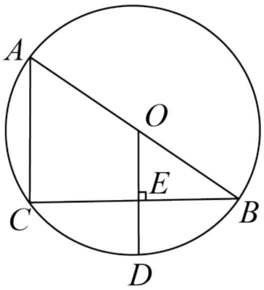
中考数学《圆的综合》专题训练(含有答案)

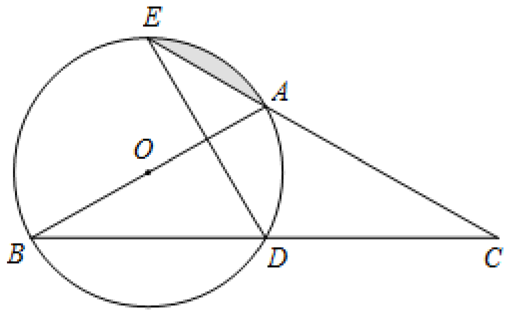
1．如图，：AB是$\odot O$的直径：BC是$\odot O$弦，$OD\perp CB$于点E，交$\overset{\frown}{BC}$于点D．



(1)请写出三个不同类型的正确结论

(2)连结CD，设$\angle BCD=\alpha$　　$\angle ABC=\beta$　　试找出α与β之间的一种关系式并给予证明．

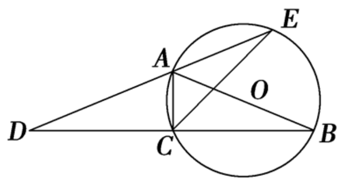
2．如图，，在$\triangle ABC$中　　$AB=AC$　　以AB为直径的$\odot O$交BC于点D　　交CA的延长线于点E．



(1)求证点D为线段BC的中点．

(2)若$BC=6\sqrt{3}$　　$AE=3$　　求$\odot O$的半径及阴影部分的面积．

3．如图，AB为$\odot O$的直径　　点C在$\odot O$上　　延长BC至点D　　使$DC=CB$．延长DA与$\odot O$的另一个交点为E　　连结AC，CE．



(1)求证$\angle D=\angle E$

(2)若$AB=4$，$BC-AC=2$　　求CE的长．

4．请仅用无刻度的直尺完成下列作图　　不写作法　　保留作图痕迹

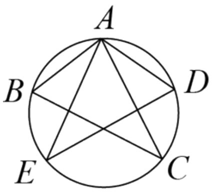


图1

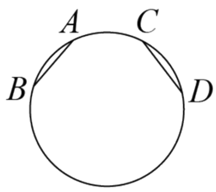
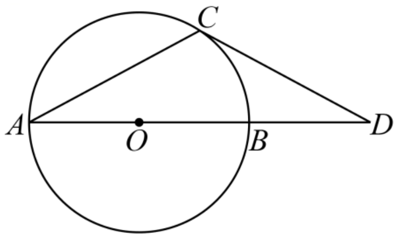


图2

(1)如图1，　$\triangle ABC$与$\triangle ADE$是圆内接三角形　　$AB=AD$　　$AE=AC$　　画出圆的一条直径．

(2)如图 2 ， AB CD 是圆的两条弦 $AB=CD$ 且不相互平行 画出圆的一条直径．

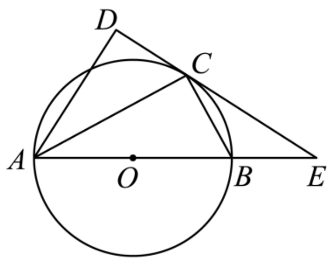
5．如图，AB 是 $\odot O$ 的直径 点 D 在 AB 的延长线上 点 C 在 $\odot O$ 上 $CA=CD,\angle CDA=30°$．



(1)求证 CD 是 $\odot O$ 的切线

(2)若 $\odot O$ 的半径为 6 求点 A 到 CD 所在直线的距离．

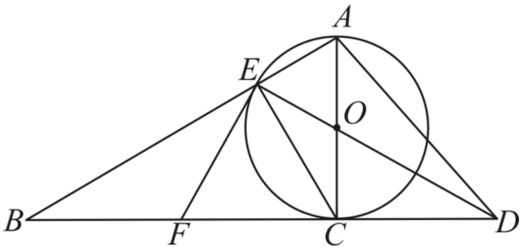
6．如图， 点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上 过 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于 E $AD\perp CE$ 于 D 连接 AC．



(1)求证 $\angle ACD=\angle ABC$

(2)若 $\tan\angle CAD=\frac{3}{4}$ $AD=8$ 求 $\odot O$ 直径 AB 的长．

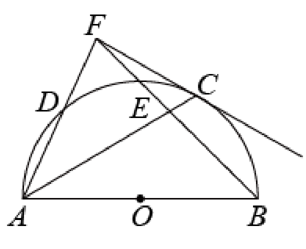
7．如图， 已知以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AC 为直径作 $\odot O$ 交斜边 AB 于点 E 连接 EO 并延长交 BC 的延长线于点 D 连接 AD 点 F 为 BC 的中点 连接 EF．



(1)求证 EF 是 $\odot O$ 的切线

(2)若 $\odot O$ 的半径为 6 $CD=8$ 求 AB 的长．

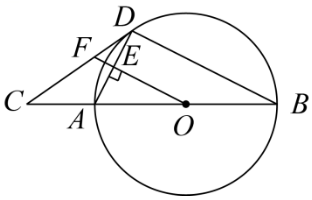
8．如图， AB 是半圆 O 的直径 D 为半圆 O 上的点(不与 A B 重合) 连接 AD 点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点 过点 C 作 $CF\perp AD$ 交 AD 的延长线于点 F 连接 BF AC 交于点 E．



(1)求证 FC 是半圆 O 的切线

(2)若 $AF=3$　$AC=2\sqrt{3}$　求半圆 O 的半径及 AE 的长.

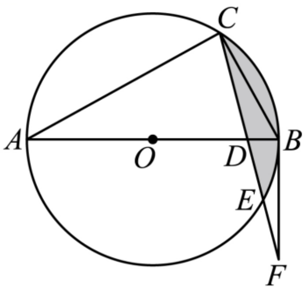
9. 如图，　AB 为 $\odot O$ 的直径　C 为 BA 延长线上一点　CD 是 $\odot O$ 的切线　D 为切点　$OF\perp AD$ 于点 E　交 CD 于点 F.



(1)求证 $\angle ADC=\angle AOF$

(2)若 $\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{5}{3}$　$BD=24$　求 EF 的长.

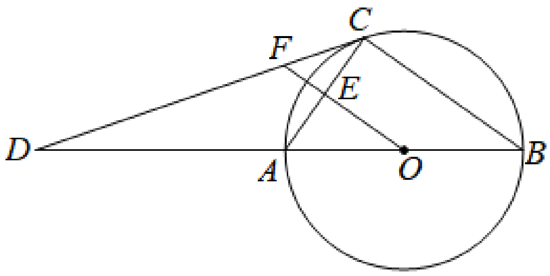
10. 如图，所示　AB 是 $\odot O$ 的直径　点 D 在 AB 上　点 C 在 $\odot O$ 上　$AD=AC$　CD 的延长线交 $\odot O$ 于点 E.



(1)在 CD 的延长线上取一点 F　使 $BF=BC$　求证 BF 是 $\odot O$ 的切线

(2)若 $AB=2$　$CE=\sqrt{2}$　求图中阴影部分的面积.

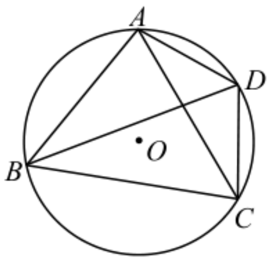
11. 如图，　$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$　AB 为 $\odot O$ 的直径　D 为 BA 延长线上一点　连接 CD　过 O 作 $OF\parallel BC$ 交 AC 于点 E　交 CD 于点 F　$\angle ACD=\angle AOF$.



(1)求证 CD 为圆 O 的切线

(2)若 $\sin D=\dfrac{1}{4}$　$BC=10$　求 EF 的长.

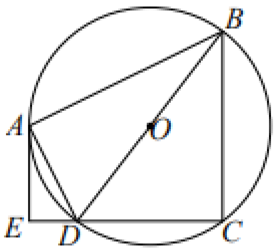
12. 如图，　四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$　$\angle BAC=70^\circ$　$\angle ACB=50^\circ$.



(1)求$\angle ABD$的度数

(2)求$\angle BAD$的度数.

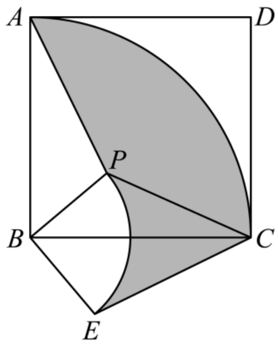
13．如图， 四边形$ABCD$是$\odot O$的内接四边形 且对角线BD为$\odot O$的直径 过点A作$AE \perp CD$与CD的延长线交于点E 且DA平分$\angle BDE$.



(1)求证AE是$\odot O$的切线

(2)若$\odot O$的半径为5 $CD=6$ 求DA的长.

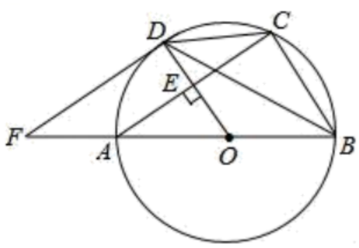
14．如图， 在正方形$ABCD$中有一点P 连接AP BP 旋转$\triangle APB$到$\triangle CEB$的位置.



(1)若正方形的边长是8 $BP=4$．求阴影部分面积

(2)若$BP=4$ $AP=7$ $\angle APB=135°$ 求PC的长.

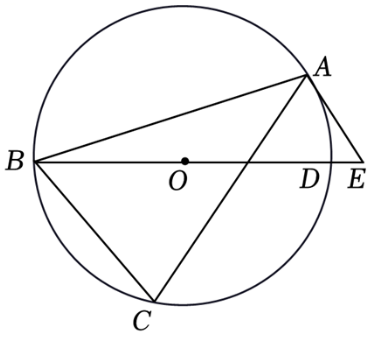
15．如图， AB是$\odot O$的直径 OD垂直于弦AC于点E 且交$\odot O$于点D F是BA延长线上一点 若$\angle CDB=\angle BFD$.



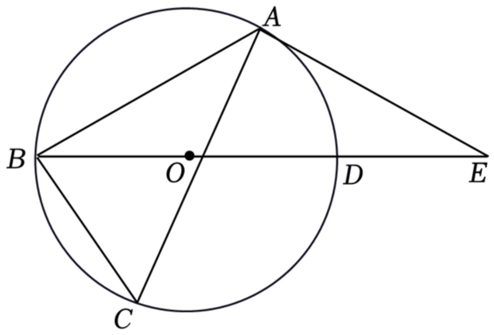
(1)求证 FD是$\odot O$的一条切线

(2)若 $AB=15$，$BC=9$，求 DF 的长．

16．如图，$\odot O$ 是 ΔABC 的外接圆，AE 切 $\odot O$ 于点A，AE 与直径 BD 的延长线相交于点 E．



图①

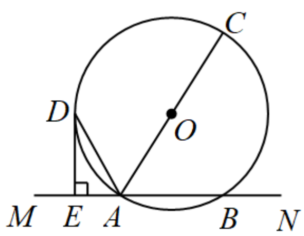


图②

(1)如图，①，若 $\angle C=70^\circ$，求 $\angle E$ 的大小

(2)如图，②，若 $AE=AB$，求 $\angle E$ 的大小．

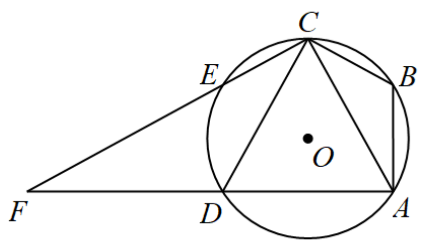
17．已知，如图，直线 MN 交 $\odot O$ 于 A，B 两点，AC 是直径，AD 平分 $\angle CAM$ 交 $\odot O$ 于 D，过 D 作 $DE\perp MN$ 于 E．



(1)求证 DE 是 $\odot O$ 的切线

(2)若 $DE=8\text{cm}$，$AE=4\text{cm}$，求 $\odot O$ 的半径．

18．已知四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，C 是 $\overset{\frown}{DBA}$ 的中点，$FC\perp AC$ 于 C，与 $\odot O$ 及 AD 的延长线分别交于点 E,F，且 $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{BC}$．



(1)求证 $\triangle CBA\sim\triangle FDC$

(2)如果 $AC=9, AB=4$，求 $\tan\angle ACB$ 的值．

参考答案与解析

1．(1)见解析

(2)关系式为$2\alpha+\beta$=90°　　证明见解析

【分析】（1）AB是eO的直径　　BC是弦　　$OD\perp BC$于E　　本题满足垂径定理.

（2）连接CD,DB　　根据四边形$ACDB$为圆内接四边形　　可以得到$2\alpha+\beta=90°$.

【解析】（1）解不同类型的正确结论有

①$BE=CE$

②$BD=CD$

③$\angle BED=90°$

④$\angle BOD=\angle A$

⑤$AC\parallel OD$

⑥$AC\perp BC$

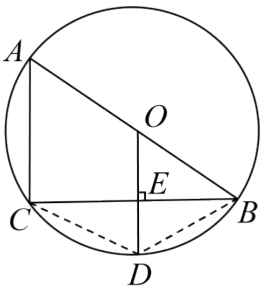
⑦$OE^2+BE^2=OB^2$

⑧$S_{\triangle ABC}=BC\cdot OE$

⑨VBOD是等腰三角形

⑩$\triangle BOE\backsim\triangle BAC$等等.

（2）如图，　　连接CD,DB



α与β之间的关系式为$2\alpha+\beta=90°$

证明QAB为圆O的直径

$\therefore\angle A+\angle ABC=90°$①

又Q四边形$ACDB$为圆内接四边形

$\therefore\angle A+\angle CDB=180°$②

$\therefore$②-①得$\angle CDB-\angle ABC=90°$

$\because\angle CDB=180°-2\angle BCD=180°-2\alpha$

即$180°-2\alpha-\beta=90°$

$\therefore 2\alpha+\beta$=90°.

【点评】本题考查了圆的一些基本性质　　且有一定的开放性　　垂径定理　　圆内接四边形的性质

掌握圆的相关知识.

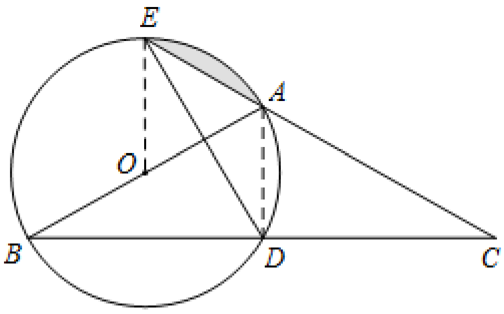
2．(1)见解析

(2)半径为 3　　$S_{阴}=\frac{3}{2}\pi-\frac{9}{4}\sqrt{3}$

【分析】（1）连结 AD　　可得 $\angle ADB=90^{\circ}$　　已知 $AB=AC$　　根据等腰三角形三线合一的性质即可得证点 D 为线段 BC 的中点

（2）根据已知条件可证 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$　　得到 $\frac{ED}{AB}=\frac{EC}{BC}$　　$2BD^{2}=AB\cdot EC$　　且 $\triangle EDC$ 是等腰三角形　　进而得到 $ED=DC=BD$　　设 $AB=x$　　则 $2\left(3\sqrt{3}\right)^{2}=x\left(x+3\right)$　　解方程即可求得 $\odot O$ 的半径　　连接 OE　　可证 $\triangle AOE$ 是等边三角形　　再根据 $S_{阴}=S_{扇形AOE}-S_{\triangle AOE}$ 即可求出阴影部分的面积

【解析】（1）连结 AD



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径

$\therefore \angle ADB=90^{\circ}$

$\because AB=AC$

$\therefore BD=CD$

即点 D 为线段 BC 的中点.

（2）$\because \angle B=\angle E$　　$\angle C=\angle C$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEC$

$\therefore \frac{ED}{AB}=\frac{EC}{BC}$

$\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle C$

$\therefore \angle C=\angle E$

$\therefore ED=DC=BD$

$\therefore 2BD^{2}=AB\cdot EC$

设 $AB=x$　　则

$2\left(3\sqrt{3}\right)^{2}=x\left(x+3\right)$

解得 $x_1=-9$（舍去） $x_2=6$

$\therefore \odot O$ 的半径为3

连接 OE

$\therefore \angle AOE=60^\circ$

$\therefore \triangle AOE$ 是等边三角形

$\therefore AE$ 边上的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S_{阴}=S_{扇形AOE}-S_{\triangle AOE}$

$=\frac{60\times\pi\times3^2}{360}-\frac{1}{2}\times3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3}{2}\pi-\frac{9}{4}\sqrt{3}$

【点评】本题主要考查等腰三角形的性质 相似三角形的判定和性质 不规则图形面积的计算 熟练掌握相关知识点是解题的关键.

3．(1)见解析

(2) CE 的长为 $1+\sqrt{7}$

【分析】（1）由 AB 为 $\odot O$ 的直径得 $\angle ACB=90^\circ$ 通过证明 $\triangle ACD\cong\triangle ACB(\text{SAS})$ 得到 $\angle D=\angle B$ 又由 $\angle B=\angle E$ 从而得到 $\angle D=\angle E$

（2）设 $BC=x$ 则 $AC=x-2$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 由勾股定理可得 $AC^2+BC^2=AB^2$ 即 $(x-2)^2+x^2=4^2$ 解一元二次方程得到 BC 的长 由（1）知 $\angle D=\angle E$ 从而得到 $CD=CE$ 又由 $DC=CB$ 得到 $CE=CB=1+\sqrt{7}$.

【解析】（1）证明 $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径

$\therefore \angle ACB=90^\circ$

$\because \angle ACD+\angle ACB=180^\circ$

$\therefore \angle ACD=90^\circ$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ACB$ 中

$$\begin{cases}AC=AC\\ \angle ACD=\angle ACB\\ DC=BC\end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle ACB(\text{SAS})$

$\therefore \angle D=\angle B$

$\because \angle B=\angle E$

$\therefore \angle D=\angle E$

（2）解设 $BC=x$

Q $BC-AC=2$

$\therefore AC=x-2$

在 Rt$\text{V}ABC$ 中　由勾股定理可得 $AC^2+BC^2=AB^2$

即 $\left(x-2\right)^2+x^2=4^2$

解得 $x_1=1+\sqrt{7}$　$x_2=1-\sqrt{7}$（舍去）

$\therefore BC=1+\sqrt{7}$

由（1）得 $\angle D=\angle E$

$\therefore CD=CE$

Q $DC=CB$

$\therefore CE=CB=1+\sqrt{7}$

$\therefore$ CE 的长为 $1+\sqrt{7}$．

【点评】本题主要考查了圆周角定理　三角形全等的判定与性质　等腰三角形的性质　勾股定理解直角三角形　熟练掌握圆周角定理　三角形全等的判定与性质　等腰三角形的性质是解题的关键．

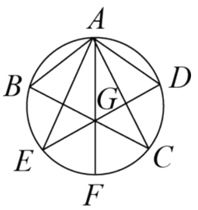
4．(1)见解析

(2)见解析

【分析】（1）设 BC　DE 交于点 G　连接 AG　交圆于点 F　即可作答

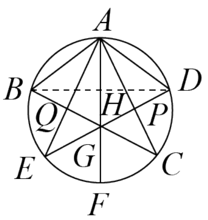
（2）连接 BC　AD　交于点 F　延长 BA　DC　两线交于点 E　作直线 EF　交圆于点 M　N　即可作答．

【解析】（1）如图，　设 BC　DE 交于点 G　连接 AG 并延长　交圆于点 F



线段 AF 即为所求

证明如图，　BC　AE 交于点 Q　DE　AC 交于点 P　连接 DB　交 AF 于点 H



$\because AB=AD$　$AE=AC$

$\therefore \angle C=\angle E$　$\angle ADE=\angle ABC$

$\therefore \angle DAE=\angle BAC$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle BAC$

$\therefore BC = DE$

$\because \angle DAE = \angle BAC$

$\therefore \angle BAE = \angle DAC$

$\because AB = AD \qquad \angle ADE = \angle ABC$

$\therefore \triangle DAP \cong \triangle BAQ$

$\therefore AQ = AP$

$\because AE = AC$

$\therefore QE = PC$

$\because \angle QGE = \angle PGC \qquad \angle C = \angle E$

$\therefore \triangle QGE \cong \triangle PGC$

$\therefore QG = PG$

$\because AG = AG \qquad AQ = AP$

$\therefore \triangle QAG \cong \triangle PAG$

$\therefore \angle QAG = \angle PAG$

$\because \angle BAE = \angle DAC$

$\therefore \angle BAG = \angle DAG$

$\because AH = AH \qquad AB = AD$

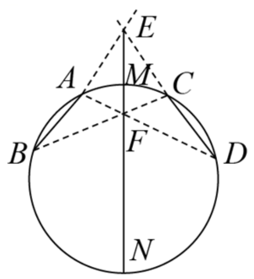
$\therefore \triangle BAH \cong \triangle DAH$

$\therefore BH = DH \qquad \angle AHB = \angle AHD = 90°$

$\therefore AF$ 垂直平分弦 DB

$\therefore AF$ 是圆的直径

（2）如图，　　连接 BC　　AD　　交于点 F　　延长 BA　　DC　　两线交于点 E　　作直线 EF 交圆于点 M　　N



线段 MN 即为所求．

证明方法同（1）．

【点评】本题主要考查了垂径定理　　圆周角定理以及全等三角形的判定与性质等知识　　掌握圆周角定理以及垂径定理是解答本题的关键．

5．(1)见解析

(2)9

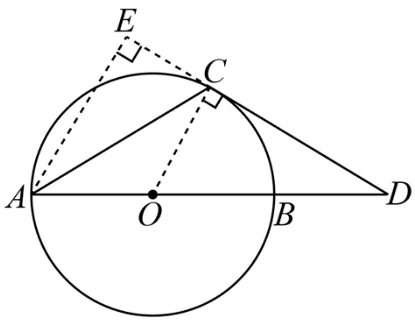
【分析】（1）已知点 C 在 $\odot O$ 上　先连接 OC　由已知 $CA=CD$　$\angle CDA=30^\circ$　得 $\angle CAO=30^\circ$　$\angle ACO=30^\circ$　所以得到 $\angle COD=60^\circ$　根据三角形内角和定理得 $\angle DCO=90^\circ$　即能判断直线 CD 与 $\odot O$ 的位置关系.

（2）要求点 A 到 CD 所在直线的距离　先作 $AE\perp CD$　垂足为 E　由 $\angle CDA=30^\circ$　得 $AE=\dfrac{1}{2}AD$　在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中　半径 $OD=6$　所以 $OD=2OC=12$　$AD=OA+OD=18$　从而求出 AE.

【解析】（1）$\because \triangle ACD$ 是等腰三角形　$\angle D=30^\circ$

$\therefore \angle CAD=\angle CDA=30^\circ$.

连接 OC



$\because AO=CO$

$\therefore \triangle AOC$ 是等腰三角形

$\therefore \angle CAO=\angle ACO=30^\circ$

$\therefore \angle COD=60^\circ$

在 $\triangle COD$ 中　又 $\because \angle CDO=30^\circ$

$\therefore \angle DCO=90^\circ$

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线　即直线 CD 与 $\odot O$ 相切.

（2）过点 A 作 $AE\perp CD$　垂足为 E.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中　$\because \angle CDO=30^\circ$

$\therefore OD=2OC=12$

$AD=AO+OD=6+12=18$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中

$\because \angle EDA=30^\circ$

$\therefore$ 点 A 到 CD 边的距离为 $AE=\dfrac{AD}{2}=9$.

【点评】此题考查的知识点是切线的判定与性质　解题的关键是运用直角三角形的性质及 30° 角所对直角边的性质.

6．(1)见解析

(2) $AB=\dfrac{25}{2}$.

【分析】（1）连接OC　由DE为$\odot O$的切线　得到$OC\perp DE$　再由$AD\perp CE$　得到$AD\parallel OC$　得到$\angle OCA=\angle CAD$　根据$OA=OC$　利用等边对等角得到$\angle OCA=\angle CAB$　等量代换得到$\angle CAD=\angle CAB$　由AB为$\odot O$的直径　可知$\angle ACB=90^{\circ}$　最后根据等角的余角相等可得结论

（2）在$\mathrm{Rt}\triangle CAD$中　利用锐角三角函数定义求出CD的长　根据勾股定理求出AD的长　由（1）易证$\triangle ADC\backsim\triangle ACB$　得到$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$　即可求出AB的长．

【解析】（1）解连接OC

由题意可知DE与$\odot O$的相切于C

$\therefore OC\perp DE$

$\because AD\perp CE$

$\therefore AD\parallel OC$

$\therefore \angle OCA=\angle CAD$

$\because OA=OC$

$\therefore \angle OCA=\angle CAB$

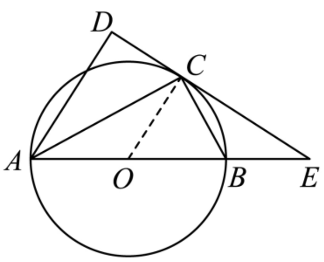
$\therefore \angle CAD=\angle CAB$

$\because AB$为$\odot O$的直径

$\therefore \angle ACB=90^{\circ}$

$\therefore \angle CAD+\angle ACD=\angle CAB+\angle ABC=90^{\circ}$

$\therefore \angle ACD=\angle ABC$



（2）在$\mathrm{Rt}\triangle CAD$中

$\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{4}$　$AD=8$

$\therefore CD=\frac{3}{4}AD=6$

$\therefore AC=\sqrt{CD^{2}+AD^{2}}=\sqrt{6^{2}+8^{2}}=10$

由（1）可知$\angle CAD=\angle CAB$

$\angle D=\angle ACB=90^{\circ}$

$\therefore\triangle ADC\backsim\triangle ACB$

$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$