9-5 非稳态导热

一、非稳态导热的基本概念

物体的温度随时间变化的导热过程称为**非稳态导热**。电力设备中的非稳态导热：设备启停过程中，工况变化过程中，物体内部温度场随时间变化。

1.问题描述：

τ $=0$时，物体内的温度分布为 $t=f(x,y,z,0)=t_0$，外界环境温度为 t_f(通常为恒定或线性变化或周期性变化)，分析$t=f(x,y,z,\tau)$。

非稳态导热经历的两个阶段：

•**非正规状况阶段**：物体中的温度分布受初始温度分布的影响很大。

•**正规状况阶段**：初始温度分布的影响逐渐消失，物体中不同时刻的温度分布主要取决于边界条件和物性参数。

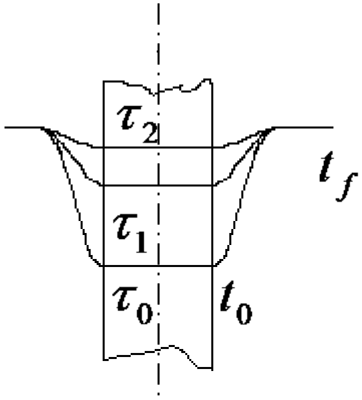
2.非稳态导热问题的求解方法：

- 分析法；
- 数值解法；
- 模拟法。

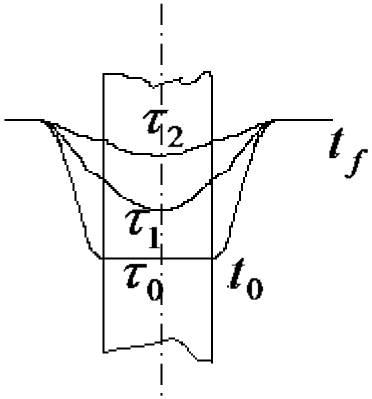
3. Bi准则：(对于第三类边界条件)

$$Bi=\frac{hL}{\lambda}=\frac{\left(\frac{L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{h}\right)}=\frac{\text{导热热阻}}{\text{对流换热热阻}}$$

L，导热体的特征尺度，对于两侧换热厚度为2δ 的平板，L=δ (平板厚度的一半)；对于长圆柱，L=R；对于圆球，L=R。对于其它形状的导热体，L和V/F有关。



$Bi < 0.1$



$Bi > 0.1$

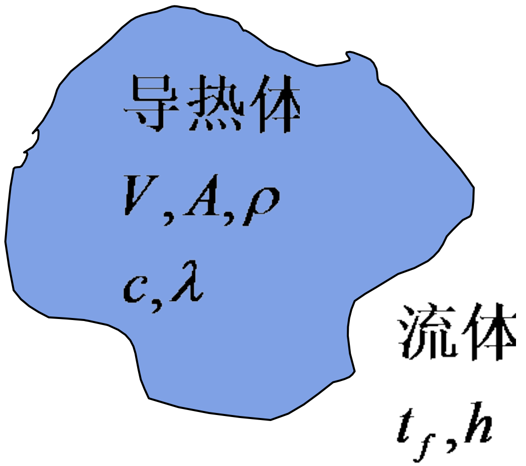
1.若物体内的导热热阻远大于边界上的对流换热热阻，相当于第一类边界条件；

2.若物体内的导热热阻远小于边界上的对流换热热阻，任一时刻，物体内的温度接近均匀；

3.若物体内的导热热阻与边界上的对流换热热阻比较接近，界于上述两种情况之间。

二、集总参数法

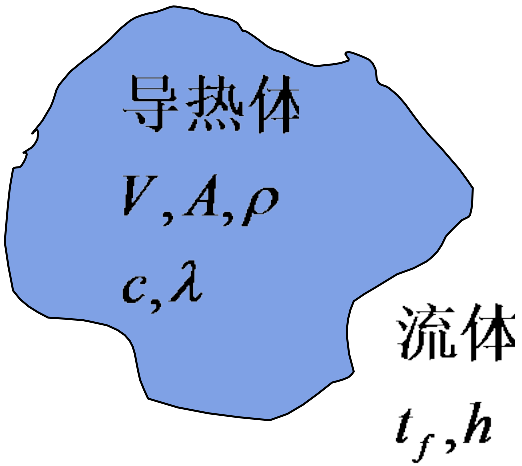
当$\lambda \to \infty$，或 $Bi<0.1$ ，可以忽略导热体内的导热热阻，认为导热体内温度分布是均匀的，即 $t = f(\tau)$, 为零维问题，导热体的参数集中于一点，称为集总参数法。



导热体，置于流体中：

- 体积V，换热表面积A；
- 初温$t_i = f(0) = t_0$；
- 对流换热系数h，流体初温t_f；
- 导热体物性参数ρ、c、λ；
- Bi<0.1。

能量平衡方程：



在τ 时刻，物体表面与外界对流换热的热流量为Q= $hA(t-t_f)$，则在的的$d\tau$时间内，对外放热量为 Q $d\tau$；物体温度变化为dt，内能变化量为(绝对值)：

$$-dU = -mcdt = -\rho Vcdt$$

则： $$hA(t - t_f) = -\frac{\rho Vcdt}{d\tau}$$ 取$\theta = t - t_f$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{hA}{\rho Vc}\theta$$

初始条件：$\tau = 0$时，$t = t_i$

边界条件：h，t_f恒定

求解：

$$\frac{d\theta}{\theta}=-\frac{hA}{\rho Vc}d\tau \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta}=\int_0^{\tau}-\frac{hA}{\rho Vc}d\tau$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\theta}{\theta_0}=-\frac{hA}{\rho Vc}\tau \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0}=e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} \Rightarrow \theta=\theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}$$

温度分布： $\theta=\theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}$ $\quad \frac{\theta}{\theta_0}=e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}$

$\frac{hA}{\rho Vc}$的值越大，$\frac{\theta}{\theta_0}$的变化越快，$\frac{\rho Vc}{hA}$称为时间常数，即$\frac{\theta}{\theta_0}=e^{-1}$所需要的时间。

$$\tau_c=\frac{\rho Vc}{hA}$$

$\frac{\theta}{\theta_0}=e^{-1}=36.8\%$ 所需要的时间

换热量的计算：

瞬时换热量： $Q = hA(t - t_f) = hA\theta = hA\theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}$

0～τ时刻累积换热量： $Q_\tau = \int_0^\tau Q d\tau = \int_0^\tau hA\theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} d\tau$

$$= hA\theta_0 \cdot \left(-\frac{\rho Vc}{hA} e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} \Big|_0^\tau \right) = \rho Vc\theta_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} \right)$$

实际上，累积换热量也可由物体温度的变化计算：

$$Q_\tau = \rho Vc(t_0 - t) = \rho Vc(\theta_0 - \theta) = \rho Vc\theta_0\left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) = \rho Vc\theta_0\left(1 - e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}\right)$$

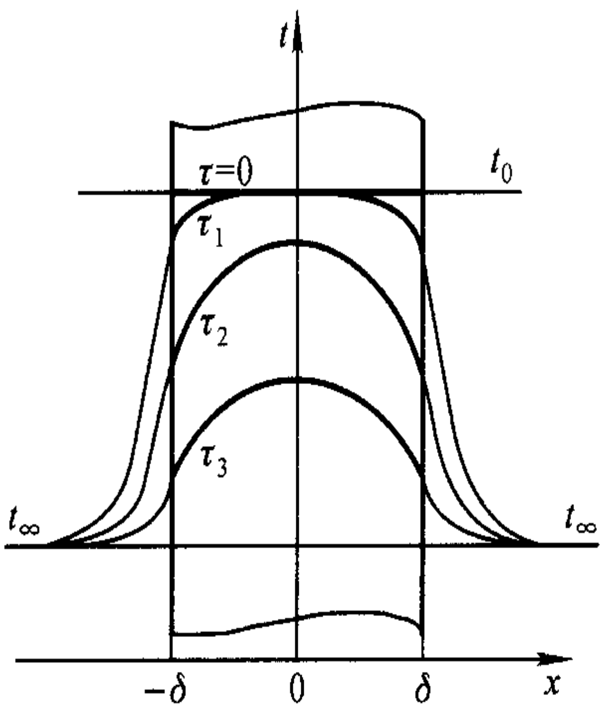
$\rho Vc\theta_0$ 表示物体温度变化到与外界持平时，总的换热量。

注意：采用集总参数法分析需要校核实用条件，即计算Bi数是否小于0.1。

三、一维非稳态导热的分析解

1. 大平板问题的分析解

如果Bi>0.1，则物体内的温度分布不总是均匀的，不能采用集总参数法进行分析。对于非稳态、一维、常物性、无内热源的问题，可以采用分析法进行研究。



问题：无限大平板，厚度2δ，两侧换热，对流换热系数为h，0时刻，置于$t=t_f$的流体中，$t_0=f(0)$。

常物性、一维、非稳态、无内热源的导热问题。

数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial \tau} = a\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \text{初始条件：}\ \tau = 0, t = t_0 \\ \text{边界条件：}\ x = 0, \dfrac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ \quad x = \delta, -\lambda\dfrac{\partial t}{\partial x} = h\left(t - t_f\right) \end{cases}$$

采用过余温度 $\theta = t - t_f$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \text{初始条件：}\ \tau = 0, \theta = \theta_0 \\ \text{边界条件：}\ x = 0, \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ \quad x = \delta, -\lambda\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta \end{cases}$$

解为：$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n\delta)^2\cdot\frac{a\tau}{\delta^2}} \frac{2\sin(\beta_n\delta)}{\beta_n\delta + \sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n\delta)} \cos\left((\beta_n\delta)\frac{x}{\delta}\right)$$

其中，β_n满足方程：$tg(\beta_n\delta) = \dfrac{h}{\lambda\beta_n} = \dfrac{Bi}{\beta_n\delta} \Rightarrow \beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3\ldots$

温度分布可写成准则方程的形式：$$\frac{\theta}{\theta_0}=f\left(Bi,Fo,\frac{x}{\delta}\right)$$

$$Bi=\frac{h\delta}{\lambda}$$ 物体内部的导热热阻和边界上对流换热热阻之比

$$Fo=\frac{a\tau}{\delta^2}$$ 非稳态导热的无量纲时间

$$\frac{x}{\delta}$$ 无量纲几何尺度

2. 分析解的讨论

1） 傅里叶数 Fo 对温度分布的影响

分析解的计算结果表明，当$Fo \geq 0.2$时，可近似取级数的第一项，对工程计算已足够精确，即

$$\theta(x,\tau)=\theta_0 e^{-(\beta_1\delta)^2\cdot\frac{a\tau}{\delta^2}}\frac{2\sin(\beta_1\delta)}{\beta_1\delta+\sin(\beta_1\delta)\cos(\beta_1\delta)}\cos\left((\beta_1\delta)\frac{x}{\delta}\right)$$

两边取对数：

$$\ln\theta=-(\beta_1\delta)^2\cdot\frac{a\tau}{\delta^2}+\ln\left\{\theta_0\frac{2\sin(\beta_1\delta)}{\beta_1\delta+\sin(\beta_1\delta)\cos(\beta_1\delta)}\cos\left((\beta_1\delta)\frac{x}{\delta}\right)\right\}$$

式中右边第二项只与Bi、x/δ 有关，而与时间τ 无关。上式写成：

$$\ln\theta=-m\tau+C\left(Bi,\frac{x}{\delta}\right)$$