关于数值积分方法

$$\Omega(t)=C\Omega_0\int_0^{\infty}\frac{e^{-yt/\tau_\upsilon}\,y^{3/2}}{\left[1-\left(\frac{\tau_r}{\tau_\upsilon}+\frac{1}{3}\right)y\right]^2+y\left(1-\frac{\tau_r}{\tau_\upsilon}y\right)^2}dy$$

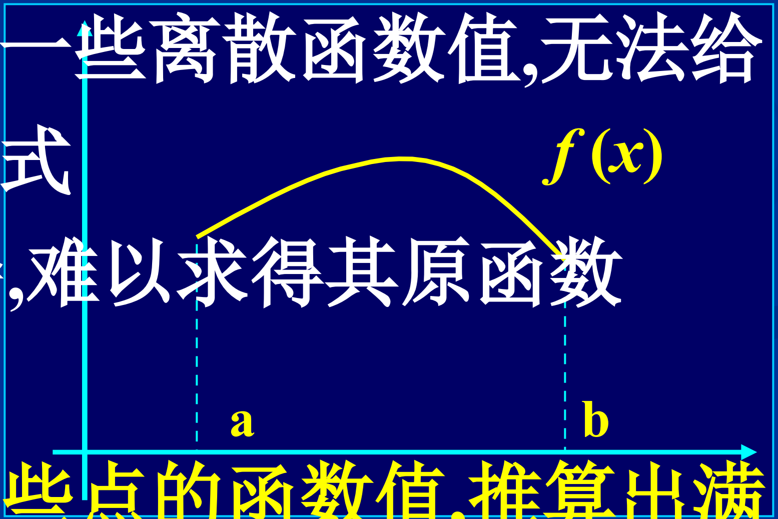
数值积分的应用背景:

1) 被积函数的原函数不能表示为初等函数

2) 某些实际问题仅有一些离散函数值,无法给

3) 出被积函数表达式

3) 被积函数过于复杂,难以求得其原函数



借助于被积函数在一些点的函数值,推算出满足一定精度的定积分近似值---数值积分方法

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx ?$$

预备知识

牛顿—莱布尼兹公式

如果函数$f(x)$在区间[a, b]上连续，且原函数为$F(x)$，则可用牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

来求定积分。

预备知识

积分中值定理

若f是[a, b]上的连续函数，则存在$\xi\in$[a, b]，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

预备知识

广义积分中值定理

若f在[a, b]上连续，g在[a, b]上可积，且$g(x)$在[a, b]上不变号，存在ξ, $\xi\in$[a, b]，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

数值积分问题

牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- 找原函数很困难，有些原函数不能用初等函数表示

$$e^{-x^2}, \frac{\sin x}{x}, \sqrt{1+x^3} \ldots\ldots$$

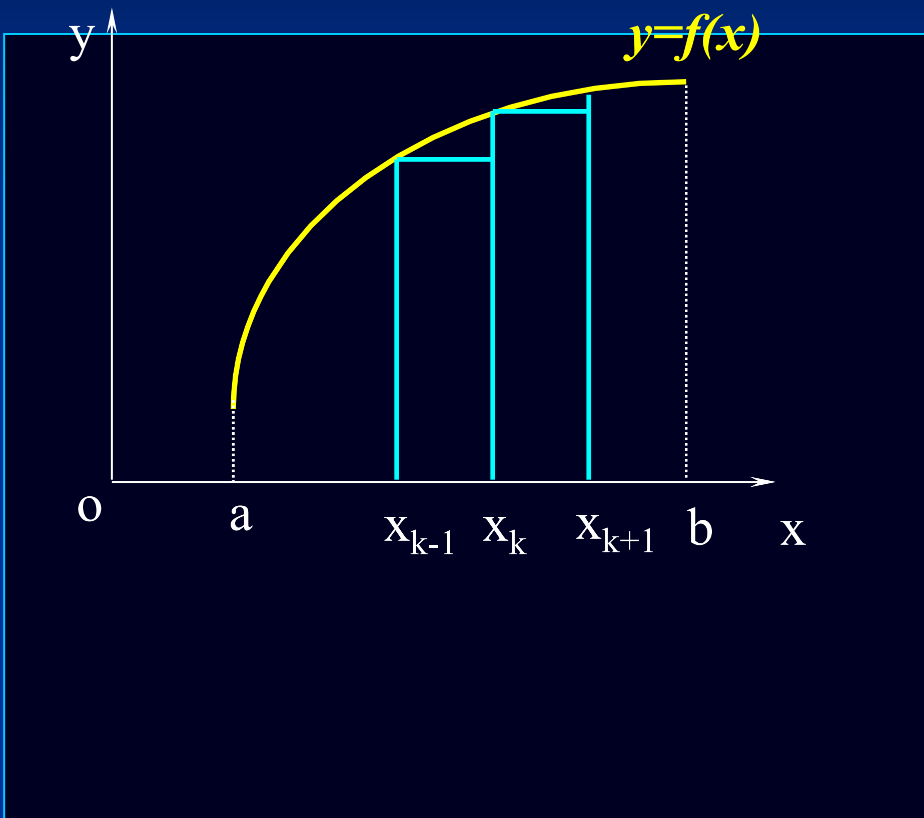
- 原函数表达式过于复杂

$$x^2\sqrt{\left(2x^2+3\right)^3}$$

$$\frac{x^3}{6}\sqrt{\left(2x^2+3\right)^3}+\frac{3x}{16}\sqrt{\left(2x^2+3x\right)^3}-\frac{9x}{32}\sqrt{2x^2+3}-\frac{27}{32\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x^2+3}\right)$$

- $f(x)$是由测量或计算得到的数据表

数值积分问题



$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_k \cdots < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

5.1 插值型求积公式

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_k \cdots < x_n = b$$

$f(x)$在这些节点的值$f(x_i)$，求定积分 $I(f) = \int_a^b f(x)dx$

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$$

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

$$I(f) \approx I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b l_k(x) f(x_k) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b l_k(x) dx \cdot f(x_k)$$

$$I(f) \approx I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \qquad A_k = \int_a^b l_k(x) dx$$

5.1 插值型求积公式

定义

设有计算 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ 的求积公式

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

如其求积系数 $A_k=\int_a^b l_k(x)\,dx, k=0,1,2,\ldots n$ ，则称此求积公式为插值型求积公式. 定积分转换成被积函数的有限个函数值的线性组合，无需求被积函数的原函数.

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\mathrm{d}x$$

其中，ξ 与变量 x 有关

5.1 插值型求积公式

一、梯形公式---两点线性插值

两点公式 $x_0=a, x_1=b, n=1$

$$f(x)\approx L_1(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

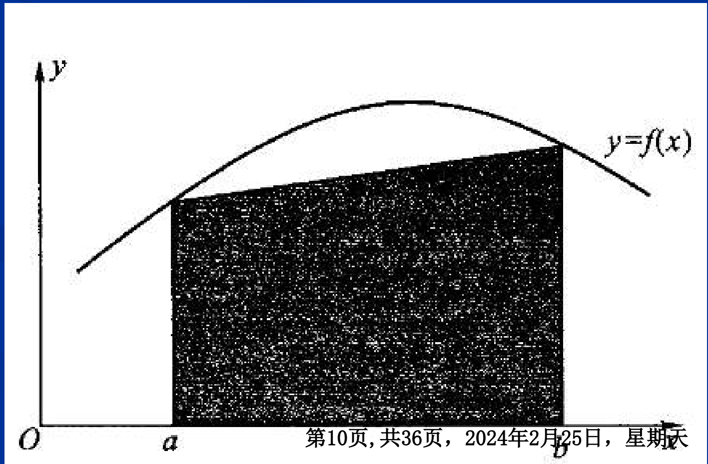
$$A_0=\int_a^b l_0(x)dx=\int_a^b\frac{x-b}{a-b}dx=\frac{1}{2}(b-a)$$

$$A_1=\int_a^b l_1(x)dx=\int_a^b\frac{x-a}{b-a}dx=\frac{1}{2}(b-a)$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

梯形公式： $$T(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

几何意义：用梯形面积代替被积函数的曲边梯形面积



5.1 插值型求积公式

梯形公式误差

$$R[f]=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1)\mathrm{d}x$$

广义积分中值定理

若f在[a, b]上连续，g在[a, b]上可积，且$g(x)$在[a, b]上不变号，存在ξ, $\xi\in$[a, b]，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

利用这一定理

$$R[f]=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\eta\in(a,b)$$

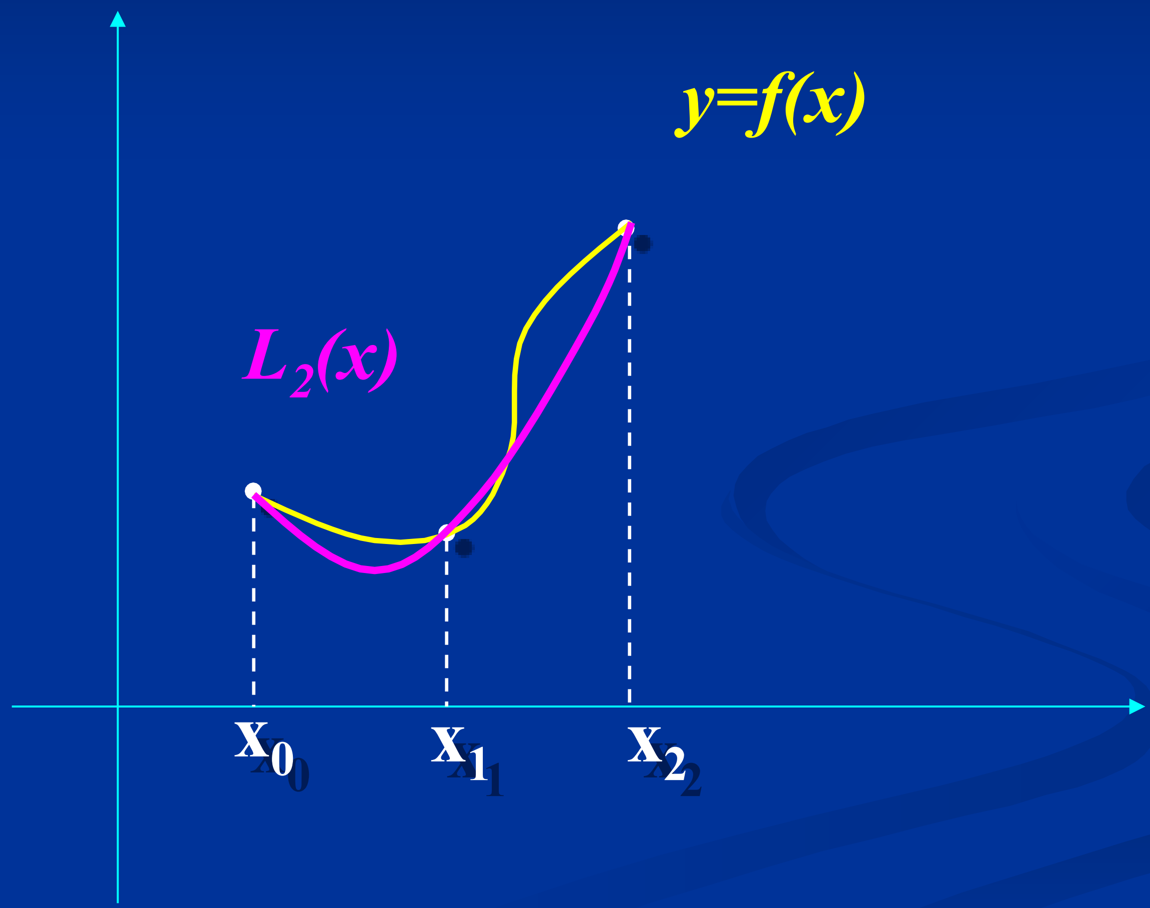
而有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

梯形与曲边梯形面积的对比：$f''(x)$ 在$[a,b]$ 正负决定

5.1 插值型求积公式

三点二次拉格朗日插值积分--辛卜生公式



5.1 插值型求积公式

辛卜生公式: 取x_0=a, x_1=(a+b)/2, x_2=b, n=2

$$A_0=\int_a^b l_0(x)dx=\int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx=\frac{1}{6}(b-a)$$

$$A_1=\int_a^b l_1(x)dx=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx=\frac{2}{3}(b-a)$$

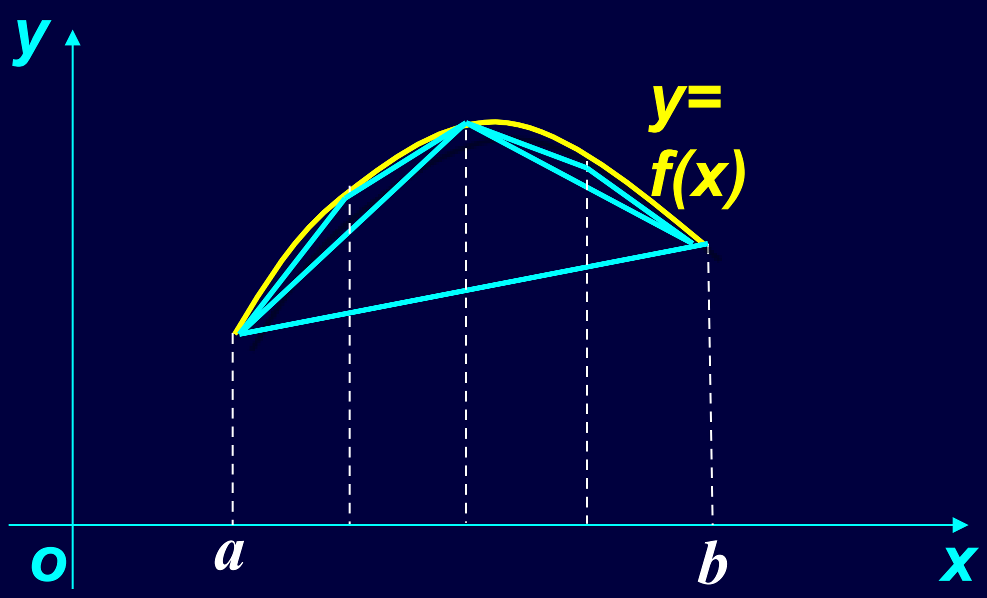
$$A_2=\int_a^b l_2(x)dx=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx=\frac{1}{6}(b-a)$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

辛卜生公式: $S(f)=\dfrac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

误差 $R[f]=\int_a^b \frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)(x-x_1)(x-b)\mathrm{d}x$ 精度较梯形高

5.2 复合梯形公式



分段线性插值--复合梯形法

1. 等分求积区间，比如取步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$，分[a, b]为n等分，分点为

2. $x_k = x_0 + kh$,k = 0, 1, 2,…, n

2. 在区间 [x_k, x_{k+1}]上求 $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$

3. 取和值，作为整个区间上的积分近似值

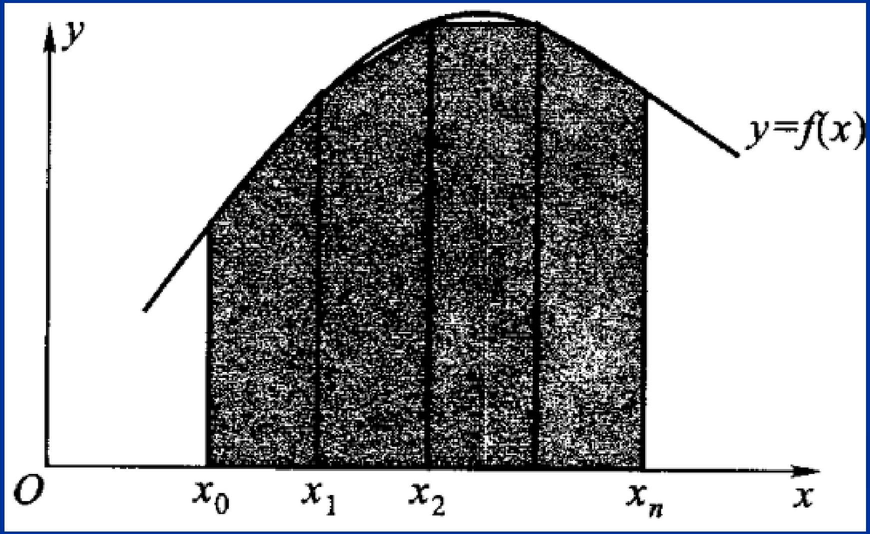
$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$$

复合梯形公式

$$T(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$I_k \approx \frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})] \Rightarrow T_n=\sum_{k=0}^{n-1} I_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$\Rightarrow T_n(f)=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$



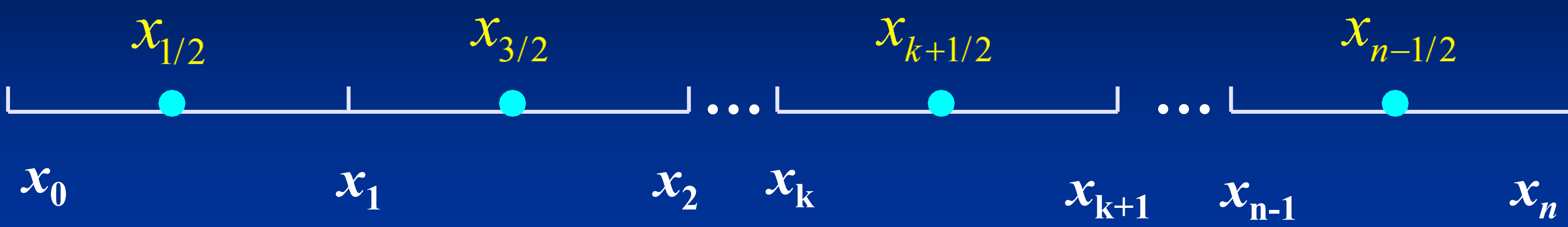
误差由各小区间梯形误差累加

$$R[f]=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

复合梯形公式收敛于定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

小区间增多，误差减小→控制

复合梯形公式(节点加密)



$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)\right]$$

$$I_k \approx \frac{h}{4}\left[f(x_k)+f(x_{k+1/2})\right]+\frac{h}{4}\left[f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})\right]$$

$$I_k \approx \frac{h}{4}\left[f(x_k)+2f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})\right]$$

$$T_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[f(x_k)+2f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})\right]$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) = \frac{1}{2}\left[T_n + h\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+kh+\frac{h}{2}\right)\right]$$

复合梯形公式(节点加密)

由 $T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 递推 $T_1 \to T_2 \to T_4 \to \cdots \to T_n \to T_{2n}$

逐渐逼近，达到计算精度即停止。

通常限定误差允许界 $\varepsilon > 0$，当 $|T_{2n} - T_n| \leqslant \varepsilon$ 条件成立

则终止计算并以T_{2n}为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值