\begin{cases}\angle AFD=\angle BED\\ \angle ADF=\angle BDE\\ AF=BE\end{cases},$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BDE(\mathrm{AAS})$，

$\therefore DF=DE$，

$\because FH=EG$，

$\therefore DH=DG=1$，

在Rt$\triangle DCG$中，根据勾股定理得：$CD=\sqrt{DG^2+CG^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ cm，

故答案为：$\sqrt{17}$．

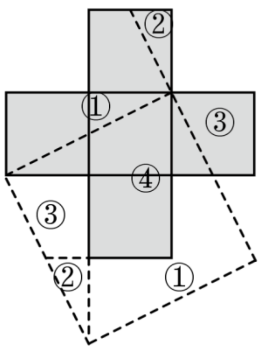
【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定和性质，勾股定理，解题的关键是找出全等三角形，得出边的长度．

16．①③##③①

【分析】设小正方形的边长为1，则5个小正方形的面积为5，进而可知拼成的大正方形的边长为$\sqrt{5}$，再根据所画虚线逐项进行拼接，看哪种剪法能拼成边长为$\sqrt{5}$的正方形即可．

【详解】解：按照①中剪法，在外围四个小正方形上分别剪一刀然后放到相邻的空处，可拼接成边长为$\sqrt{5}$的正方形，符合题意；

如下图所示，按照③中剪法，通过拼接也可以得到边长为$\sqrt{5}$的正方形，符合题意；



按照②中剪法，无法拼接成边长为$\sqrt{5}$的正方形，不符合题意；

故选①③.

故答案为：①③.

【点睛】本题考查图形的拼接，解题的关键在于根据所给小正方形的面积求出所拼接成的正方形的边长.

17．5

【分析】本题考查翻折变换，勾股定理等知识．由翻折的性质可得$CF=C'F$，$BC=B'C'=12$，$\angle C'=\angle C=90°$，由勾股定理可得出答案.

【详解】解：∵四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AB=CD=18$，$\angle C=90°$，

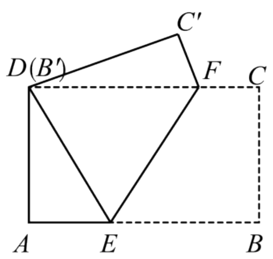
由翻折的性质可知：$CF=C'F$，$BC=B'C'=12$，$\angle C'=\angle C=90°$，

$\therefore DF=CD-CF=18-CF$，

在$\text{Rt}\triangle B'C'F$中，根据勾股定理得：$B'F^2-C'F^2=B'C'^2$，

$\therefore (18-CF)^2-CF^2=12^2$，

$\therefore CF=5$，



故答案为：5.

18．12

【分析】本题考查翻折变换（折叠问题），勾股定理．由折叠可得，$AC=CE$，$DE=AD$，则$CE=6$，$BE=2$，再由$\triangle BDE$的周长$=AB+EB$，即可求解.

【详解】解：由折叠可得，$AC=CE$，$DE=AD$，

$\because AC=6$，$BC=8$，

$\therefore CE=6$，

$\therefore BE=BC-CE=2$，

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

$\therefore \triangle BDE$ 的周长 $=DE+EB+BD=AD+BD+EB=AB+EB=10+2=12$．

故答案为：12．

19．$5\sqrt{2}-5$##$-5+5\sqrt{2}$

【分析】利用勾股定理，三角形不等式计算即可，熟练掌握三角形不等式是解题的关键．

【详解】$\because \angle C=90°$，$CA=CB=5$，

$\therefore AB=\sqrt{CA^2+CB^2}=5\sqrt{2}$，

$\because \triangle ACD$ 沿 AD 折叠，使点 C 落在点 C' 处，

$\therefore AC=AC'=5$，

$\because BC'\geq AB-AC'$，

故当 B，C'，A 三点共线时，BC' 取得最小值，

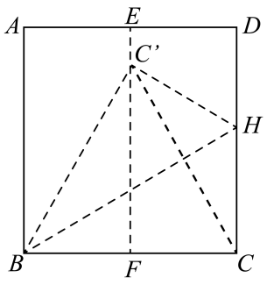
此时 BC' 的最小值为 $5\sqrt{2}-5$，

故答案为：$5\sqrt{2}-5$．

20．$\sqrt{3}$

【分析】连接 CC'，证明△BCC'是等边三角形，再由折叠的性质得到∠HBC=∠HBC'=30°，利用含 30 度角的直角三角形的性质求解即可解决问题．

【详解】解：如图，连接 CC'，



由折叠的性质知，折痕为 EF 是 BC 的垂直平分线，

∴BC'=CC'，

又由折叠的性质知，BC= BC'，∠HBC=∠HBC'，

∴BC'=CC'=BC，

∴△BCC'是等边三角形，

∴∠$C'BC$=60°，

∴∠HBC=∠HBC'=30°，

在 $Rt\triangle HBC$ 中，$\angle HBC$=30°，CH=1cm，

$\therefore HB$=2cm，

$\therefore BC=\sqrt{BH^2-CH^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$（cm），

故答案为：$\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了翻折变换的性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理，解决本题的关键是掌握翻折的性质．

21．21

【分析】根据勾股定理即可解答．

【详解】解：$\because AC\perp BD$，$AB=4$，$CD=\sqrt{5}$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$OA^2+OB^2=AB^2=4^2=16$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 中，$OC^2+OD^2=CD^2=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$，

又 $\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OA^2+OD^2=AD^2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中，$OB^2+OC^2=BC^2$，

$\therefore BC^2+AD^2$

$=\left(OB^2+OC^2\right)+\left(OA^2+OD^2\right)$

$=\left(OB^2+OA^2\right)+\left(OC^2+OD^2\right)$

$=AB^2+CD^2$

$=16+5$

$=21$．

【点睛】本题考查了勾股定理的应用，灵活应用勾股定理是解题关键．

22．(1)证明见解析；

(2) $AD=4\sqrt{3}$；

【分析】本题考查了勾股定理和平方差公式的相关证明和计算及解二元一次方程组，熟练掌握和运用勾股定理是解决问题的关键．

（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，分别运用勾股定理可得 $AB^2=AD^2+BD^2$，$AC^2=AD^2+CD^2$，利用 AD 边相等，联立两式移项即得证．

（2）根据第一问的结论，可求出 BD^2-CD^2 的值，利用平方差公式，结合 $BC=BD+CD=6$，可求得 $BD-CD$，而 $BD+CD=6$，由此可求得 BD、CD，由勾股定理即可求出 AD．

【详解】(1）证明：$\because$ $AD \perp BC$，

$\therefore$ 在$Rt\triangle ABD$和$Rt\triangle ADC$中，根据勾股定理得，

$AB^2 = AD^2 + BD^2$，$AC^2 = AD^2 + CD^2$，

$\therefore$ $AB^2 - BD^2 = AD^2 = AC^2 - CD^2$，

移项得：$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

故$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

（2）解：$\because$ $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$，$AB = 8$，$AC = 2\sqrt{13}$

$\therefore$ $BD^2 - CD^2 = AB^2 - AC^2 = 8^2 - (2\sqrt{13})^2 = 64 - 52 = 12$，

$\therefore$ $BD^2 - CD^2 = (BD + CD)(BD - CD) = 12$，

$\because$ $BC = 6$，即$BD + CD = 6$，

$\therefore$ $BD - CD = 2$，

$\therefore$ $\begin{cases} BD + CD = 6 \\ BD - CD = 2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} BD = 4 \\ CD = 2 \end{cases}$，

$\therefore$ $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$，

$\therefore$ $AD = 4\sqrt{3}$.

23．(1)见解析

(2) $AF = \dfrac{17}{7}$

【分析】本题考查了全等三角形的判定和勾股定理，中垂线的性质；

（1）延长ED至G使$DG = DE$，连接AG，证明$\triangle BDE \cong \triangle ADG$，从而得$DE = AG$，$AG \perp AC$，由$DF \perp DE$得$DF$为$GE$中垂线，故$GF = EF$，在$Rt\triangle AGF$中根据勾股定理即可的结论；

（2）结合（1）中的结论可得$AG = BE = 4$，$EF = GF$，在$Rt\triangle GAF$中利用勾股定理即可解决.

【详解】(1）证明：作$AG \perp AC$，AG交ED延长线于G，连接FG