考题猜想 3-1 勾股定理
（热考必刷 55 题 15 种题型专项训练）

题型大集合

- 利用已知条件判断直角三角形
- 利用勾股定理求解
- 勾股定理与网格问题
- 勾股树问题
- 利用勾股定理证明线段的平方关系
- 勾股定理的证明方法
- 以弦图为背景的计算题
- 勾股定理与折叠问题
- 勾股定理与无理数
- 判断三边能否构成直角三角形
- 网格中判断直角三角形
- 利用勾股定理逆定理求解
- 利用勾股定理解决实际问题
- 利用勾股定理解决最短路程问题
- 利用勾股定理解决将军饮马问题

题型大通关

一．利用已知条件判断直角三角形（共 4 小题）

（23-24 八年级上·浙江杭州·阶段练习）

1．下列条件中，不能判定$\triangle ABC$为直角三角形的是（　）

A．$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$　　B．$\angle A+\angle B=\angle C$

C．$a:b:c=7:24:25$　　D．$a=3,b=1,c=\sqrt{10}$

（23-24 八年级上·广东佛山·阶段练习）

2．下列条件中，不能判定$\triangle ABC$是直角三角形的是（　）

A．$a:b:c=7:25:24$　　B．$b^2=(a+c)(a-c)$

C．$\angle C=\angle A-\angle B$　　D．$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$

（23-24 八年级上·云南昆明·期中）

3．$\triangle ABC$在下列条件下不是直角三角形的是（　　）

A．$b^2=a^2-c^2$　　B．$a^2:b^2:c^2=1:2:3$

C．$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$　　D．$\angle A=\angle B-\angle C$

（23-24 八年级上·江苏苏州·阶段练习）

4．下列条件中，不能判断$\triangle ABC$为直角三角形的是（　　）

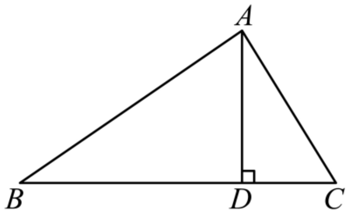
A．$a^2=1$，$b^2=2$，$c^2=3$　　B．$a:b:c=5:12:13$

C．$\angle A+\angle B=\angle C$　　D．$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$

二．利用勾股定理求解（共 4 小题）

（22-23 八年级上·江苏南京·期末）

5．如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，交BC于点D，$AB=17$，$AC=10$．

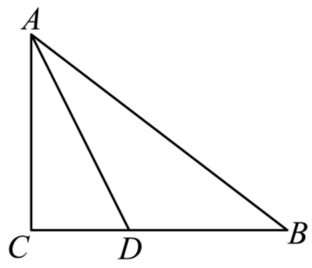


(1)若$CD=6$，则$AD=$__________，$BD=$__________；

(2)若$BC=20$，求CD的长．

（23-24 八年级上·江苏淮安·期末）

6．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，AD平分$\angle BAC$，$AB=10$，$AC=6$．

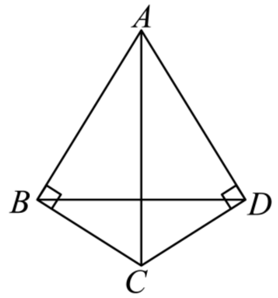


(1)求 BD 的长；

(2)求 $\triangle ADB$ 的面积．

（22-23 八年级上·江苏扬州·期末）

7．如图，AC 平分 $\angle BAD$，$CB \perp AB$，$CD \perp AD$，垂足分别为 B、D．



(1)求证：$\triangle ABC \cong \triangle ADC$；

(2)若 $AB = 4$，$CD = 3$，求 BD 的长．

（22-23 八年级上·江苏宿迁·期末）

8．【问题发现】

（1）如图 1，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等边三角形，点 B、D、E 在同一直线上，连接 CE．容易发现：

①$\angle BEC$ 的度数为__________；

②线段 BD、CE 之间的数量关系为__________；

【类比探究】

（2）如图 2，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等腰直角三角形，$\angle BAC = \angle DAE = 90°$，点 B、D、E 在同一直线上，连接 CE，试判断 $\angle BEC$ 的度数及线段 BE、CE、DE 之间的数量关系，并说明理由；

【问题解决】

（3）如图 3，点 P 是等边 $\triangle ABC$ 外一点，$\angle APC = 30°$，$PA = 3$，$PB = 4$，则 $PC =$ __________．

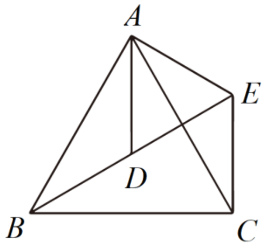


图1

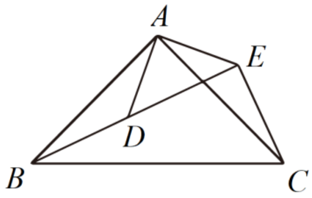


图2

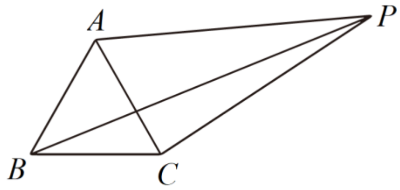
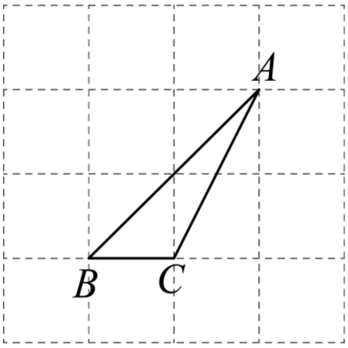


图3

三．勾股定理与网格问题（共 4 小题）

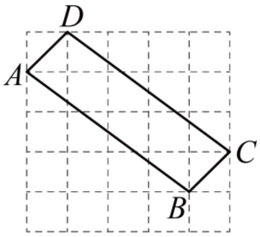
（23-24 八年级上·四川达州·期末）

9．如图所示，在边长为 1 个单位长度的网格中，$\triangle ABC$ 是格点图形，求$\triangle ABC$ 中 AB 边上的高．



（23-24 八年级上·吉林长春·期末）

10．如图，A 、B 、C 、D 在边长为1的正方形网格的格点上．



(1)求四边形 $ABCD$ 的周长．

(2)直接写出四边形 $ABCD$ 的面积为_．

（23-24 七年级上·浙江杭州·期中）

11．如图 1，依次连接4×4方格的各条边中点，得到一个正方形（如图中的阴影部分），

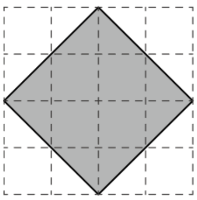
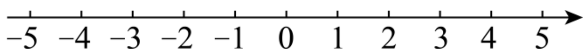


图1


图2



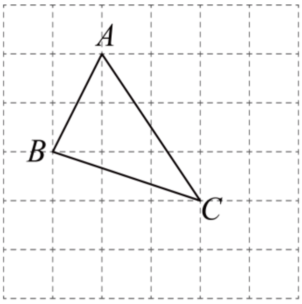
(1)图 1 中阴影部分的面积是______，阴影部分正方形的边长是______；

(2)请你利用图 2 在5×5的方格内作出边长为$\sqrt{10}$的正方形.

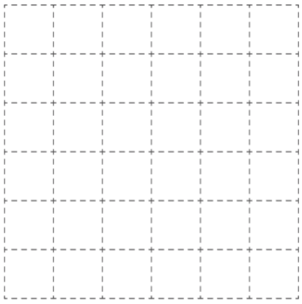
(3)请在数轴上作出表示$-\sqrt{10}$的点

（21-22 八年级下·贵州安顺·期末）

12．在$\triangle ABC$中，边AB，BC，AC的长分别为5，$\sqrt{10}$，$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小辉同学在解答这道题时，采用在边长为 1 的正方形网格中画出格点$\triangle ABC$（即$\triangle ABC$三个顶点都在小正方形的顶点处），如图①所示，这样不需求$\triangle ABC$的高，借用网格就能计算出它的面积，这种方法叫做构图法．



图①



图②

(1)请你根据图①求出$\triangle ABC$的面积.

(2)若$\triangle DEF$三边的长分别为$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{17}$，请在图②的正方形网格中画出相应的$\triangle DEF$，并利用构图法求出它的面积.

四．勾股树问题（共 2 小题）

（22-23 八年级下·江西南昌·期中）

13．勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．

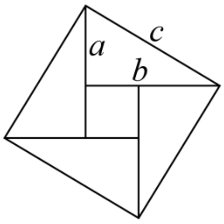


图1

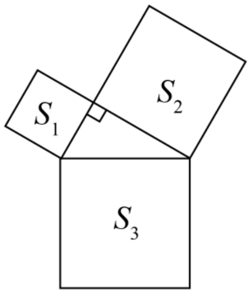


图2

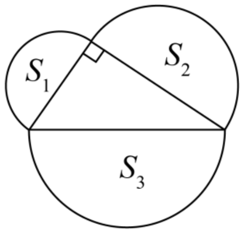


图3

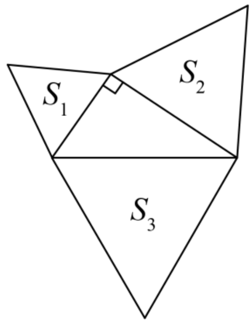


图4

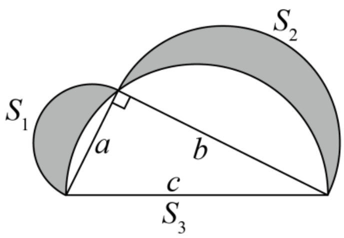


图5

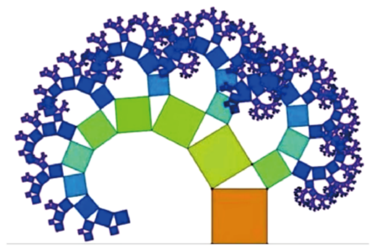


图6

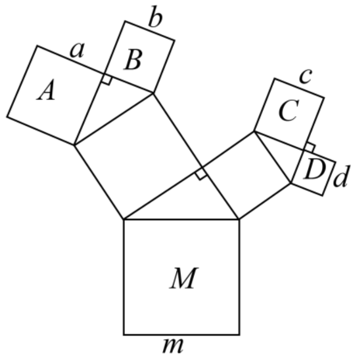


图7

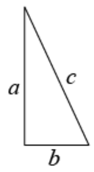
(1)①如图 2，3，4，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，面积分别为S_1，S_2，S_3，利用勾股定理，判断这 3 个图形中面积关系满足$S_1+S_2=S_3$的有________个．

②如图 5，分别以直角三角形三边为直径作半圆，设图中两个月牙形图案（图中阴影部分）的面积分别为S_1，S_2，直角三角形面积为S_3，也满足$S_1+S_2=S_3$吗？若满足，请证明；若不满足，请求出S_1，S_2，S_3的数量关系．

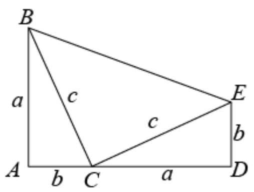
(2)如果以正方形一边为斜边向外作直角三角形，再以该直角三角形的两直角边分别向外作正方形，重复这一过程就可以得到如图 6 所示的“勾股树”．在如图 7 所示的“勾股树”的某部分图形中，设大正方形 M 的边长为定值 m，四个小正方形 A，B，C，D 的边长分别为 a，b，c，d，则$a^2+b^2+c^2+d^2=$__________．

（21-22 八年级上·河南南阳·期末）

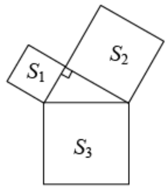
14．如图②，它可以看作是由边长为 a、b、c 的两个直角三角形（如图①C 为斜边）拼成的，其中 A、C、D 三点在同一条直线上，



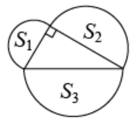
①



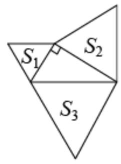
②



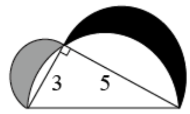
③



④



⑤



⑥

(1)请从面积出发写出一个表示 a、b、c 的关系的等式；（要求写出过程）

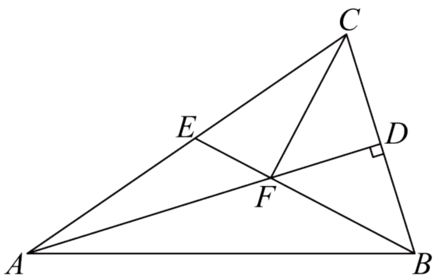
(2)如图③④⑤，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，这三个图形中面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$ 的有_______个．

(3)如图⑥，直角三角形的两直角边长分别为 3，5，分别以直角三角形的三边为直径作半圆，则图中阴影部分的面积为_______．

五．利用勾股定理证明线段的平方关系（共 3 小题）

（21-22 八年级·江苏·假期作业）

15．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AD\perp BC$于点 D，$\angle CBE=45^\circ$，BE分别交AC，AD于点 E、F，连接CF．



(1)判断$\triangle BCF$的形状，并说明理由；

(2)若$AF=BC$，求证：$BF^2+EF^2=AE^2$．

（22-23 八年级上·吉林长春·期末）

16．概念理解：对角线互相垂直的四边形叫做垂直四边形．如图1，四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$；

新意应用：如图 2，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$BC=DC$，问四边形$ABCD$是垂直四边形吗？请说明理由；

性质探究：如图 1，垂直四边形$ABCD$被对角线AC,BD分成了四个直角三角形，AB^2+CD^2与AD^2+BC^2有什么关系？并证明你的猜想．

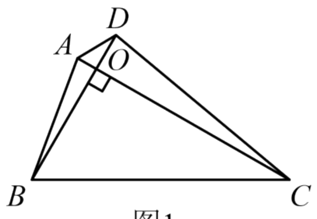


图1

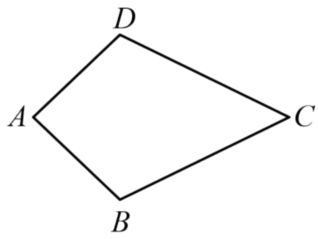
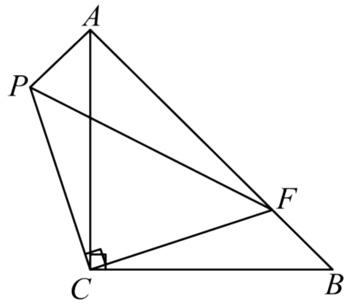


图2

（23-24 八年级上·辽宁沈阳·阶段练习）

17．如图，在等腰Rt△ABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=2$，点F是直线AB上一个动点，作等腰Rt△FCP，且$\angle PCF=90^{\circ}$，连接AP．



(1)找出图中全等三角形______．

(2)如图求证：$FB^2+AF^2=PF^2$；

(3)若$AF=\sqrt{2}$，则$PF=$______．

六．勾股定理的证明方法（共3小题）

（23-24 八年级上·吉林长春·期末）

18．勾股定理是人类最伟大的科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．

(1)请用文字语言叙述勾股定理的内容：______；

(2)请从下列3种常见的证明图形中任选一种来证明该定理．（下图中的图形均满足证明勾股定理所需的条件）

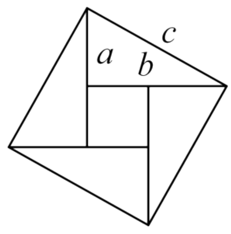


图1

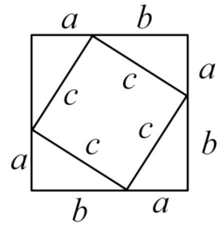


图2

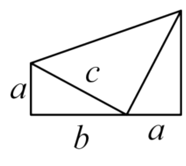


图3

（23-24 八年级上·山西太原·期中）

19．请阅读下列材料，并完成相应的任务．

勾股定理又称毕达哥拉斯定理、商高定理、百牛定理等，是人类早期发现并证明的重要数学定理之一，大约有五百多种证明方法，下面是我国三国时期的数学家赵爽和意大利著名画家达·芬奇的证明方法.

赵爽利用 4 个全等的直角三角形拼成如图 1 所示的“弦图”（史称“赵爽弦图”），其中 a，b 和 c 分别表示直角三角形的两直角边和斜边，四边形 $ABDE$ 和四边形 $CFGH$ 是正方形.

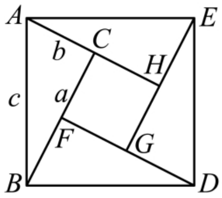


图1

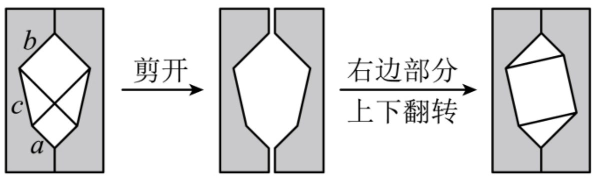


图2

达·芬奇用如图 2 所示的方法证明，其中剪开前的空白部分由 2 个正方形和 2 个全等的直角三角形组成，面积记为 S_1；剪开翻转后的空白部分由 2 个全等的直角三角形和 1 个正方形组成，面积记为 S_2.

任务：

(1)下面是小颖利用赵爽弦图验证勾股定理的过程，请你帮她补充完整.

证明：由图 1，知 $S_{\text{正方形}ABDE}=4S_{\triangle ABC}+S_{\text{正方形}CFGH}$，正方形 $CFGH$ 的边长为_.

$\because S_{\text{正方形}ABDE}=c^2$，$S_{\triangle ABC}=$_，$S_{\text{正方形}CFGH}=$_，

$\therefore c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=2ab+a^2-2ab+b^2$，即 $a^2+b^2=c^2$.

(2)请你参照小颖的验证过程，利用图 2 及图中标明的字母写出勾股定理的验证过程.

（22-23 八年级上·河南周口·期末）

20．图 1 为“弦图”，最早是由三国时期的数学家赵爽在为《周髀算经》作注时给出的，它标志着中国古代的数学成就．根据该图，赵爽用两种不同的方法计算正方形的面积，通过正方形面积相等，从而证明了勾股定理．现有 4 个全等的直角三角形（图 2 中灰色部分），直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，将它们拼合为图 2 的形状．

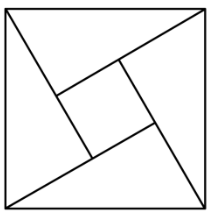


图1

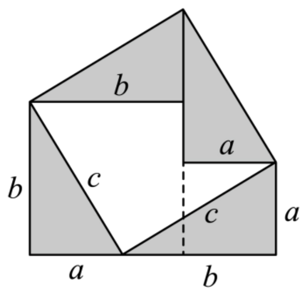


图2

(1)小诚同学在图 2 中加了相应的虚线，从而轻松证明了勾股定理，请你根据小诚同学的思路写出证明过程；

(2)当 $a=3$，$b=4$ 时，求图 2 中空白部分的面积.

七．以弦图为背景的计算题（共 3 小题）

（23-24 八年级上·河南郑州·阶段练习）

21．我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”，后世也称“赵爽弦图”（如左图所示），实际上，赵爽弦图与完全平方公式有着密切的联系．如图是由 8 个全等的直角三角形拼成，其中直角边分别为 a，b，请回答以下问题：

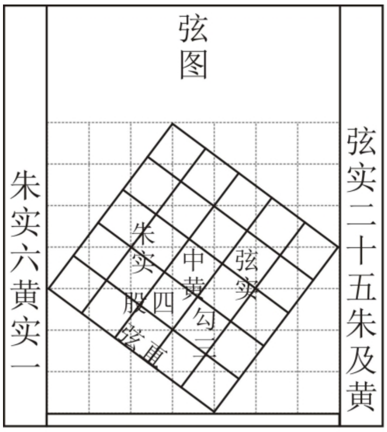
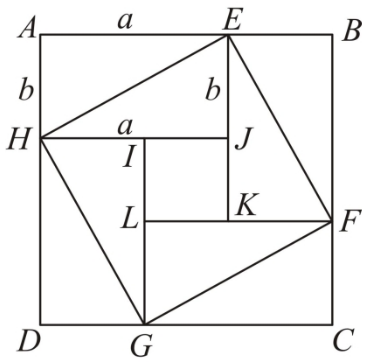


图1



(1)如右图，正方形 $ABCD$ 的面积是_______，正方形 $IJKL$ 的面积是_______；（用含 a，b 的式子表示）；

(2)记正方形 $ABCD$ 的面积、正方形 $EFGH$ 、正方形 $IJKL$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3，若

$S_1+S_2+S_3=60$，$\mathrm{Rt}\triangle AEH$ 的面积为 3，求 $(a-b)^2$ 的值.

（2023 八年级上·浙江·专题练习）

22．“赵爽弦图”是四个全等的直角三角形与中间一个小正方形拼成的大正方形．赵爽利用几何图形的截、割拼、补来证明代数式之间的恒等关系，在验明勾股定理，为中国古代以形证数形数统一、代数和几何紧密结合、互不可分的独特风格树立了一个典范．

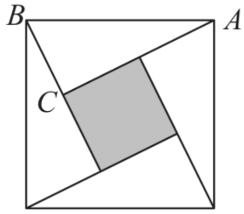


图1

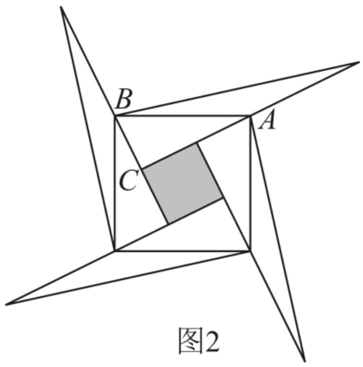


图2

(1)如图 1 所示，是小华制作的一个“赵爽弦图”纸板，其直角三角形的短直角边 BC 的长为 1．若中间小正方形黑色的面积占总面积的$\frac{1}{5}$，求直角三角形的长直角边 AC 的长；

(2)小华将刚刚制作的“赵爽弦图”纸板中的四个直角三角形中长直角边分别向外延长一倍，得到如图 2 所示的“数学风车”，求这个风车的周长．

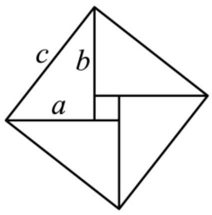
（21-22 八年级上·河南平顶山·期中）

23．用四个全等的直角三角形拼成如图①所示的大正方形，中间也是一个正方形．它是美丽的弦图．其中四个直角三角形的直角边长分别为 a，b（$a<b$），斜边长为 c．

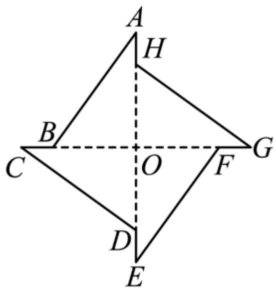
（1）结合图①，说明：$a^2+b^2=c^2$；

（2）如图②，将这四个全等的直角三角形无缝隙无重叠地拼接在一起，得到图形 $ABCDEFGH$．若该图形的周长为 24，$OH=3$，求该图形的面积；

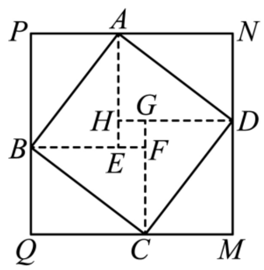
（3）如图③，将八个全等的直角三角形紧密地拼接成正方形 $PQMN$，记正方形 $PQMN$、正方形 $ABCD$、正方形 $EFGH$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，若 $S_1+S_2+S_3=18$，则 $S_2=$_____．



图①



图②

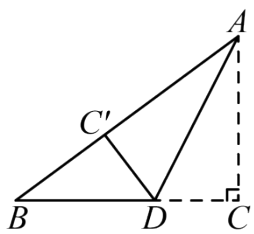


图③

八．勾股定理与折叠问题（共 6 小题）

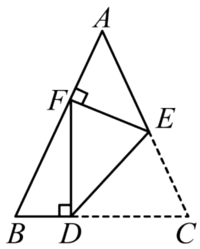
（22-23 八年级下·云南昆明·期末）

24．如图所示，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，点 D 为 BC 边上一点，将$\triangle ACD$ 沿 AD 翻折得到$\triangle AC'D$，若点 C' 在 AB 边上，$AC=6$，$BC=8$，求 AD 的长．



（23-24 八年级上·浙江温州·期末）

25．如图，折叠等腰三角形纸片 ABC，使点 C 落在边 AB 上的点 F 处，折痕为 DE .



(1)已知 $AB=AC$，$FD\perp BC$，则 $\angle AFE=$_度；

(2)在（1）的条件下，如果 $AF=4$，$BF=6$，则 $AE=$_.

（23-24 八年级上·辽宁沈阳·期末）

26．探究式学习是新课程提倡的重要学习方式，某兴趣小组拟做以下探究.

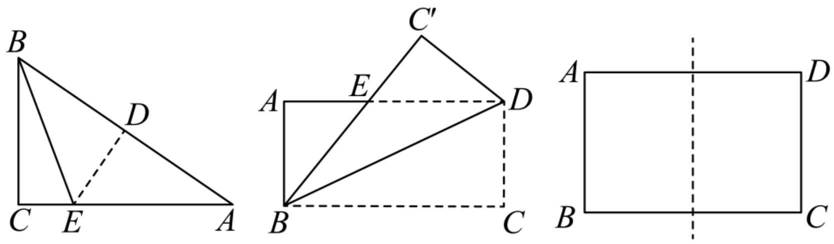


图1　　图2　　图3

【初步感知】

(1)如图 1，在三角形纸片 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=18$，将 $\angle A$ 沿 DE 折叠，使点 A 与点 B 重合，折痕和 AC 交于点 E，$EC=5$，求 BC 的长；

【深入探究】

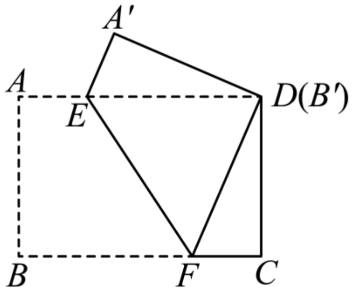
(2)如图 2，将长方形纸片 $ABCD$ 沿着对角线 BD 折叠，使点 C 落在 C' 处，BC' 交 AD 于 E，若 $AB=4$，$BC=8$，求 AE 的长(注：长方形的对边平行且相等)；

【拓展延伸】

(3)如图 3，在长方形纸片 $ABCD$ 中，$AB=5$，$BC=8$，点 E 为射线 AD 上一个动点，把 $\triangle ABE$ 沿直线 BE 折叠，当点 A 的对应点 F 刚好落在线段 BC 的垂直平分线上时，求 AE 的长(注：长方形的对边平行且相等).

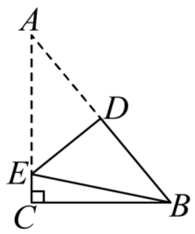
（22-23 八年级上·河南南阳·期末）

27．把一长方形纸片 $ABCD$ 按图所示折叠，使顶点 B 与点 D 重合，折痕为 EF，若 $AB=3$，$BC=5$，重叠部分的面积为多少？



（22-23 八年级上·四川成都·期末）

28．如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，把 $\triangle ABC$ 沿直线 DE 折叠，点A与点 B 重合．



(1)若 $\angle EBC=16°$，则 $\angle A$ 的度数为 _ ；

(2)若 $AD=5$，$BC=6$，求 CE 的长；

(3)当 $\triangle BCE$ 的周长为 $m(m>0)$，$AB=n(n>0)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.(用含 m 、n 的代数式表示
)

（22-23 八年级上·山西运城·期末）

29．在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在 AC 边上，将 $\angle A$ 沿 BE 翻折，使点 A 落在 A' 处，且 $A'E\parallel BC$，连接 $A'B$ 交 AC 于点 F.

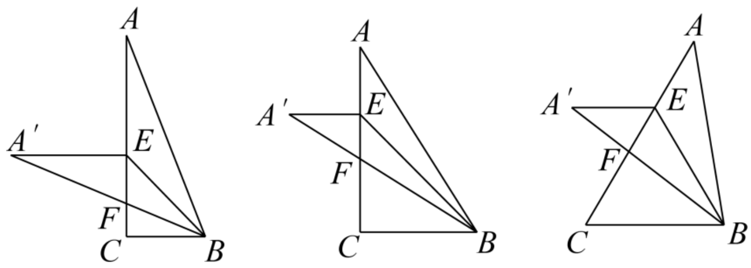


图 1　　图 2　　图 3

(1)若 $\angle C=90°$，$\angle A=\alpha$．

①如图 1，当 $\alpha=20°$ 时，$\angle CBE=$______，边 BC 与线段 BE 的数量关系是______；

②如图 2，当 α 为任意角度数时，上述结论是否依然成立，请说明理由．

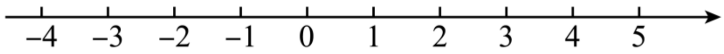
(2)如图 3，若 $\angle C=60°$，$\angle A<60°$，猜想 $\angle CBE$ 的度数及边 BC 与线段 BE 的数量关系，并

说明理由．

九．勾股定理与无理数（共2小题）

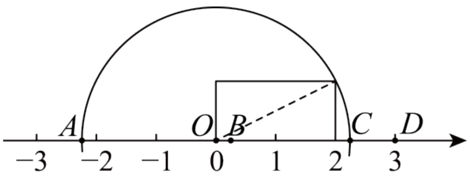
（23-24八年级上·江苏徐州·阶段练习）

30．在图中画图确定表示$\sqrt{10}$的点M．



（22-23八年级下·山东潍坊·期中）

31．如图，矩形的一条边在数轴上，长为2个单位长度，宽为1个单位长度，以原点O为圆心，以矩形对角线的长为半径画弧，与正负半轴分别交于点C、A．在点C的左侧截取$CB=2$，点D表示的数为3，回答下列问题：



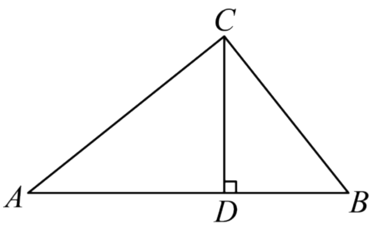
(1)点A、B、C表示的实数依次为______，______，______；

(2)计算线段DC和OB的长度，并用作差法比较它们的大小．

一十．判断三边能否构成直角三角形（共3小题）

（22-23八年级上·安徽宿州·期中）

32．如图，已知在$\triangle ABC$中，$CD\perp AB$于D，$BD=9$，$BC=15$，$AC=20$．

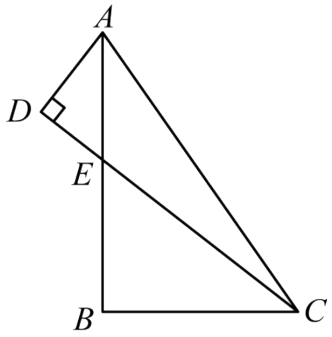


(1)求AD的长；

(2)判断$\triangle ABC$的形状．

（23-24八年级上·江苏苏州·期中）

33．如图，$\triangle ABC$中，E为AB边上的一点，连接CE并延长，过点A作$AD\perp CE$，垂足为D，若$AD=7$，$AB=20$，$BC=15$，$DC=24$．



(1)试说明$\angle B$为直角；

(2)记$\triangle ADE$的面积为S_1，$\triangle BCE$的面积为S_2，则S_2-S_1的值为_.

（23-24 八年级上·全国·单元测试）

34．阅读：已知 a，b，c 为$\triangle ABC$的三边长，且满足$a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，试判断$\triangle ABC$的形状．

解：$\because a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，　　①

$\therefore c^2\left(a^2-b^2\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)$．　②

$\therefore c^2=a^2+b^2$．　③

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形．　④

请根据上述解题过程回答下列问题：

(1)上述解题过程，从第几步(该步的序号)开始出现错误，错误的原因是什么？

(2)请你将正确的解题过程写下来．

（22-23 八年级下·河南驻马店·期末）

35．已知平面直角坐标系内有两点$P_1\left(x_1,y_1\right)$，$P_2\left(x_2,y_2\right)$．

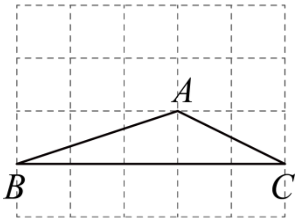
(1)若$\left|P_1P_2\right|$表示这两点间的距离，求证：$\left|P_1P_2\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^3+\left(y_1-y_2\right)^2}$．

(2)试判断点$A(4,-4)$，$B(-1,5)$，$C(2,1)$是否构成直角三角形．

一十一．网格中判断直角三角形（共 3 小题）

（22-23 八年级下·河南商丘·阶段练习）

36．如图，$\triangle ABC$的顶点都在边长为 1 的正方形网格的格点上．

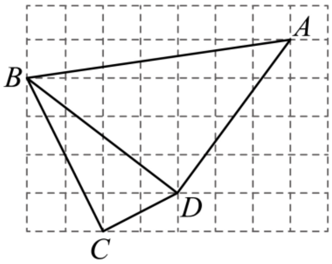


(1) $AB=$________;

(2)求$\angle BAC$的度数.

（22-23 八年级下·湖北荆州·期中）

37．如图，四边形$ABCD$的四个顶点都在网格上，且每个小正方形的边长都为 1．

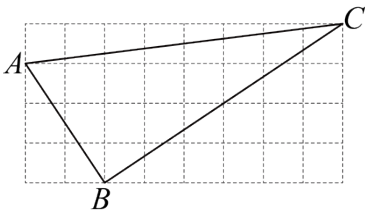


(1)填空：$BC=$________，$AD=$________；

(2)连接BD，判断$\triangle ABD$的形状，并说明理由．

（23-24 八年级上·江苏苏州·期中）

38．如图，正方形网格的每个小方格的边长均为 1，$\triangle ABC$的顶点在格点上．



(1)直接写出$AB=$____，$BC=$____，$AC=$____；

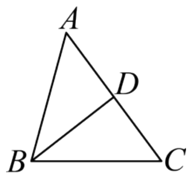
(2)判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由；

(3)直接写出AC边上的高为_.

一十二．利用勾股定理逆定理求解（共 3 小题）

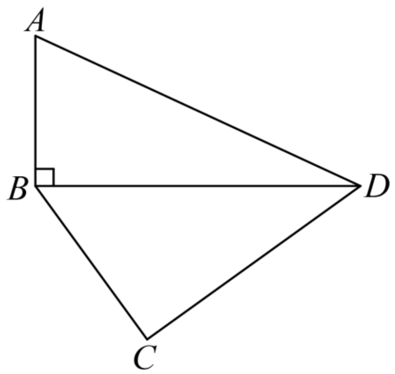
（23-24 八年级上·全国·课后作业）

39．如图，BD为$\triangle ABC$的中线，$AB=5$，$AD=3$，$BD=4$，求$\triangle ABC$的周长．



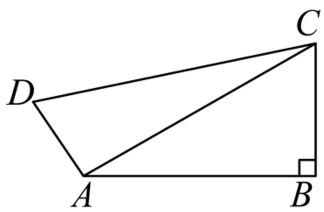
（23-24 八年级上·江苏常州·期中）

40．如图，已知在$\triangle ABD$中，$AB=8$，$AD=17$，$\angle ABD=90^{\circ}$，$BC=9$，$CD=12$，求$\triangle BCD$的面积．



（22-23 七年级下·山东青岛·期中）

41．如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B=90^{\circ}, BC=\sqrt{2}, AC=2\sqrt{2}, DA=1, CD=3$，



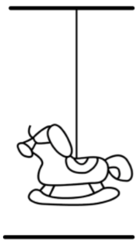
(1)证明：$\triangle ACD$是直角三角形；

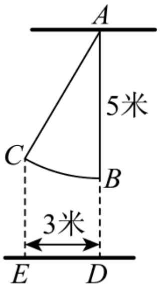
(2)求四边形$ABCD$的面积．

一十三．利用勾股定理解决实际问题（共 4 小题）

（23-24 八年级上·江苏南京·期中）

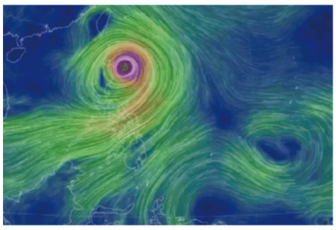
42．如图，有一个绳索拉直的木马秋千，绳索AB的长度为 5 米，若将它往水平方向向前推进 3 米（即$DE=3$米），且绳索保持拉直的状态，求此时木马上升的高度．

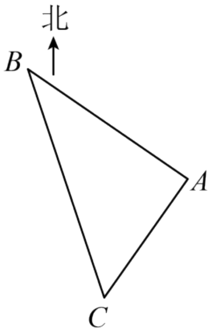




（23-24 八年级上·陕西西安·期中）

43．2023 年 7 月五号台风“杜苏芮”登陆，使我国很多地区受到严重影响，据报道，这是今年以来对我国影响最大的台风，风力影响半径250km（即以台风中心为圆心，250km为半径的圆形区域都会受台风影响），如图，线段BC是台风中心从C市向西北方向移动到B市的大致路线，A是某个大型农场，且$AB\perp AC$．若A，C之间相距300km，A，B之间相距400km．





(1)判断农场A是否会受到台风的影响，请说明理由．

(2)若台风中心的移动速度为25km/h，则台风影响该农场持续时间有多长？

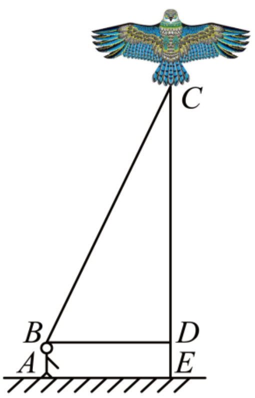
（22-23 九年级上·江西南昌·阶段练习）

44．小明学习了“勾股定理”之后，为了测得风筝的垂直高度CE(如图)，进行了如下操作：

①测得水平距离BD的长为 8 米；

②根据手中剩余线的长度计算出放出去的风筝线BC的长为 17 米；

③牵线放风筝的小明的身高为1.5米．

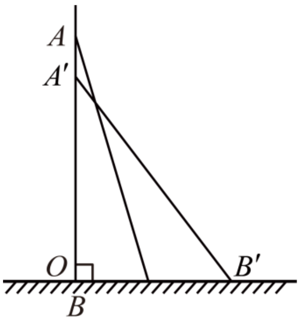


(1)求风筝的垂直高度CE；

(2)小明位置不动，若想让风筝沿CD方向下降9米，他应该往回收线多少米？

（23-24八年级上·江苏徐州·期中）

45．如图，一架梯子AB长25米，斜靠在墙上（墙与地面垂直），梯子底端至墙的距离BO为7米．



(1)这个梯子的顶端A距地面有多高？

(2)如果梯子的顶端下滑了4米，那么梯子的底端在水平方向滑动了几米？

(3)若梯子AB的中点为E，梯子在下滑的过程中，OE的长是否发生变化，如变化说明变化规律，如果不变直接写出OE的长度．

一十四．利用勾股定理解决最短路程问题（共3小题）

（23-24八年级上·江西九江·阶段练习）

46．课本再现

如图1，有一个圆柱，它的高为12cm，底面圆的周长为18cm．在圆柱下底面的点A处有一只蚂蚁，它想吃到上底面与点A相对的点B处的食物，蚂蚁沿圆柱侧面爬行的最短路程是多少？

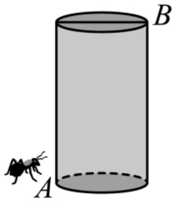


图1

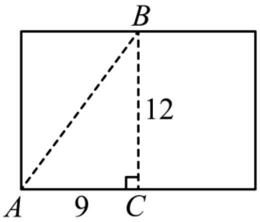


图2

方法探究

（1）对于立体图形中求最短路程问题，应把立体图形展开成平面图形，再确定 A，B 两点的位置，依据“两点之间线段最短”，结合勾股定理，解决相应的问题．如图 2，在圆柱的侧面展开图中，点 A，B 对应的位置如图所示，利用勾股定理求出蚂蚁爬行的最短路程是______ cm．

方法应用

（2）如图 3，直四棱柱的上下底面是正方形，底面边长为 $3\mathrm{cm}$，高为 $10\mathrm{cm}$．在其侧面从点 A 开始，绕侧面两周，嵌入装饰彩条至点 B 停止．求彩条的最短长度．

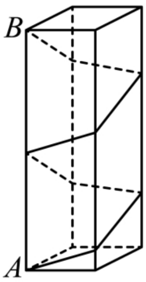


图3

（3）如图 4，圆柱形玻璃杯底面周长为 $30\mathrm{cm}$，高为 $35\mathrm{cm}$，杯底厚 $1\mathrm{cm}$．在玻璃杯外壁距杯口 $2\mathrm{cm}$ 的点 A 处有一只蚂蚁，蚂蚁相对面的内壁底部 B 处有一滴蜂蜜，蚂蚁沿杯口爬入内壁去吃蜂蜜，求蚂蚁爬行的最短路径长．（玻璃杯的壁厚忽略不计）

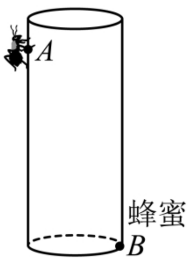
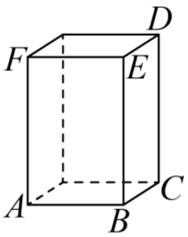


图4

（23-24 八年级上·广东深圳·开学考试）

47．如图，一个无盖长方体小杯子放置在桌面上，$AB = BC = 6\mathrm{cm}$，$CD = 16cm$；

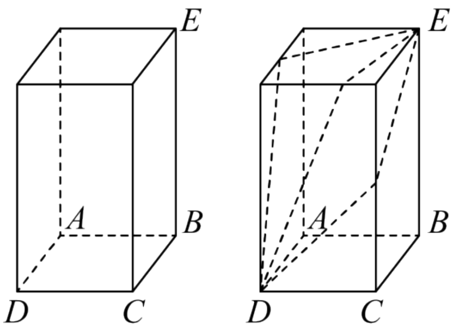


(1)一只蚂蚁从 A 点出发，沿小杯子外表面爬到 D 点，求蚂蚁怎样走最短，最短路程是多少？

(2)为了怕杯子落入灰尘又方便使用，现在需要给杯子盖上盖子，并把一双筷子放进杯子里，请问，筷子的最大长度是多少？

（22-23 八年级下·湖南永州·阶段练习）

48．如图是长 $AB=4\text{cm}$ 、宽 $BC=3\text{cm}$ 、高 $BE=12\text{cm}$ 的长方体容器.



(1)求底面矩形 $ABCD$ 的对角线的长；

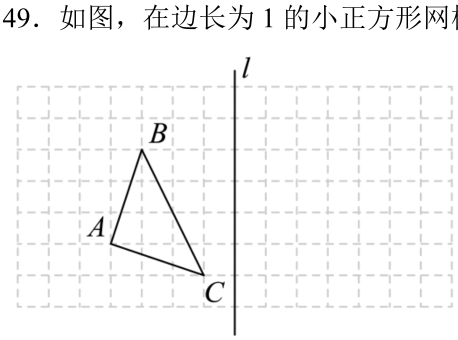
(2)长方体容器内可完全放入的棍子最长是多少？

(3)一只蚂蚁从 D 点爬到 E 点最短路径是多少？

一十五．利用勾股定理解决将军饮马问题（共 6 小题）

（23-24 八年级上·江苏苏州·阶段练习）

49．如图，在边长为 1 的小正方形网格中，点 A，B，C 均落在格点上.



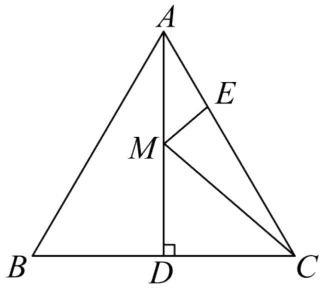
(1)画出 $\triangle ABC$ 关于直线 l 的轴对称图形 $\triangle A'B'C'$.

(2)连接 $A'B$ 、 $C'B$ ，则 $\triangle A'BC'$ 的面积为______.

(3)在直线 l 上画出点 M ，使 $MA+MC$ 的值最小，这个最小值是______.

（23-24 八年级上·全国·单元测试）

50．如图，在等边三角形ABC中，$AB=6$，$AD\perp BC$，E是AC上的一点，M是AD上一点，$AE=2$，求$EM+MC$的最小值．

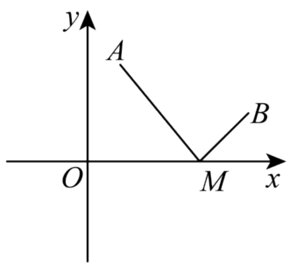


（23-24 七年级上·山东淄博·期末）

51．（1）如图，点$A\left(1,4\right),B\left(6,1\right)$，求线段$AB$的长度和中点$C$的坐标；

（2）若M是x轴上一动点，求$MA+MB$的最小值；

（3）已知$\triangle ABC$的顶点坐标分别为$A\left(0,4\right),B\left(-1,2\right),C\left(4,2\right)$，你能判定$\triangle ABC$的形状吗？请说明理由．



（23-24 八年级上·重庆沙坪坝·期末）

52．如图，小区A与公路l的距离$AC=200$米，小区B与公路l的距离$BD=400$米，已知$CD=800$米．

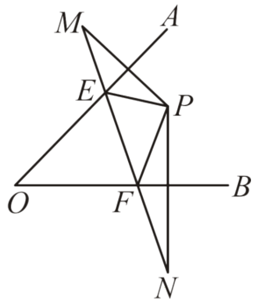
(1)政府准备在公路边建造一座公交站台Q，使Q到A、B两小区的路程相等，求CQ的长；

(2)现要在公路旁建造一利民超市P，使P到A、B两小区的路程之和最短，求$PA+PB$的最小值，求出此最小值．

（23-24 八年级上·浙江杭州·开学考试）

53．如图所示，点P在$\angle AOB$内，点M，N分别是AO，BO的对称点，MN分别交OA，OB

于点 E，F.



(1)若 $\angle AOB=\alpha^{\circ}$，则 $\angle MON=$_， $\angle EPF=$_（用含 α 的代数式表示）;

(2)①若 $\triangle PEF$ 的周长是 10cm，求 MN 的长.

②若 $\angle O=45^{\circ}$，$OP=x\text{cm}$，直接写出 $\triangle PEF$ 的周长的最小值（用含 x 的代数式表示）

（23-24 八年级上·广东梅州·期中）

54．如图，A，B 两个工厂位于一段直线形河的异侧，A 厂距离河边 $AC=1\text{km}$，B 厂距离河边 $BD=2\text{km}$，经测量 $CD=3\text{km}$，现准备在河边某处（河宽不计）修一个污水处理厂 E.

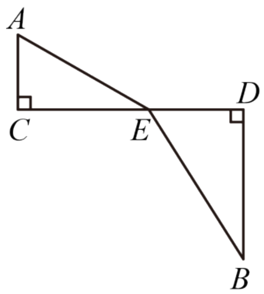


图1

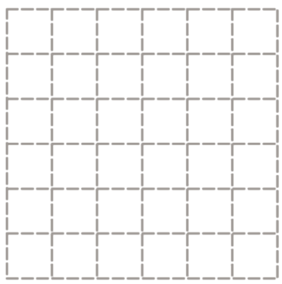


图2

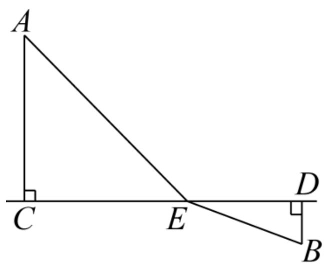
(1)设 $CE=x$，请用 x 的代数式表示 $AE+BE$ 的长;

(2)为了使两厂的排污管道最短，污水厂 E 的位置应怎样来确定？此时需要管道多长？

(3)根据（1）（2）中的规律和结论，请模仿图 1 在网格中（图 2）构图并得出代数式 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(4-x)^2+1}$ 的最小值为_.

（22-23 八年级下·全国·单元测试）

55．如图，A，B 两个工厂位于一段直线形河的异侧，A 厂距离河边 $AC=5\text{km}$，B 厂距离河边 $BD=1\text{km}$，经测量 $CD=8\text{km}$，现准备在河边某处(河宽不计)修一个污水处理厂 E.



(1)设$ED=x$，请用x的代数式表示$AE+BE$的长；

(2)为了使两厂的排污管道最短，污水厂E的位置应怎样来确定此时需要管道多长？

(3)通过以上的解答，充分展开联想，运用数形结合思想，请你猜想

$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(15-x)^2+25}$的最小值为多少？

1．A

【分析】本题考查勾股定理的逆定理、三角形内角和定理，掌握勾股定理逆定理、三角形内角和是180°是解题的关键．根据三角形内角和定理可判断选项A、B是否是直角三角形：根据勾股定理逆定理可判断选项C、D是否是直角三角形．

【详解】解：$\because \angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，

$\therefore \angle C=\frac{5}{12}\times 180^\circ=75^\circ$，

$\therefore \triangle ABC$是锐角三角形，

故A符合题意：

$\because \angle A+\angle B=\angle C, \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，

$\therefore \angle C=90^\circ$，

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形，

故B不符合题意；

$\because a=7k, b=24h, c=25k$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$，

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形，

故C不符合题意；

$\because a=3, b=1, c=\sqrt{10}$，

$a^2+b^2=10=c^2$，符合勾股定理逆定理．

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形，

故D不符合题意；

故选：A．

2．D

【分析】本题主要考查了勾股定理逆定理和三角形内角和定理，熟练掌握若一个三角形的两边的平方和等于第三边的平方，则这个三角形是直角三角形是解题的关键．

根据勾股定理和三角形内角和定理即可求解．

【详解】解：A、设$a=7x$，$b=25x$，$c=24x$，则

$a^2+c^2=(7x)^2+(24x)^2=625x^2=(25x)^2=b^2$，可得$\triangle ABC$是直角三角形，故本选项不符合题意；

B、$b^2=(a+c)(a-c)=a^2-c^2$，则$b^2+c^2=a^2$ ，可得$\triangle ABC$是直角三角形，故本选项不符合题意；

C、因为$\angle C=\angle A-\angle B$，所以$\angle A=\angle C+\angle B$，因为$\angle A+\angle C+\angle B=2\angle A=180°$，则$\angle A=90°$，可得$\triangle ABC$是直角三角形，故本选项不符合题意；

D、设$\angle A=3x,\angle B=4x,\angle C=5x$ ，则$3x+4x+5x=180°$ ，解得：$x=15°$ ，所以$\angle A=45°,\angle B=60°,\angle C=75°$ ，即$\triangle ABC$不是直角三角形，故本选项符合题意；

故选：D．

3．C

【分析】根据勾股定理逆定理，可以判定A、B，根据角度关系及三角形内角和，可判断C、D，

本题考查了直角三角形的判定，根据勾股定理的逆定理及三角形的内角和定理逐项判断即可求解，掌握勾股定理的逆定理及三角形的内角和定理是解题的关键.

【详解】解：A、由$b^2=a^2-c^2$可得$b^2+c^2=a^2$，根据勾股定理的逆定理可知$\triangle ABC$是直角三角形，该选项不合题意；

B、$\because a^2:b^2:c^2=1:2:3$，

$\therefore$设$a^2=x$，$b^2=2x$，$c^2=3x$，

$\therefore a^2+b^2=x+2x=3x=c^2$，根据勾股定理的逆定理可知$\triangle ABC$是直角三角形，该选项不合题意；

C、$\because \angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，

$\therefore$设$\angle A=3x$，$\angle B=4x$，$\angle C=5x$，

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore 3x+4x+5x=180°$，

$\therefore x=15°$，

$\therefore \angle C=5\times 15°=75°$，

$\therefore \triangle ABC$不是直角三角形，该选项符合题意；

D、$\because \angle A=\angle B-\angle C$，

$\therefore \angle A+\angle C=\angle B$，

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore 2\angle B=180°$，

$\therefore \angle B = 90°$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，该选项不合题意；

故选：C．

4．D

【分析】本题主要考查勾股定理和三角形内角和定理．根据勾股定理的逆定理可判定 A；根据比值并结合勾股定理的逆定理可判断 B；根据三角形的内角和为180度，即可计算出$\angle C$的值可判断 C；根据角的比值求出各角的度数，可判断 D．

【详解】解：A、当$a^2 = 1$，$b^2 = 2$，$c^2 = 3$，

$\therefore a^2 + b^2 = 3 = c^2$，

故$\triangle ABC$是直角三角形，本选项不符合题意；

B、当$a:b:c = 5:12:13$时，设$a = 5x$，$b = 12x$，$c = 13x$，

则$a^2 + b^2 = (5x)^2 + (12x)^2 = (13x)^2 = c^2$，

故$\triangle ABC$是直角三角形，本选项不符合题意；

C、当$\angle A + \angle B = \angle C$时，

$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°$，

$\therefore \angle C + \angle C = 180°$，则$\angle C = 90°$，

故$\triangle ABC$是直角三角形，本选项不符合题意；

D、当$\angle A : \angle B : \angle C = 3:4:5$时，

$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°$，

则最大角为$\angle C = 180° \times \dfrac{5}{3+4+5} = 75°$，

故$\triangle ABC$不是直角三角形，本选项符合题意；

故选：D．

5．(1)8，15；

(2)$CD = \dfrac{211}{40}$．

【分析】本题考查了勾股定理的应用，熟练掌握勾股定理是解此题的关键．

（1）由勾股定理计算即可得出答案；

（2）设$CD = x$，则$BD = 20 - x$，由勾股定理得出$10^2 - x^2 = 17^2 - (20-x)^2$，计算即可得出答案．

【详解】（1）解：$\because AD \perp BC$，

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$，

$\because AB = 17$，$AC = 10$，$CD = 6$，

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$，

$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

故答案为：8，15；

（2）解：设$CD = x$，则$BD = 20 - x$，

$\because AC^2 - CD^2 = AD^2$，$AB^2 - BD^2 = AD^2$，

$\therefore AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2$，

$\therefore 10^2 - x^2 = 17^2 - \left(20 - x\right)^2$，

解得$x = \dfrac{211}{40}$，

$\therefore CD = \dfrac{211}{40}$.

6．(1)5；

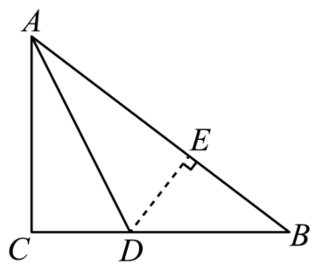
(2)15．

【分析】本题考查了勾股定理，角平分线的性质，三角形面积．

（1）作$DE \perp AB$于E，利用勾股定理求得BC的长，利用平分线的性质得$CD = DE$，再利用面积法求出CD的长，从而求得BD的长；

（2）利用三角形的面积公式即可解决问题．

【详解】（1）解：作$DE \perp AB$于E．如图．



在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，由勾股定理得：

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$，

$\because AD$平分$\angle BAC$，$AC \perp DC$，$DE \perp AB$，

$\therefore CD = DE$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\cdot CD+\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

$\therefore 6CD+10CD=48$，

$\therefore CD=3$，

$\therefore BD=BC-CD=8-3=5$；

（2）解：$\because \angle C=90^{\circ}$，$AC=6$，$CD=3$，

$\therefore S_{\triangle ACD}=3\times 6\times\frac{1}{2}=9$，

$S_{\triangle ADB}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACD}=24-9=15$．

7．(1)证明见解析；

(2) $BD=\frac{24}{5}$．

【分析】（1）由角平分线与垂直的定义可得$\angle BAC=\angle DAC$，$\angle ABC=\angle ADC$，又公共边AC，通过AAS可证得$\triangle ABC\cong\triangle ADC$；

（2）由$\triangle ABC\cong\triangle ADC$可得$BC=DC=3$，$S_{四边形ABCD}=2S_{\triangle ABC}=12$．在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，根据勾股定理求得$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，由$AB=AD$，$BC=DC$，可得$AC$垂直平分$BD$，又根据对角线互相垂直的四边形的面积等于对角线乘积的一半可得$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，代入可求得$BD=\frac{24}{5}$．

【详解】（1）$\because AC$平分$\angle BAD$

$\therefore \angle BAC=\angle CAD$

$\because CB\perp AB$，$CD\perp AD$

$\therefore \angle ABC=\angle ADC=90^{\circ}$

在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle ADC\\ \angle BAC=\angle DAC\\ AC=AC\end{cases}，$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC(\mathrm{AAS})$．

（2）$\because \triangle ABC\cong\triangle ADC$，

$\therefore BC=DC=3$，

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ABC}=2\times\frac{1}{2}\times AB\times BC=2\times\frac{1}{2}\times 4\times 3=12$．

∵在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AB=4$，$BC=3$，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^3}=5$，

∵$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，

∴$AB=AD$，$BC=DC$，

∴AC垂直平分BD，

∴$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，

∴$\frac{1}{2}\times 5\cdot BD=12$，

∴$BD=\frac{24}{5}$．

【点睛】本题考查三角形全等的证明与性质，勾股定理，对角线互相垂直的四边形的面积，熟练运用四边形的面积求线段的长是解题的关键．

8．（1）①$60°$；②相等；（2）$\angle BEC=90°$，$BE=CE+DE$，理由见解析；（3）$\sqrt{7}$．

【分析】（1）①首先根据等边三角形的性质得到$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE=\angle ADE=\angle AED=60°$，然后根据题意证明出$\triangle BAD\cong\triangle CAE(\mathrm{SAS})$，最后利用$\angle BEC=\angle AEC-\angle AED=60°$求解即可；

②根据全等三角形的性质求解即可；

（2）首先根据等腰直角三角形的性质得到$AB=AC$，$AD=AE$，然后证明出$\triangle BAD\cong\triangle CAE(\mathrm{SAS})$，利用全等三角形的性质得到$BD=CE$，$\angle ABD=\angle ACE$，进而求解即可；

（3）以AP为边作等边三角形APD，连接CD，证明出$\triangle BAP\cong\triangle CAD(\mathrm{SAS})$，然后得到$CD=BP=4$，$DP=AP=3$，然后得到，$\angle DPC=\angle DPA+\angle APC=60°+30°=90°$最后利用勾股定理求解即可．

【详解】（1）①∵$\triangle ABC$和$\triangle ADE$均为等边三角形，

∴$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE=\angle ADE=\angle AED=60°$，

∴$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle ADB=180°-\angle ADE=120°$，

∴$\triangle BAD\cong\triangle CAE(\mathrm{SAS})$，

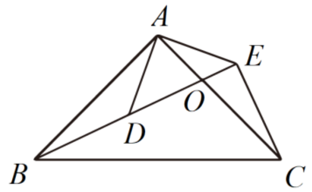
∴$\angle ADB=\angle AEC=120°$，

∴$\angle BEC=\angle AEC-\angle AED=60°$， ②$\because \triangle BAD \cong \triangle CAE(\text{SAS})$，

$\therefore BD = CE$；

故答案为：①60°；②相等；

（2）如图所示，设 AC 与 BE 交于点 O，



$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等腰直角三角形，$\angle BAC = \angle DAE = 90°$，

$\therefore AB = AC$，$AD = AE$，

$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$，

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE(\text{SAS})$，

$\therefore BD = CE$，$\angle ABD = \angle ACE$，

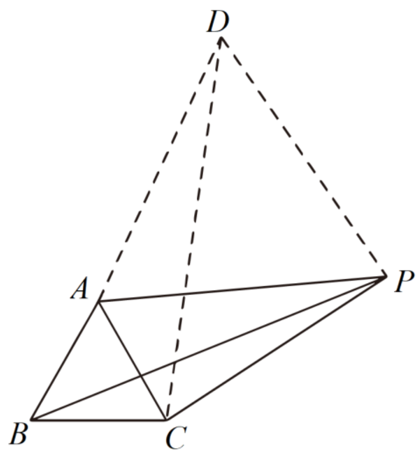
$\because \angle AOB = \angle COE$，

$\therefore \angle BEC = \angle BAC = 90°$；

$\because BE = BD + DE$，

$\therefore BE = CE + DE$；

（3）如图所示，以 AP 为边作等边三角形 APD，连接 CD，



$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle APD$ 是等边三角形，

$\therefore AB = AC$，$AP = AD$，$\angle BAC = \angle PAD = 60°$，

$\therefore \angle BAC + \angle CAP = \angle PAD + \angle CAP$，

$\therefore \angle BAP = \angle CAD$，

$\therefore \triangle BAP \cong \triangle CAD(\text{SAS})$，

$\therefore CD = BP = 4$，

$\because \triangle ADP$ 为等边三角形，

$\therefore DP = AP = 3$，$\angle APD = 60^{\circ}$，

$\therefore \angle DPC = \angle DPA + \angle APC = 60^{\circ} + 30^{\circ} = 90^{\circ}$，

$\therefore$在 $\text{Rt}\triangle CPD$ 中，$PC = \sqrt{CD^2 - DP^2} = \sqrt{7}$，

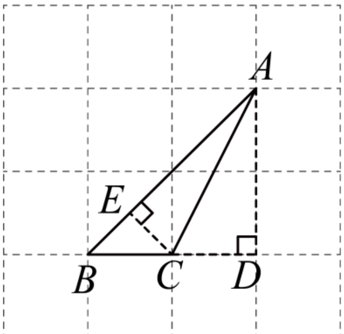
故答案为：$\sqrt{7}$．

【点睛】此题考查了全等三角形的性质和判定，勾股定理，等边三角形和等腰直角三角形的性质，解题的关键是添加辅助线构造全等三角形．

9．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】本题主要考查格点三角形，勾股定理，等面积法求高等知识的综合，掌握以上知识是解题的关键．过点A作 $AD \perp BC$ 的延长于点 D，过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E，可得 AD, BC, BD 的长，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，可求出 AB 的长，根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}AB \cdot CE$，即三角形的等面积法即可求解．

【详解】解：如图所述，过点A作 $AD \perp BC$ 的延长于点 D，过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E，



$\because \triangle ABC$ 是格点图形，每个小正方形的边长为单位1，

$\therefore AD = 2$，$BC = 1$，$BD = 2$，

$\therefore$在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$，

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}AB \cdot CE$，

$\therefore CE=\dfrac{BC\cdot AD}{AB}=\dfrac{1\times 2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \triangle ABC$ 中 AB 边上的高为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

10．(1) $2\sqrt{2}+10$

(2) 7

【分析】本题考查勾股定理，三角形、矩形的面积，

（1）由勾股定理求出 AD，AB，BC，CD 的长，即可求出四边形 $ABCD$ 的周长；

（2）求出矩形 $MNPQ$、$\triangle QAD$、$\triangle PAB$、$\triangle NBC$、$\triangle MCD$ 的面积，即可求出四边形 $ABCD$ 的面积；

解题的关键是由勾股定理求出四边形 $ABCD$ 的边长及等积变换的应用．

【详解】（1）解：$\because$点 A、B、C、D 在边长为1的正方形网格的格点上，

$\therefore AD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$CD=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 的周长为：$AD+AB+BC+CD=\sqrt{2}+5+\sqrt{2}+5=2\sqrt{2}+10$；

（2）$\because$矩形 $S_{矩形MNPQ}=4\times 5=20$，

$S_{\triangle QAD}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}=S_{\triangle NBC}$，

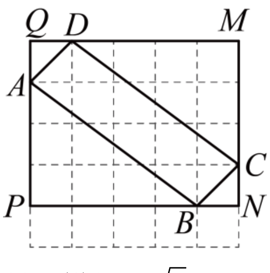
$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6=S_{\triangle MCD}$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{矩形MNPQ}-S_{\triangle QAD}-S_{\triangle NBC}-S_{\triangle PAB}-S_{\triangle MCD}$

$=20-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-6-6$

$=7$，

故答案为：7．



11．(1)8，$2\sqrt{2}$

(2)见解析

(3)见解析

【分析】本题考查勾股定理与网格，勾股定理与无理数，实数与数轴．利用数形结合的思想是解题关键．

（1）由勾股定理可直接求出正方形的边长是$2\sqrt{2}$，再根据正方形面积的计算公式求解即可；

（2）根据直角边分别为3和1的直角三角形的斜边为$\sqrt{10}$，画出正方形的四条边即可；

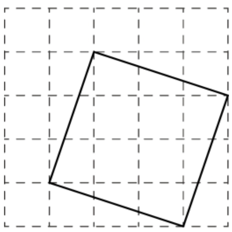
（3）根据直角边分别为3和1的直角三角形的斜边为$\sqrt{10}$，再在数轴负半轴画出表示$-\sqrt{10}$的点即可．

【详解】（1）解：阴影部分正方形的边长是$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

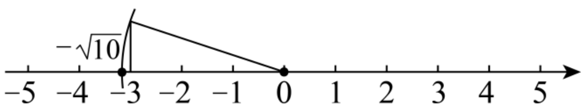
$\therefore$图1中阴影部分的面积是$2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$．

故答案为：8，$2\sqrt{2}$；

（2）解：如图所示正方形即为所作；



（3）解：在数轴上作出表示$-\sqrt{10}$的点，如图．



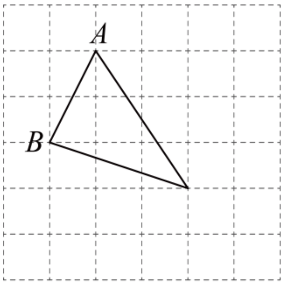
12．(1) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{7}{2}$

(2)作图见解析，$S_{\triangle DEF}=3$

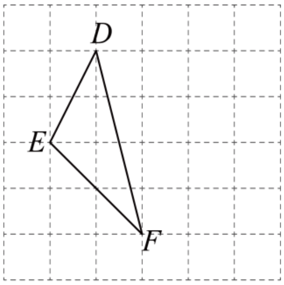
【分析】（1）结合割补法根据正方形的面积公式、三角形的面积公式计算；

（2）根据勾股定理画出$\triangle DEF$，根据正方形的面积公式、三角形的面积公式计算即可；

【详解】（1）解：如图①，$S_{\triangle ABC}=3\times3-\dfrac{1}{2}\times1\times3-\dfrac{1}{2}\times1\times2-\dfrac{1}{2}\times3\times2=\dfrac{7}{2}$；



图①



图②

（2）解：$\triangle DEF$ 如图②所示，

$S_{\triangle DEF}=2\times4-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times4=3$；

【点睛】本题考查的是勾股定理、三角形和正方形的面积计算，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$．

13．(1)①3；②满足，证明见解析

(2) m^2

【分析】（1）设两直角边分别为 x，y，斜边为 z，用 x，y，z 分别表示正方形、圆、等边三角形的面积，根据 $x^2+y^2=z^2$，求解 S_1, S_2, S_3 之间的关系，进而可得结果；②根据 $a^2+b^2=c^2$，$S_1+S_2=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}+\frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}+\frac{ab}{2}-\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}=\frac{ab}{2}$，$S_3=\frac{ab}{2}$，可得 $S_1+S_2=S_3$；

（2）由题意知，$S_A=a^2$，$S_B=b^2$，$S_C=c^2$，$S_D=d^2$，$\left(S_A+S_B\right)+\left(S_C+S_D\right)=S_M=m^2$，代入求解即可．

【详解】（1）①解：设两直角边分别为 x，y，斜边为 z，

则图 2 中，$S_1=x^2, S_2=y^2, S_3=z^2$，

$\because x^2+y^2=z^2$，

$\therefore S_1+S_2=S_3$，故图 2 符合题意；

图 3 中，$S_1=\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi x^2}{8}$，$S_2=\frac{\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi y^2}{8}$，$S_3=\frac{\pi\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi z^2}{8}$，

$\because \frac{\pi x^2}{8}+\frac{\pi y^2}{8}=\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{8}=\frac{\pi z^2}{8}$，

$\therefore S_1+S_2=S_3$，故图 3 符合题意；

图 4 中，$S_1=\frac{1}{2}x\cdot x\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$，$S_2=\frac{1}{2}y\cdot y\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}y^2}{4}$，$S_3=\frac{1}{2}z\cdot z\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}z^2}{4}$，

$\because \frac{\sqrt{3}x^2}{4}+\frac{\sqrt{3}y^2}{4}=\frac{\sqrt{3}\left(x^2+y^2\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}z^2}{4}$，

$\therefore S_1+S_2=S_3$，故图 4 符合题意；

∴这 3 个图形中面积关系满足$S_1+S_2=S_3$的有 3 个，

故答案为：3；

②解：满足，证明如下：

由题意知$a^2+b^2=c^2$，$S_1+S_2=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}+\frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}+\frac{ab}{2}-\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}=\frac{ab}{2}$，$S_3=\frac{ab}{2}$，

$\therefore S_1+S_2=S_3$；

（2）解：由题意知，$S_A=a^2$，$S_B=b^2$，$S_C=c^2$，$S_D=d^2$，

$\left(S_A+S_B\right)+\left(S_C+S_D\right)=S_M=m^2$，

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=m^2$，

故答案为：m^2．

【点睛】本题考查了勾股定理，勾股树．解题的关键在于正确的表示各部分的面积．

14．(1)$c^2=a^2+b^2$

(2)3

(3)7.5

【分析】（1）梯形的面积等于三个直角三角形的面积的和．即可得：$c^2=a^2+b^2$；

（2）根据勾股定理可得三个图形中面积关系满足$S_1+S_2=S_3$的有 3 个；

（3）根据半圆面积和勾股定理即可得结论：$S_1+S_2=S_3$，进而求解．

【详解】（1）解：$c^2=a^2+b^2$

四边形$ABED$的面积可以表示为：

$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}(a+b)^2$，

也可以表示为$\frac{1}{2}c^2+2\times\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+ab$，

所以$\frac{1}{2}c^2+ab=\frac{1}{2}(a+b)^2$，整理得$c^2=a^2+b^2$；

（2）设直角三角形的三条边按照从小到大分别为 a，b，c，则 $a^2+b^2=c^2$，

图③，$\because S_1=c^2, S_2=b^2$，$S_3=a^2$，

$\therefore S_1+S_2=c^2+b^2=a^2=S_3$，

图④，$\because S_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{\pi c^2}{8}, S_2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{\pi b^2}{8}, S_3=\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8},$

$\therefore S_1+S_2=\frac{\pi\left(c^2+b^2\right)}{8}=\frac{\pi a^2}{8}=S_3$，

图⑤，$\because S_1=\frac{1}{2}\bullet c\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{\sqrt{3}c^2}{4}, S_2=\frac{1}{2}\bullet b\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{\sqrt{3}b^2}{4}, S_3=\frac{1}{2}\bullet a\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}a^2}{4},$

$\therefore S_1+S_2=\frac{\sqrt{3}\left(c^2+b^2\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=S_3$，

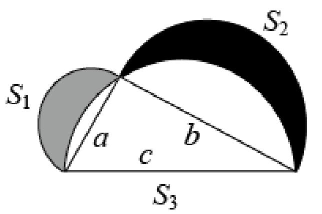
故答案为：3．

（3）$\because S_1+S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2+S_3-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$，

$\therefore S_1+S_2=\frac{1}{8}\pi\left(a^2+b^2-c^2\right)+S_3$，

$\because a^2+b^2=c^2$，

$\therefore S_1+S_2=S_3=\frac{1}{2}\times3\times5=7.5$．



【点睛】本题考查了勾股定理的证明，解决本题的关键是掌握勾股定理．

15．(1)$\triangle BCF$ 为等腰直角三角形，理由见解析

(2)证明见解析

【分析】本题考查的是勾股定理，全等三角形的性质和判定，等腰三角形和等腰直角三角形的性质和判定，第二问正确作出辅助线是关键．

（1）先根据等腰三角形三线合一的性质得 $BD=CD$，得 AD 垂直平分 BC，则 $BF=CF$，再利用 $\angle CBE=45°$ 即可证明；

（2）在 BF 上取一点 H，使 $BH=EF$，连接 CH，证明 $\triangle CHB\cong\triangle AEF(\mathrm{SAS})$，得 $AE=CH$，

$\angle AEF=\angle BHC$，由等腰三角形三线合一的性质得$EF=FH$，最后由勾股定理和等量代换可得结论．

【详解】（1）解：$\triangle BCF$为等腰直角三角形，理由如下：

$\because AB=AC$，$AD\perp BC$

$\therefore BD=CD$，

$\therefore AD$垂直平分BC，

$\therefore BF=CF$，

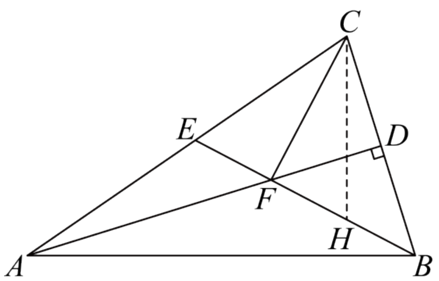
$\because \angle CBE=45^\circ$，

$\therefore \angle BCF=\angle CBF=45^\circ$，

$\therefore \angle CFB=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ$，

$\therefore \triangle BCF$为等腰直角三角形；

（2）解：在BF上取一点H，使$BH=EF$，连接CH，



$\because \triangle BCF$为等腰直角三角形，$AD\perp BC$，

$\therefore \angle CFB=90^\circ$，$\angle CFD=\angle BFD=45^\circ$，

$\therefore \angle AFE=45^\circ$，

在$\triangle CHB$和$\triangle AEF$中，

$$\begin{cases} BH=EF \\ \angle CBH=\angle AFE=45^\circ \\ BC=AF \end{cases},$$

$\therefore \triangle CHB\cong\triangle AEF(\text{SAS})$，

$\therefore AE=CH$，$\angle AEF=\angle BHC$，

$\therefore \angle CEF=\angle CHE$，

$\therefore CE=CH$，

又$\because \angle CFB=90^\circ$，

$\therefore EF=FH$，