

# 几种不同模型下的量子稠密编码性质研究

## 中文摘要

在量子信息科学中，量子纠缠现象在各个方面都有着十分广泛的应用，其中包括量子稠密编码、量子隐形传态、量子密钥分配等。量子稠密编码用纠缠态作为信道，在量子通信中利用纠缠态而实现的一种有趣的非经典效果，可以获取比经典信道更高的信息容量，体现出量子纠缠的重要性，如果没有量子纠缠的帮助无法有效的完成量子稠密编码。量子稠密编码是量子信息的重要应用，所以分析研究在不同的模型中稠密编码的特性成了一个重要的内容。如何判断模型中稠密编码容量达到最优是本文的核心内容。本论文主要包括六部分，其中第三章到第五章是本文的主要工作。

第一章介绍了量子信息的发展过程，阐述了量子纠缠的重要性，并且重点回顾了量子稠密编码、量子隐形传态等理论的发展情况。

第二章介绍了量子稠密编码中一些相关理论的基本概念，比如 Von Neumann entropy、DM 相互作用、退相干，阐述了自旋链系统模型以及自旋压缩模型的相关知识，并且对不同类型的系统进行了具体介绍。

第三章我们利用双量子比特的自旋压缩模型对量子稠密编码特性进行了分析研究。双量子比特自旋压缩模型中可以分为两种，即单轴扭转模型和双轴反扭模型。在给出两种模型的哈密顿量和本征向量的基础上，分析了外加磁场 $\Omega$ 、自旋压缩相互作用 $\mu$ 和温度 $T$ 对于稠密编码容量的影响。通过对 $\Omega$ 、 $\mu$ 和 $T$ 这些参数的分析，结果表明参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 对稠密编码容量起着积极作用，而温度 $T$ 对稠密编码容量发挥着消极作用。更重要的是，通过调整优化这些参数，在适当的范围内不仅可以进行有效的稠密编码，而且还能实现最优稠密编码。

第四章以维尔纳态为初始态，研究了退相干条件下二量子位各向异性海森堡 XXZ 模型的最优稠密编码。我们的结果表明，初始状态纯度 $r$ 对最优稠密编码容量的初始值有很大的影响。当初始状态纯度 $r$ 增大时，最优稠密编码容量的初始值也增大。此外，耦合系数和 DM 相互作用都对振荡的频率和可以实现最优稠密编码的时间 $t$ 的发展阈值( $t_f$ )有强烈的影响。有趣的是，退相干率 $\gamma$ 强烈地影响稠密编码能力。随着 $\gamma$ 的减小，

$t_f$ 的面积(使稠密编码容量大于1)变宽。当 $\gamma = 0$ 时,它仍然可以进行有效的稠密编码。因此我们可以调整参数来得到最优的稠密编码。

第五章研究了具有不同初始态的自由空间中两个相同且空间分离的原子之间的量子稠密编码的特性。它显示了稠密编码能力值 $\chi$ 随着 $t$ 的增加先急剧下降后逐渐增加达到一个稳定值1。稠密编码能力的实现很大程度上依赖于初态。值得注意的是初始纯态在这个系统中的稠密编码没有用处,因为稠密编码容量 $\chi$ 总是小于1(有效的稠密编码容量满足 $\chi > 1$ )。另外,对于初始纠缠态和混合态,可以得到有效的稠密编码容量,结果表明存在一个阈值,当 $t < t_c$ 时稠密编码容量是有效的。通过调节两个原子之间的原子距离,使有效稠密编码区域稍微变宽,提高了 $t_c$ 的值。我们的结果表明降低初态的纯度不仅拓宽了编码区域,而且延长了有效稠密编码容量成功进行的有效时间。

第六章选取两比特海森堡 XYZ 自旋系统作为量子信道实施的量子稠密编码过程。通过引入外界不均匀磁场以及环境参量,讨论了不同初态下两比特体系的量子稠密编码随时间的变化效应,详细讨论了磁场 $B$ 以及它的不均匀程度 $b$ 和XY平面的各向异性参数 $\Delta$ 对体系量子稠密编码的影响。结果表明,在不同的初态下,体系可以得到不同性质的量子稠密编码容量,各向异性参数 $\Delta$ 和外加磁场 $B$ 会影响量子稠密编码的性质,(1)外加磁场的大小直接影响最佳稠密编码容量的高低;(2)当体系的外磁场 $B$ 恒定时,体系的最佳编码容量的衰减速度随着参数 $\Delta$ 的减小而减小,而磁场的不均匀度 $b$ 对体系的量子编码取值的影响很弱。通过研究不同参量对 $\chi$ 的影响,表明我们可以通过调节 $B, b, J$ 及各项异性参数 $\Delta$ 的值来获得有效稠密编码(满足 $\chi > 1$ )。通过适当的调节或增大各向异性参量 $\Delta$ 的取值,不仅可以大幅度增大稠密编码容量的取值,而且可以提高存在于有效编码容量寿命。

第七章是本论文的总结和展望。

**关键词:** 自旋压缩模型; 最优稠密编码; 退相干; DM 相互作用

# **The research on the quantum discord properties about several models**

## **ABSTRACT**

In quantum information science, quantum entanglement has a wide range of applications, including quantum dense coding, quantum teleportation, quantum key distribution and so on. Quantum dense coding uses entangled state as a channel, which has an interesting non-classical effect in quantum communication. It can obtain a higher information capacity than the classical channel, reflecting the importance of quantum entanglement. Without the help of quantum entanglement, quantum dense coding cannot be effectively completed. Quantum dense coding is an important application of quantum information, so it becomes an important content to analyze and study the characteristics of dense coding in different models. The core content of this paper is how to determine the optimal dense coding capacity in the model. This thesis mainly includes six chapters, and the main work of this thesis is in chapter three to five.

The first chapter introduces the development of quantum information, elucidate the importance of quantum entanglement, and reviews the development theory of quantum dense coding and quantum teleportation.

The second chapter introduces some fundamental concepts related to quantum dense coding theories, such as Von Neumann entropy, DM interaction, decoherence. We also describes the spin chain system model and spin compression model, and gives a detailed introduction to different types of systems.

In chapter 3, we use the spin compression model of double qubit to analyze the characteristics of quantum dense coding. Two qubit spin compression models can be divided into two types, namely one-axis twisting model and two-axis counter twisting model. Based on the Hamiltonian and eigenvectors of the two models, the effects of external magnetic field  $\Omega$ , squeezing interaction  $\mu$  and temperature  $T$  on dense coding capacity are analyzed. By analyzing the parameters  $\Omega$ ,  $\mu$  and  $T$ , the results show that the parameters and have a positive effect on the dense encoding capacity, while the temperature  $T$  has a negative effect on the dense encoding capacity. More importantly, by adjusting and optimizing these parameters, not only effective dense coding can be carried out in a proper range, but also the optimal dense

coding can be achieved.

In chapter 4, we study the optimal dense coding of the two-qubit anisotropic Heisenberg XXZ model under decoherence conditions, with the Werner state as the initial state. Our results show that the initial state purity  $r$  has a great influence on the initial value of the optimal dense encoding capacity. When the purity  $r$  of the initial state increases, the initial value of the optimal dense coding capacity also increases. In addition, the coupling coefficient and the DM interaction both have a strong influence on the frequency of the oscillation and the area of the  $t$  that the optimal dense coding is feasible ( $t_f$ ). Interestingly, the decoherence rate  $\gamma$  strongly affects the dense coding capacity. With the decrease of  $\gamma$ , the area of  $t_f$  (which will make the dense encoding capacity greater than 1) becomes more wider. When  $\gamma = 0$ , it will still allow a valid dense coding. So we can adjust the parameters to get an optimal dense coding.

In chapter 5, we investigated the properties of quantum dense coding between two identical and spatially separated atoms in free space with different initial states. It shows that the dense coding capacity  $\chi$  experienced a sharp decline firstly and then gradually increased to be one steady value with increasing  $t$ . The implementation of dense coding capability depends heavily on the initial state. It is worth noting that the dense encoding of the initial pure state in this system is not useful because the dense encoding capacity is always less than 1 (a valid dense encoding capacity satisfies  $\chi > 1$ ). In addition, for the initial entangled state and mixed state, the valid dense coding capacity can be obtained. The results show that there is a threshold, and the dense coding capacity is valid when  $t < t_c$ . Tuning the atomic distance between the two atoms slightly broadens the valid dense coding region and improves the value of  $t_c$ . Our results show that reducing the purity of the initial state not only broadens the coding region, but also prolongs the effective time for successful implementation of effective dense coding capacity.

In chapter 6, by introducing the nonuniform magnetic field  $b$  and the decoherence parameters, the properties of quantum dense coding are investigated in detail with different initial states. We mainly investigated the influences of those parameters on dense coding capacity  $\chi$  in detail, such as the nonuniform magnetic field  $b$  and the anisotropic parameter  $\Delta$ . It is shown that the quantum dense coding properties are very complicated under different initial states. The dense coding capacity is strongly influenced by the anisotropic parameters

and additional magnetic field : (1) the magnitude of the dense coding capacity is strongly depended on the value of  $B$ ; (2) when the system of the external magnetic field  $B$  constant, the dense coding value of  $\chi$  is decreased quickly with decreasing the anisotropic parameter  $\Delta$  for fixed  $B$ . The influence of the inhomogeneous magnetic field  $b$  on  $\chi$  is very weakly, and the physical reason is also given. By studying the influences of different parameters on  $\chi$ , it shows that by proper adjusting the value of  $B, b, J$  and the anisotropic parameters  $\Delta$  one can obtain the effective dense coding ( $\chi$  is greater than 1). One point we must mention is that not only the dense coding capacity value is increased but also the range of effective dense coding is broadened.

In chapter 7, we give a summary and prospects.

**KEYWORDS:** spin compression model, optimal dense coding, decoherence, DM interaction



# 目 录

中文摘要 .....	I
ABSTRACT .....	III
1 绪论 .....	1
1.1 量子信息 .....	1
1.2 量子纠缠 .....	3
1.3 量子稠密编码 .....	5
1.3.1 基于 GHZ 态的受控量子稠密编码 .....	8
1.3.2 同时量子稠密编码 .....	10
1.4 量子隐形传态 .....	12
2 相关理论基础 .....	17
2.1 Von Neumann entropy .....	17
2.2 自旋链系统模型 .....	21
2.3 DM 相互作用 .....	23
2.4 自旋压缩模型 .....	24
2.5 退相干 .....	25
3 两种双量子比特自旋压缩模型的稠密编码 .....	29
3.1 引言 .....	29
3.2 模型描述和稠密编码 .....	31
3.3 在 OATM 模型中稠密编码容量的性质 .....	33
3.4 在 TACM 模型中稠密编码容量的性质 .....	36
3.5 总结 .....	39
4 双量子比特的海森堡 XXZ 模型在退相干下的最优稠密编码 .....	41
4.1 引言 .....	41
4.2 模型和主方程的描述 .....	42
4.3 用模型进行稠密编码 .....	44
4.4 本章小结 .....	48
5 自由空间中两个空间分离原子之间的量子稠密编码特性 .....	51
5.1 引言 .....	51
5.2 模型的描述 .....	52
5.3 用模型进行稠密编码 .....	54

5.4 总结 .....	60
6 环境退相干下二比特海森堡 XYZ 自旋系统的量子稠密编码 .....	63
6.1 引言 .....	63
6.2 模型与方法 .....	64
6.3 不同初态条件下的稠密编码容量性质 .....	66
6.4 总结 .....	70
7 总结与展望 .....	73
参考文献 .....	75
在学期间的研究成果 .....	85
致 谢 .....	87



# 1 绪论

## 1.1 量子信息

量子力学<sup>[1-7]</sup>和信息学出现于 20 世纪上半叶,一出现就成为了两大十分重要的学科,对量子力学基本原理的大量使用,使得人们只要研究微观粒子的运动规律就会想到量子力学,大量的物理现象也可以用量子力学来解释,比如隧道效应<sup>[8,9]</sup>、微观粒子的波动性和粒子性以及纠缠现象等等,人类对自然界的认识也变得更加深刻。量子力学基本原理的作用不仅体现在能够解释一些重要的物理问题,例如超导现象<sup>[10]</sup>、基本粒子的产生和湮灭、原子结构,还体现在出现了一些新的科学技术,这些技术的出现促进了人们对幸福美好生活的追求,生活品质和工作效率也越来越高。到 20 世纪后期,这两门学科随着时间的发展融合在一起,出现了另一门新的重要的学科——量子信息学<sup>[11-18]</sup>,也被称为量子信息科学。量子信息科学把量子理论运用到其中,打破了经典信息所带来的局限性,它所带来的新的原理和方法不仅增强了计算机的运算能力、信息的保密性、信息容量、提高了测量的准确性,还为后来信息科学的发展以及变化提供了充足的保障。

最近几年,随着量子力学与信息科学的结合而慢慢发展出现的量子计算机<sup>[19-22]</sup>、量子通信以及量子密码术无论是在理论方面,还是在实验方面,都取得了很大成功,引起了科学界、信息产业界的高度关注。1982 年,第一次有了是不是可以把量子力学和计算机这两门学科放在一起的想法。后来在 1985 年,牛津大学开始研究量子计算机并且给出了量子计算机的定义,在定义中指出经典计算机的功能根本无法与量子计算机的功能相比较。到了 1995 年发现了大数质因子的量子算法<sup>[23]</sup>,给量子计算机的研究注入了活力,慢慢的学者们开始共同关心这个重大交叉科研领域。随着量子计算机的出现,它可以解决一些具有高难度的特定问题,但是并不能取代经典计算机,比如 Shor 分解大数质因子化的量子算法和 Grover 的量子搜索<sup>[24]</sup>,这两种典型的算法目前都具有很大的影响。量子计算机在进行量子计算时其实就是量子系统中量子状态随时间的演化过程,由于这个过程不仅要编码量子信息,还要用到量子的相干性<sup>[25-27]</sup>、叠加性<sup>[28,29]</sup>以及纠缠特性,所以量子计算机的信息处理功能非常强大,即使是容量很大的计算任务也能够实现。经典计算机和量子计算机的计算方法存在相似的地方,都需要经过很多逻辑门<sup>[30]</sup>的操作来实现计算任务。比特是经常运用在经典计算机中,它可以用 0 和 1 来表示两种不同的

经典状态，在计算过程中操作执行这些比特的 0, 1 状态。量子计算机与经典计算机的相似之处在于把量子比特运用到计算机中进行计算，因此，量子计算机在运行的时候实际上就是量子态经过一系列的幺正变换<sup>[31-33]</sup>过程。量子比特特殊的地方是它不仅可以制备 0 和 1 两种状态的相干叠加态，这与经典比特也不相同，还可以制备 0 和 1 的两种正交状态。事实上，这种情况是推广了经典计算，从而把经典计算就可以被认为是具有特殊性质的量子计算。

量子通信<sup>[34-40]</sup>是以遵从量子力学原理为前提，在信息传输的各个过程中以量子态传输实现为基础，利用量子态进行编码，能够把量子状态传输到另一个地方的通道被称为量子信道，在不同的地方实现纠缠状态才能够产生这种信道，因此纠缠的建立、操作和测量在量子通信中也很重要。量子通信系统与经典通信相比安全系数更高的原因是传输信息的过程中利用了量子的叠加态原理，密钥随机分布，没有办法检测出来。从 19 世纪到 20 世纪中期，量子通信的研究使得量子力学体系更完整，这也为它后来的应用奠定了理论基础。近些年来所发展起来的量子通信是一种新的科学技术，是以电子通信技术为基础所发展起来的重要技术，而该技术在政治、军事、经济等领域中的应用也很广泛。在 2004 年，我国首次提出量子密钥分配的方案，它能够实现的传输距离是 125 千米。在 2007 年，我国科学家第一次对量子密码通信系统进行了实验测试。在 2008 年，节点距离达到了 30 千米，这使即时网络通话系统得以实现。经过了一年我国成立了量子政务网站，并决定以后将量子通信逐渐应用于太空通信领域中。在 2013 年，我国科学院完成了太空与地球之间的密钥分配实验，并且建设了一些相关的用户节点，从这以后在太空进行实验时也开始慢慢用到了量子通信技术。经过多年努力，量子通信技术在我国飞速发展，它所具有的潜力也开始慢慢表现出来，所以我们应该加大研究力度，让量子通信技术的应用水平得到进一步的提升。

量子密码术<sup>[41-44]</sup>在信息传输时所用到的量子信道拥有量子的特点，它是通过密码术与量子力学联系而产生的。在传输加密的信息时，发送方需要建立密钥，并且把量子的状态作为编码信息的载体，使得接收方也能够同样拥有量子密钥。在发送方传输密钥时需要随机的、安全的分配解密的密码，再利用这组接收者用来解密的密码在传输过程中的变化找到监听者存在的地方。现在的量子密码传输方案不仅包括非正交态<sup>[45-47]</sup>不可克隆原理<sup>[48]</sup>的 BB84 协议<sup>[49-51]</sup>和 B92 协议<sup>[52, 53]</sup>，还有许多复合系统组成的处于相互正交状态的不可克隆原理的密钥分发协议。EPR 协议是在 1991 年的时候被提出的，它将纠缠

态应用于量子密码传输，这个协议的两个量子比特的 EPR 态<sup>[54]</sup>对 Bell 不等式<sup>[55-57]</sup>违反程度更高。文献<sup>[58]</sup>证明了要想密码传输性能更高，需要在三维或更高维的量子系统中传输信息。但是当系统的维度很高时，系统就会因为纠缠而更明显的违背 Bell 不等式，所以 EPR 协议也可以在多能级传输信息的系统中考虑量子密钥分配的程度。量子密钥共享的另一个重要应用是信息通过量子纠缠编码到一个未知的  $m$  体共享的量子状态上，需要满足条件  $n < m$ ，当  $n$  体有很多时，这个未知的量子状态才能够被贯穿；但如果只有  $n-1$  体或者数量更少时，就不能获得这个量子态的信息资源。

如今，量子信息以它巨大的潜在价值和广阔的应用前景，成为了备受关注的领域。虽然量子信息是一门新兴学科，但是不影响它对于科学发展和社会进步等方面有更深层次的意义。

## 1.2 量子纠缠

量子纠缠<sup>[59-63]</sup>是量子信息学中的一个不可缺少的研究内容，在实验中如何制备量子纠缠也是量子信息中很重要的研究领域。在量子隐形传态、量子密码学、量子计算等许多处理信息的过程中，量子纠缠都发挥了极其重要的作用。所谓的量子纠缠，即当不同的粒子发生相互作用之后，即使粒子与粒子之间可能在空间上远离，当传输粒子中的一个粒子状态发生改变时，剩余的粒子也会受到它的影响，从而改变自己的状态，我们把这种多个粒子相互影响的现象称为量子纠缠。简单来说，量子力学区别于经典力学的就是量子纠缠态，通过是否可以缠绕在一起把纠缠态分为可分离态和不可分离态。由于量子态的叠加原理，一个量子态会对应多个相应本征态的线性叠加，而叠加态又可以被纯态和混合态<sup>[64-66]</sup>来概括。在希尔伯特空间<sup>[67-69]</sup>中，纯态的定义指的是用单个态矢或概率幅<sup>[70-72]</sup>可以完整描述的状态。

纯态有的时候是含时相干叠加态<sup>[73-75]</sup>，即： $|\Phi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)|\phi_n\rangle$ 。纯态的密度矩阵满足以下关系：

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \quad (1-1)$$

混合态是若干个纯态以一定的概率非相干混合，通常以密度矩阵或者密度算符来表示：

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (1-2)$$

其中,  $P_i$  表示纯态  $|\phi_i\rangle$  在混合态  $\hat{\rho}$  中出现的概率, 满足归一化条件  $\sum_i P_i = 1$ 。混合态的密度矩阵满足以下关系:

$$\hat{\rho}^2 < \hat{\rho}, \text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1 \quad (1-3)$$

在传输信息时发生的量子纠缠现象会在一定程度上违背 Bell 不等式, 而违背的程度就需要用到纠缠度量, 纠缠度量的特点是:

(1) 如果复合态系统的密度矩阵描述的状态是非纠缠的或者是可分离的, 那么就可以用不同部分态的张量积<sup>[76, 77]</sup>来表示:

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \otimes \dots \quad (1-4)$$

其中  $\hat{\rho}_i^A, \hat{\rho}_i^B$  代表的是每个部分的密度算子,  $P_i \geq 0$ ,  $\sum_i P_i = 1$ 。则有:

$$E(\hat{\rho}) = 0 \quad (1-5)$$

上式指的是复合态系统处于对非纠缠态, 纠缠度为零。

(2) 各部分区域执行么正变换过程中, 复合系统的  $E(\hat{\rho})$  是一直不变的:

$$E(\hat{\rho}) = E(U_A \otimes U_B \hat{\rho} U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) \quad (1-6)$$

即各部分执行局域么正操作以后, 总的复合系统的纠缠度是不变的。之所以会有这个特性是因为在执行局域么正操作时并不会改变各部分之间的纠缠特点, 只是改变了部分区域的基态。

(3) 在各部分区域执行一些比如么正变换、一般情况下的测量以及增加一部分的空间等的操作时, 总的复合系统的  $E(\hat{\rho})$  也是不变的。这是因为在执行这些操作时改变的是各部分之间经典特性之间的关联, 而不是量子纠缠之间的关系。

(4) 如果  $\psi^{AB\dots}$  和  $\phi^{AB\dots}$  是由很多子系统构成的复合系统的状态, 那么这两个态的纠缠度是可以叠加的, 可以用下列公式表示:

$$E(\psi^{AB\dots} \otimes \phi^{AB\dots}) = E(\psi^{AB\dots}) + E(\phi^{AB\dots}) \quad (1-7)$$

量子态是否存在纠缠的判据首先来自 Bell 不等式<sup>[78]</sup>。1989 年 Werner 关于数学的严格量子纠缠被提出, 指出存在另外的一些纠缠态并不违背 Bell 不等式, Bell 非局域性是

量子纠缠的子集。1991年 Gisin<sup>[79]</sup>证明任意两比特的纠缠纯态都具有非局域性。1996年 Peres<sup>[80]</sup>提出对于两体可分量子态,密度矩阵在部分转置操作后仍应该是正定的,从而给出了量子态可分的必要条件。同年 Horodecki<sup>[81]</sup>等人证明部分转置操作后仍保持正定性是  $2 \otimes 2$  维、 $2 \otimes 3$  维以及一些特殊高维两体系统不存在纠缠的充要条件。2000年 Terhal<sup>[55]</sup>首次提出纠缠 witness 概念,对于任意纠缠态  $\rho$  总能找到合适的厄米算符  $W$  满足  $\text{Tr} \rho W < 0$ , 但目前并没有找到能同时判断所有纠缠的 witness。2005年 Masanes<sup>[82]</sup>提出如果量子态在非经典任务中存在资源则该量子态是纠缠态,将纠缠的判断从理论应用于真实的量子信息任务进程中。

近年来探测纠缠方面发展了更多的方法,如强不可分性判据<sup>[83]</sup>,连续变量的可分性判据<sup>[84, 85]</sup>等。然而,任何具有开放性的量子系统都会与周围环境在所难免的产生一定影响,从而出现量子退相干和耗散现象,所以很容易造成纠缠的衰减或者猝死。也就是说,量子纠缠在制备过程中或者是长时间保持纠缠主要就是因为环境中耗散现象的影响。因而,在开放系统中如何制备和保护纠缠以及如何延长纠缠保持时间是当前量子信息领域关注的主要研究课题之一。

### 1.3 量子稠密编码

在量子信息科学中,量子稠密编码、量子隐形传态、量子密钥分配等各种应用都对量子纠缠应用十分广泛。其中,量子稠密编码<sup>[86-90]</sup>在传输信息时会用到纠缠态作为信息传输的信道,这样就可以通过传输一个量子比特而获得两个比特的经典信息,从而实现非经典的效果。在量子稠密编码过程中充分体现出来量子纠缠的重要性,如果没有量子纠缠的帮助就无法有效的完成量子稠密编码。量子稠密编码是量子通信的重要应用,我们需要把所传输信息的信道与量子纠缠结合在一起,从而实现传递更多的信息量的任务。

最近几年,随着研究人员对量子稠密编码的兴趣越来越高,逐渐的开始从理论和实验两个方面进行研究。量子稠密编码最初是由 Bennett 等人在 1992 年提出的,在传输信息的过程中通过纠缠可以成功的使接收方接收到两个比特的经典信息。Liu<sup>[91]</sup>在 2002 年把多能级粒子系统作为信息传输的信道,研究了多能级粒子的量子稠密编码。在这之后科研人员在此基础上添加了一个控制方,实现了基于 GHZ 态的受控量子稠密编码。随后研究人员在此基础上实现了使用不同纠缠态作为信道的受控稠密编码。Situ<sup>[92]</sup>等在 2010 年提出了一个新的量子稠密编码的想法,首先设置了多个同时发送信息的发送者,

让这些发送者分别在 Bell 纠缠态、GHZ 态以及 W 态下编码信息，最终实现量子稠密编码。在此基础上，Zhang<sup>[93]</sup>等又通过采用 Cluster 来实现同时量子稠密编码协议。2018 年 Hu<sup>[94]</sup>等在量子稠密编码研究中实现了首次利用四维纠缠态，并且达到了 2.09 的量子稠密编码信道容量，达到了一个很高的水平。

量子稠密编码不仅在理论方面有很多人的关注，在实验方面也取得了很多成就。1995 年，Kwiat<sup>[95]</sup>等人通过实验研究出具有高动量的偏振纠缠光子对。做实验时把两个光斑叠在一起，而叠在一起的区域由于光子没有偏振性质处于纠缠态，接着对光子进行 Bell 基测量时可以利用一些线性元件，比如起偏器，就可以实现稠密编码，从而使一个光子传输两个经典比特的信息。1996 年，Mattle<sup>[96]</sup>等人建立了具有纠缠性质的粒子对，通过操作其中的一个粒子，使得其具有三个信息量。方细明<sup>[97]</sup>等人提出的实现量子稠密编码的协议是：在量子计算机中通过操作使得粒子传递了四个信息。Chen 等在 2003 年进行了稠密编码，利用了部分区域测量在多粒子中的纠缠状态，研究结果表明传递的经典信息总量是由部分区域测量角来决定的，经典信息在传输量子信息时一般情况下只有两个比特，但所传输的信息量却可以达到两个比特的最大值，然后通过选择适合的部分区域测量角，处于一定条件下的初始纠缠态的粒子在数量上是独立的。2004 年，Yan<sup>[98]</sup>等人利用非对称量子信道，充分考虑发送者和接收者都处于最大纠缠态，在非对称的希尔伯特空间中进行稠密编码。当发送者的粒子是多能级时，信息的转换效率可以通过纠缠转换而提高。通过以下几个方面的步骤可以实现量子稠密编码的过程：

假设现在 Alice 和 Bob 所共同拥有的 EPR 粒子对是具有纠缠性质的，把这个粒子对记为粒子 A 和粒子 B： $|\varphi\rangle = |00\rangle + |11\rangle / \sqrt{2}$ ，Alice 持有的是粒子 A，Bob 持有的是粒子 B。

(1) 首先，Alice 把自己所持有的粒子 A 进行四种局域幺正操作，分别记为 0、1、2、3，分别可以表示为：

$$0 \rightarrow \text{单位操作} \rightarrow 00 \rightarrow I |\varphi\rangle = |00\rangle + |11\rangle / \sqrt{2}$$

$$1 \rightarrow \text{比特反转操作 } \sigma_x \rightarrow 01 \rightarrow \sigma_x |\varphi\rangle = |10\rangle + |01\rangle / \sqrt{2}$$

$$2 \rightarrow \text{相位反转操作 } \sigma_y \rightarrow 10 \rightarrow \sigma_y |\varphi\rangle = |00\rangle - |11\rangle / \sqrt{2}$$

$$3 \rightarrow \text{相位比特反转操作 } i\sigma_y \rightarrow 11 \rightarrow i\sigma_y |\varphi\rangle = |10\rangle - |01\rangle / \sqrt{2}$$

(2) Alice 通过信息传输的信道将粒子 A 发送给 Bob；

(3) Bob 接收到粒子 A 以后，需要对粒子 A 和粒子 B 执行 Bell 态测量：

$$\begin{aligned}
 00 &\rightarrow (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{CNOT} (|00\rangle + |10\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{Hadamard} |0\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow 0 \rightarrow |\varphi^+\rangle \\
 01 &\rightarrow (|10\rangle + |01\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{CNOT} (|11\rangle + |01\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{Hadamard} |0\rangle \otimes |1\rangle \rightarrow 1 \rightarrow |\psi^+\rangle \\
 10 &\rightarrow (|00\rangle - |11\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{CNOT} (|00\rangle - |10\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{Hadamard} |1\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow 2 \rightarrow |\varphi^-\rangle \\
 11 &\rightarrow (|10\rangle - |01\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{CNOT} (|01\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2} \xrightarrow{Hadamard} |1\rangle \otimes |1\rangle \rightarrow 3 \rightarrow |\psi^-\rangle
 \end{aligned}$$

(4) 按照测量后的结果，确认 Alice 想要发送 Bob 的编码信息，通过上述计算就可以获得解码的结果。在两体系统中量子稠密编码的么正变换操作表示为：

$$\begin{aligned}
 U_{00}|j\rangle &= |j\rangle \\
 U_{01}|j\rangle &= |j+1(\text{mod } 2)\rangle \\
 U_{10}|j\rangle &= e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi}{2}j} |j\rangle \\
 U_{11}|j\rangle &= e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi}{2}j} |j+1(\text{mod } 2)\rangle
 \end{aligned} \tag{1-8}$$

其中 $|j\rangle$ 是单比特计算基矢。操作完成以后，信号系综平均密度矩阵变为：

$$\bar{\rho} = \sum_{i=0}^{i_{\max}} p_i \rho_i = \sum_{i=0}^{i_{\max}} p_i \left( \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (U_i \otimes I_2) \rho (U_i^\dagger \otimes I_2) \right) \tag{1-9}$$

式子(1-9)中的 $\bar{\rho}$ 代表的是信号系综平均密度矩阵， $S(\rho)$ 是 Von Neumann entropy。在稠密编码过程中信息发送者首先以先验概率 $p_i (i=1,2,3,\dots,i_{\max})$ 对系统进行局域么正变换 $U_i$ ，将系统制备到 $\rho_i$ 后发送给接收者，接收者在收到量子态后对量子系统进行测量从而得到信息。由 Holevo 量<sup>[99]</sup>所制约的信道容量可以用能传递的最大信息量来表示，密度矩阵代入到信道容量的计算公式中，信道容量的表达式就可以写为：

$$\chi = S(\bar{\rho}) - S(\rho) \tag{1-10}$$

通过上式进行数值计算与分析。当信道容量值为 $1 \leq \chi \leq 2$ 时，才能有效地保证量子稠密编码的效果。从量子稠密编码的过程我们看出，在发送一个量子比特而收到两个量子比特的经典信息是在经典信道中不能实现的，只能通过量子纠缠所提供的量子信道来实现。量子稠密编码的优点有以下几点：

1.安全性高。监听者所截取到的量子比特根本没有任何信息，也没有办法知道信息本身具体的内容，发送方所传输信息的内容都被编码在粒子 A 和粒子 B 之间相互关联的部分，而监听者用部分区域测量来提取传递的信息是没有效果的。

2.量子信道可以在传输信息之前就制备好，在传输信息的过程中，能够更高效地传

递信息。

对于稠密编码的理论方面，刘晓曙<sup>[100]</sup>等人提出了在多参与者之间进行稠密编码通讯的理论方案。山西大学在实验上利用连续变量进行稠密编码也得到了实现。我们发现，可用于稠密编码的纠缠态不只局限于 Bell 态，也可以用来实现量子稠密编码，这样的纠缠态可以表示为 Bell 态的叠加态。我们用广义 Grover 算法合成初始的 Bell 态，用该算法的逆运算实现解码过程的纠缠态测量，扩展了可用于量子稠密编码的纠缠态范围，为在不同的系统上实现量子稠密编码提供了可能性。下面简单介绍几种量子稠密编码方案：

### 1.3.1 基于 GHZ 态的受控量子稠密编码

当所选系统处于 GHZ 态时，假设 Alice 持有粒子 1、Bob 持有粒子 2、Cliff 持有粒子 3：

$$|\Phi_{1,2,3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{1,2,3} + |111\rangle_{1,2,3}), \quad (1-11)$$

首先 Cliff 用 Von Neumann 测量对自己所持有的粒子 3，若其采用的测量基是：

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \cos\theta|0\rangle_3 + \sin\theta|1\rangle_3, \\ |-\rangle &= \sin\theta|0\rangle_3 - \cos\theta|1\rangle_3, \end{aligned} \quad (1-12)$$

假设  $|\sin\theta| \leq |\cos\theta|$ ，此时在测量基  $\{|+\rangle_3, |-\rangle_3\}$  下 GHZ 态的形式为：

$$|\Phi_{1,2,3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\varphi_{1,2}\rangle|+\rangle_3 + |\phi_{1,2}\rangle|-\rangle_3], \quad (1-13)$$

其中：

$$\begin{aligned} |\varphi_{1,2}\rangle &= \cos\theta|00\rangle_{1,2} + \sin\theta|11\rangle_{1,2}, \\ |\phi_{1,2}\rangle &= \sin\theta|00\rangle_{1,2} - \cos\theta|11\rangle_{1,2}, \end{aligned} \quad (1-14)$$

从上述式子中可以明显的看到，粒子 3 在经过显然经过 Von Neumann 测量以后，它的状态会改变成  $|+\rangle_3$  或者  $|-\rangle_3$ ，这两个状态出现的概率均为  $\frac{1}{2}$ 。接下来，当粒子 3 的状态变为  $|+\rangle_3$  时，粒子 1 和粒子 2 的状态会相应的变为  $|\varphi_{1,2}\rangle$ ，当粒子 3 的状态变为  $|-\rangle_3$  时，也可以对粒子 1 和粒子 2 进行相似的讨论。

Cliff 把测量基的信息以及测量结果发送给 Alice，Alice 收到信息之后引入一个辅助



量子比特，并对粒子 1 以及辅助量子比特在基  $\{|0\rangle_1|0\rangle_{aux}, |1\rangle_1|0\rangle_{aux}, |0\rangle_1|1\rangle_{aux}, |1\rangle_1|1\rangle_{aux}\}$  下进行么正操作，通过么正操作  $U_{sin} \otimes I_B$  量子态  $(\cos \theta |00\rangle_{1,2}) \otimes |0\rangle_{max}$  将转换为：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,2,aux} = & \sqrt{2} \sin \theta \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{1,2} + |11\rangle_{1,2}) \right] \otimes |0\rangle_{aux} \\ & + \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} |10\rangle_{1,2} \otimes |1\rangle_{aux}, \end{aligned} \quad (1-15)$$

么正变换表达式为：

$$U_{sim} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & 0 & \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} & 0 & -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (1-16)$$

其中， $|10\rangle_{1,2}$  指的是粒子 1 和粒子 2 的所处的量子态，初始的时候粒子 1 和粒子 2 是不会产生纠缠现象的。在这之后 Alice 在测量基下对辅助量子比特执行 Von Neumann 测量，其测量结果可以分为以下两种情况：

(1) 如果 Alice 测量的结果是  $|0\rangle_{aux}$ ，粒子 1 和粒子 2 会有处于最大纠缠态  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{1,2} + |11\rangle_{1,2})$  的概率，其概率是  $2|\sin|^2$ 。Alice 将自己所持有的粒子 1 执行四种随机的么正变换  $(I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ，等 Alice 执行完该操作以后将该粒子发送给 Bob。此时 Bob 通过一系列的操作对自己所持有的粒子 2 测量，测量以后 Bob 就可以分辨 Alice 的操作为  $\{I, \sigma_3\}$  还是  $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ 。然后 Bob 使用基  $\{|0\rangle_1 \pm |1\rangle_1\}$  对粒子 1 执行测量操作，测量以后就可以得到两外一个比特的信息。

(2) 如果 Alice 测量的结果为  $|1\rangle_{aux}$ ，Alice 通过测量结果就可以知道粒子 1 和粒子 2 不处于纠缠状态，此时就可以确定所传递的信息量为 1 比特，因此共享粒子对的通信者之间所传递的平均信息量用下列公式来表示：

$$I_{trans}^1 = 1 + P_{succ} \times 1 = 1 + 2|\sin \theta|^2, \quad (1-17)$$

以上就是受控稠密编码<sup>[101-103]</sup>的过程描述，通过式子(1-7)可以看出来，Cliff 能够调节  $\theta$  值来控制传输的信息的容量，故称为受控量子稠密编码。

### 1.3.2 同时量子稠密编码

同时量子稠密编码<sup>[104-106]</sup> (Simultaneous Dense Coding, SDC) 由 Situ 于 2010 年提出的一个量子编码方案。由于此方案中存在一个发送方和多个接收方, 所以研究人员称它为同时量子稠密编码方案。本部分将从 Bell 态和 GHZ 态分别简要概述以下稠密编码方案。

#### (1) 当系统中粒子处于 Bell 态时的同时稠密编码方案

首先制备好一个 EPR 粒子对, 假设 Alice、Bob 和 Charlie 共同拥有这个粒子对, 其中 Alice 拥有粒子  $A_1$  和粒子  $A_2$ , Bob 拥有粒子 B, Charlie 拥有粒子 C。初始时候粒子状态所组成的量子系统表示为:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{A_1B} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{A_2C} \quad (1-18)$$

处于该状态下的量子稠密编码协议可以分为四个步骤:

(a) Alice 先分别对自己所持有的粒子  $A_1$  和粒子  $A_2$  进行么正操作  $U(b_1b_2)$ 、 $U(c_1c_2)$ , 在执行此操作的过程中, 就会把自己粒子所携带的信息编码在量子比特上, 此时量子系统表示为:

$$|\psi(1)\rangle = U_{A_1}(b_1b_2) \otimes U_{A_2}(c_1c_2) |\psi(0)\rangle = |\phi(b_1b_2)\rangle_{A_1B} \otimes |\phi(c_1c_2)\rangle_{A_2C} \quad (1-19)$$

其中:

$$\begin{aligned} U(00) &= I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ U(01) &= \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ U(10) &= \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ U(11) &= \sigma_z \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ |\phi(xy)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0x\rangle + (-1)^y |\bar{1}\bar{x}\rangle) \end{aligned} \quad (1-20)$$

(b) Alice 对粒子  $A_1$  及  $A_2$  进行傅里叶变换, 形式如下:

$$QFT = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

经过前面两个步骤, Alice 就可以把自己所持有的粒子  $A_1$  传递给 Bob, Bob 把粒子  $A_2$  传递给 Charlie, 此时量子系统的表达形式又会变为:

$$|\psi(2)\rangle = QFT_{A_1A_2} [|\phi(b_1b_2)\rangle_{A_1B} \otimes |\phi(c_1c_2)\rangle_{A_2C}] \quad (1-22)$$

(c) 此时, Bob 和 Charlie 对粒子  $A_1$  和粒子  $A_2$  执行联合傅里叶变换<sup>[107]</sup>, 执行完傅里叶变换以后量子系统表示为:

$$|\psi(3)\rangle = QFT_{A_1A_2}^+ QFT_{A_1A_2} [|\phi(b_1b_2)\rangle_{A_1B} \otimes |\phi(c_1c_2)\rangle_{A_2C}] = |\phi(b_1b_2)\rangle_{A_1B} \otimes |\phi(c_1c_2)\rangle_{A_2C} \quad (1-23)$$

(d) 接下来, Bob 和 Charlie 先对粒子  $A_1$ 、粒子 B 执行 Bell 基测量的操作, 得到编码信息  $(b_1, b_2)$ , 再对粒子  $A_2$ 、粒子 C 执行 Bell 基测量的操作, 得到编码信息  $(c_1, c_2)$ 。

## (2) 当系统中粒子处于 GHZ 态时的同时稠密编码方案

首先制备好两对处于 GHZ 纠缠态的 EPR 粒子对, 假设 Alice 拥有粒子  $A_1$  和粒子  $A_2$ , Bob 拥有粒子  $B_1$  和粒子  $B_2$ , Charlie 拥有粒子  $C_1C_2$ 。初始时候粒子状态所组成的量子系统表示为:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle)_{A_1B_1B_2} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle)_{A_1C_1C_2} \quad (1-24)$$

处于该状态下的量子稠密编码协议可以分为四个步骤:

(a) Alice 先分别对自己所持有的粒子  $A_1$  和粒子  $A_2$  进行么正操作  $U(b_1b_2)$ 、 $U(c_1c_2)$ , 在执行此操作的过程中, 就会把自己粒子所携带的信息编码在量子比特上, 此时复合量子系统表示为:

$$|\psi(1)\rangle = U_{A_1}(b_1b_2) \otimes U_{A_2}(c_1c_2) |\psi(0)\rangle = |GHZ(b_1b_2)\rangle_{A_1B_1B_2} \otimes |GHZ(c_1c_2)\rangle_{A_1C_1C_2} \quad (1-25)$$

其中:

$$|GHZ(xy)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0xx\rangle + (-1)^y |1\bar{x}\bar{x}\rangle) \quad (1-26)$$

(b) Alice 对粒子  $A_1$  和粒子  $A_2$  进行傅里叶变换, Alice 就可以把自己所持有的粒子  $A_1$  传递给 Bob, 把粒子  $A_2$  传递给 Charlie。

具体形式如下:

$$|\psi(2)\rangle = QFT_{A_1A_2} [ |GHZ(b_1b_2)\rangle_{A_1B_1B_2} \otimes |GHZ(c_1c_2)\rangle_{A_2C_1C_2} ] \quad (1-27)$$

(c) 此时, Bob 和 Charlie 对粒子  $A_1$  和粒子  $A_2$  执行联合傅里叶变换<sup>[107]</sup>, 执行完傅里叶变换以后量子系统表示为:

$$\begin{aligned} |\psi(3)\rangle &= QFT_{A_1A_2}^+ QFT_{A_1A_2} [ |GHZ(b_1b_2)\rangle_{A_1B_1B_2} \otimes |GHZ(c_1c_2)\rangle_{A_2C_1C_2} ] \\ &= |GHZ(b_1b_2)\rangle_{A_1B_1B_2} \otimes |GHZ(c_1c_2)\rangle_{A_2C_1C_2} \end{aligned} \quad (1-28)$$

(d) Bob 以及 Charlie 通过使用正交量子态  $\{|GHZ(xy)\rangle_{xy}\}$  分别对量子比特  $A_1B_1B_2$ 、 $A_2C_1C_2$  进行 Von Neumann 测量来获取信息。

(e) Bob 以及 Charlie 通过使用正交量子态分别对量子比特  $ABB$ 、 $ACC$  进行 vonNeumann 测量来获取信息  $(b_1, b_2)$  以及  $(c_1, c_2)$ 。

以上是当粒子分别处于 Bell 态以及 GHZ 态的同时稠密编码方案, 在这个编码协议中, 除非 Bob 与 Charlie 两个人合作, 否则在第三步之前任何单独的一方都无法获知编码信息。

## 1.4 量子隐形传态

量子隐形传态<sup>[108-113]</sup>是量子通信中另外一个重要的应用, 它的原理也是利用量子纠缠效应进行信息传输, 用 EPR 对中的一个量子与所要传输的未知量子态执行联合测量的操作, 此时未知量子态的信息会全部“转移”到 EPR 对的一个量子上, 然后对 EPR 对中的一个量子的纠缠态做么正变换, 根据经典信道的测量结果做么正变换时就可以使这个量子纠缠态与传输的未知态完全相同, 这样就实现了对所要传输态的复制。要想实现量子隐形传态这个过程, 首先要求 Alice (接收者) 和 Bob (发送者) 得持有一对制备好的 EPR 粒子对, 分别为粒子 1 和粒子 2, Alice 先将粒子 1 和所要发送的未知态的粒子进行联合测量, 这样 Bob 所持有的粒子 2 就会变成另外一种状态。Alice 通过经典信道将测量结果传送给 Bob, Alice 根据这条信息对粒子 1 做相应的么正变换就可以测量到传输的信息, 然后根据这些信息就能够知道原来的量子纠缠态。

1993 年, Bennett<sup>[42]</sup>等人利用这种量子纠缠特性, 提出了量子隐形传态方案, 在 1997 年由 Zeilinger<sup>[114]</sup>等人开始从实验上验证量子隐形传态的原理。这些科学家的工作使得量子隐形传态成为了人们关注的新的一门应用。他们的开创性工作引起了科学界对量子隐

形传态研究的重视，人们在量子隐形传态的理论和实验上取得了许多重要成果，提出了各种方案。

这里我们来介绍一下量子隐形传态的过程和基本原理。

量子隐形传态是指利用量子纠缠现象，来实现不发送任何量子位而可以把未知量子态传给接收者的过程。

量子隐形传态过程和基本原理可以描述为：假设 Alice 和 Bob 不在同一个地方，Alice 持有粒子 1、2，Bob 持有粒子 3。粒子 1 所处的未知量子态可表示为：

$$|\phi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1 \quad (1-29)$$

其中 $|\phi\rangle_1$ 代表 Alice 要传递给 Bob 的信息。Alice 与 Bob 之间的量子信道表示为：

$$|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3) \quad (1-30)$$

这样，三个粒子所组成的体系总的状态为：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} &= |\phi\rangle_1 \otimes |\psi^-\rangle_{23} \\ &= (a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle_{23} - |1,0\rangle_{23}) \\ &= \frac{1}{2}(a|0,0\rangle_{12}|1\rangle_3 - a|0,1\rangle_{12}|0\rangle_3 + b|1,0\rangle_{12}|1\rangle_3 - b|1,1\rangle_{12}|0\rangle_3) \end{aligned}$$

利用 Bell 态的变化，即

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle), |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle) \\ |0,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle), |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) \end{aligned}$$

在由粒子 1 和粒子 2 执行来联合测量以后，三个粒子所构成的直积态可以写成下列列表达式：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |\psi^-\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) + |\psi^+\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |\phi^-\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) + |\phi^+\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) \right] \quad (1-31) \end{aligned}$$

Alice 首先需要将自己所拥有的粒子 1 的信息的状态 $|\phi\rangle_1$ 传输给 Bob，这时 Bob 所持有的粒子 3 就会变为态 $|\phi\rangle_3$ ，接着 Alice 对粒子 1 和粒子 2 执行联合测量，在 Alice 执行

联合测量操作后粒子 3 会由原来的纠缠态传输到相应的量子态上。

通过对量子隐形传态过程的描述我们能够看出来在这个过程中需要注意的两点是 Alice 和 Bob 得先持有一对制备好的 EPR 对和 Alice 要能够对粒子 1 和粒子 2 执行联合测量。如下图所示：

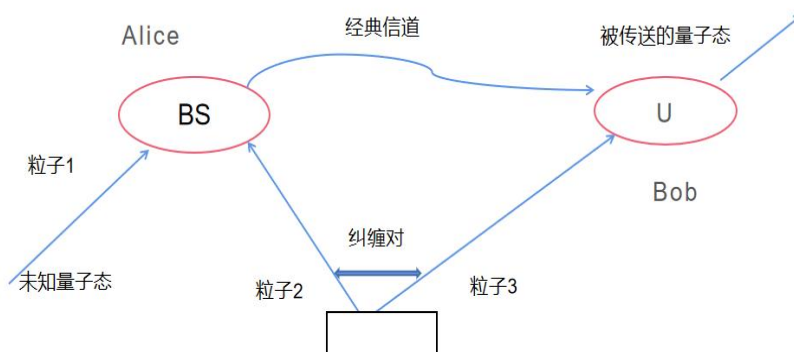


图 1-1 量子隐形传态过程

也可以说是，我们所注意的这两点本质上与纠缠态的制备和测量是一样的，那么如何分别从理论和实验上通过对纠缠量子态的操作，来使得量子通信的效率变得更高，是一个值得研究讨论的问题。中国科学家潘建伟等人第一次成功把未知的量子纠缠态传输了一个遥远距离，但是在实验过程中他们发现最重要的是得先让两个不同地方的人拥有制备好的最大量子纠缠态，在国际上首次实现了未知量子态的远程传输。

由此可以看出来，人们利用量子纠缠态作为量子信息传输与储存过程中的一种特殊的存在，能够更快速完成信息的处理任务，这是经典信息无法比拟的。但是在纠缠态传输的过程中会与周围环境发生不可避免地相互作用，所以就会产生退相干效应。而量子退相干的结果就是会使得纠缠度和纯度降低，使远程通信变得困难。所以在 1996 年的时候，美国科学家 Bennett<sup>[115]</sup>以及其他科学家共同提出了量子纠缠纯化可以解决退相干效应，这个纯化是需要把纠缠程度和纯度都很低的 EPR 对分离出来，这些 EPR 对也必须与量子密钥分配相匹配。即对任意一般的未知混态进行纯化。随着时间的推移，一系列的量子纠缠纯化的理论方案被提出来。首先在 2001 年，潘建伟<sup>[116]</sup>等人发现用线性光学器件和参数转换产生的 EPR 对可以实现对任意不清楚复合态的纯化，正是因为线性光学器件本身所特有的容错率高和高条件优点，所以对任意未知混合态进行纯化的方案

是可行且高效的。经过一段时间以后，潘建伟等人从理论上解释了量子通信在传输距离非常远时所遇到的问题，实现了对于不清楚的量子复合态的纠缠纯化。国际科学界对这项研究成果非常重视并且评价它是“远距离量子通信研究的一个飞跃”。





## 2 相关理论基础

### 2.1 Von Neumann entropy

信息熵<sup>[117]</sup>被用来阐述系统信息量的大小，是一个相互独立的集合。在经典传输信息的理论中，通常采用 Shannon 熵<sup>[118-120]</sup>来描述经典信息量的概率大小。集合中随机变量  $x$  中各事件出现的信息量的平均值称为  $x$  的信息熵。随机变量  $x$  中的信息容量的多少与它本身的取值并没有什么关系。所以，随机变量可以认为是信息熵的一个函数，因此随机变量的熵是一个函数，它的自变量指的是随机变量取不同值时的概率，如果一个随机变量  $x$  的概率为  $P_1, P_2 \cdots P_n$ ，把概率的取值设为  $x_1, x_2 \cdots x_n$ ，则与该概率分布相对应的 Shannon 熵就可以表示为：

$$H(X) \equiv H(p_1, p_2, \cdots p_n) \equiv - \sum_x p_x \log p_x \quad (2-1)$$

其中需要注意的是数学符号“log”是以 2 为底的，所以可以用比特来测量熵的大小。另外当“ $p=0$ ”时， $\log 0$  没有定义，所以约定  $0 \log 0 \equiv 0$ ，也就是从不发生的事件对熵没有影响。

### 相对熵

相对熵<sup>[121-124]</sup>是一个非常实用的熵型度量，它可以用来判断两个定义在同一集合  $x$  上信息量的概率分布  $p(x)$  和  $q(x)$  之间的相似程度。相对熵可以表示为：

$$\begin{aligned} H(p(x) \| q(x)) &\equiv \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \\ &\equiv -H(X) - \sum_x p(x) \log q(x) \end{aligned} \quad (2-2)$$

我们定义  $-0 \log 0 \equiv 0$ ，且若  $p(x) > 0$ ，则  $-p(x) \log 0 \equiv +\infty$ 。相对熵是非负的，即  $H(p(x) \| q(x)) \geq 0$ ，相对熵的值会随着概率取值的不同而呈现出不同的变化趋势，如果概率分布的差异增大，则相对熵的取值也会增大，反之，则减小，且当最小值为 0 时，此时两个概率分布完全相等。

相对熵具有非负性， $H(p(x) \| q(x)) \geq 0$ ，这个等式成立的条件是当且仅当  $p(x) = q(x)$ ，这个时候关于  $x$  的等式成立。在证明这个特点时，需要用到一个不等式是  $\log x \ln 2 = \ln x \leq x - 1$ ，在这里我们需要把这个等式变形为： $-\log x \geq 1 - x / \ln 2$ 。

所以式子(2-2)就可以变形为:

$$\begin{aligned} H(p(x) \| q(x)) &= -\sum_x p(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} \\ &\geq \frac{1}{\ln 2} \sum_x p_x \left(1 - \frac{q(x)}{p(x)}\right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_x (p_x - q(x)) \\ &= \frac{1}{\ln 2} (1-1) = 0 \end{aligned}$$

这样就可以证明相对熵的非负性。但是相对熵最大的作用不是它本身，而是可以把其他熵量看成是一个特殊的例子进行计算，通过相对熵的结果可以知道其他熵的结果。

### 联合熵、条件熵及互信息

假设  $X$  和  $Y$  是随机变量中信息容量之间的关系，这时就需要引入条件熵<sup>[125-127]</sup>和互信息<sup>[128-131]</sup>。首先把  $X$  和  $Y$  随机变量之间的联合熵定义为:

$$H(X, Y) \equiv -\sum_{x, y} p(x, y) \log(x, y) \quad (2-3)$$

式中  $p(x, y)$  是事件偶的联合概率；联合熵是用来测量事件偶  $(X, Y)$  的自信息量，如果  $Y$  的值已经知道的话，就可以推导出  $H(Y)$  的比特信息，则与  $(X, Y)$  的有关的剩余不确定性就可以用条件熵来表示，可以写为如下公式:

$$H(X | Y) \equiv H(X, Y) - H(Y) \quad (2-4)$$

所以说条件熵是在已知  $Y$  值的条件下来测量  $X$  的不确定程度。互信息就可以用来表示随机变量之间的不确定性，表示为:

$$H(X : Y) \equiv H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (2-5)$$

在这里等式  $H(X : Y) \equiv H(X) - H(X | Y)$  可以将条件熵和互信息结合起来。

Shannon 熵的性质可以概括为:

- (1)  $H(X, Y) = H(Y, X), H(X : Y) = H(Y : X)$ 。
- (2) 因为  $H(Y | X) \geq 0$ ，所以推出  $H(X : Y) \leq H(Y)$ ，且当且仅当  $Y$  是  $X$  的函数， $Y = f(X)$  成立。
- (3)  $H(X) \leq H(X, Y)$ ，且当且仅当  $Y$  是  $X$  的函数时取等号。

(4) 次可加性

$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$  , 且当且仅当  $X$  和  $Y$  是独立随机变量时两式取等号。

(5) 因为  $H(Y | X) \leq H(Y)$

推出  $H(X : Y) \geq 0$  , 且当且仅当  $X$  和  $Y$  是独立随机变量时两式取等号。

(6) 强次可加性

$H(X, Y, Z) + H(Y) \leq H(X, Y) + H(Y, Z)$  , 且当且仅当  $Z \rightarrow Y \rightarrow X$  构成 Markov 链时取等号。

(7) 条件减小熵

$$H(X | Y, Z) \leq H(X | Y)$$

在量子信息理论中, 冯·诺依曼熵<sup>[132-134]</sup> (Von Neumann entropy) 是一个非常重要的参量。Von Neumann entropy 与 Shannon 熵虽然形式上一样, 但是他们之间存在巨大的差别, Von Neumann entropy 用来描述量子信源的性质, 利用 Von Neumann entropy 能定量分析纯态的纠缠量, 还能够知道量子位的平均最小数目。

Von Neumann entropy 具有很多的数学性质, 很多学者也关注到了这一特性。2017年, Liang<sup>[135]</sup>基于 Von Neumann entropy 知道了纠缠动力学在由许多量子位构成的量子系统中的具体表达形式。2018年, Zhu<sup>[136]</sup>等得出了多粒子处于纠缠状态时的 Von Neumann entropy 和当纠缠态处于最大时的具体表达形式。此后越来越多的学者利用 Von Neumann entropy 的数学性质, 比如利用它的三角不等式<sup>[137]</sup>得出了纠缠会被纠缠上界所限制的手段, 相对熵的提出也启发了学者们对纠缠态度量问题的研究。

2019年, Kumari<sup>[138]</sup>等利用 Von Neumann entropy 中不等式的性质得出了信息传输的信道中纠缠产生上界的方法。2020年, Hou 等研究了在相对熵中纠缠产生上界的计算方法, 此研究可以方便人们测量纠缠, 以便对纠缠的理解更为深刻。Wang 等在了解了纠缠测量和熵的不确定性关系的前提下, 研究了 Bell 态在受到噪声环境的影响下是如何变化的。冯·诺依曼刚开始似乎并没有发现他的公式与信息测量理论有直接的联系, 但是后来信息理论对 von Neumann entropy 给出了新的定义。

量子力学的测量理论和信息传输都得到了很大程度的应用, 例如偏振光子<sup>[139, 140]</sup>在光学通信中可以更好的传输信息。最近几年, 许多和量子力学频道容量有关的理论被研究和讨论, 这表明有关熵的理论逐渐成为一个热题, 这使得更多学者去研究它的数学性质以便人们能够更好的应用。

在量子信息理论中 Shannon 熵与 Von Neumann 熵形式上几乎相同, 假设密度算符为  $\rho$ , 那么量子系统中信息源的 Von Neumann 熵就可以定义为:

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}(\rho \log \rho) \quad (2-6)$$

同样上式中的对数是以 2 为底的。假设  $\lambda_x$  是  $\rho$  的本征值, 则 Von Neumann 熵的定义式写为:

$$S(\rho) = -\sum_x \lambda_x \log \lambda_x \quad (2-7)$$

同样定义  $0 \log 0 \equiv 0$ 。在实际计算信息任务时会频繁使用方程(2-7), 体现出了相对熵在量子信息处理过程中的重要性。假设  $\rho$  和  $\sigma$  是密度算符, 则它们的相对熵可以表示为:

$$S(\rho \parallel \sigma) \equiv \text{tr}(\rho \log \rho) - \text{tr}(\rho \log \sigma) \quad (2-8)$$

通过式子(2-8)可以知道, 在计算过程中, 无论是量子态下的相对熵, 还是经典状态下的相对熵都会出现无穷的并且是非负的情况, 即  $S(\rho \parallel \sigma) \geq 0$ , 当且仅当  $\rho = \sigma$  时, 等号才会成立。这个不等式也被称为 Klein 不等式。

量子联合熵<sup>[141, 142]</sup>、量子条件熵和量子互信息的定义如下:

$$\begin{aligned} S(A, B) &\equiv -\text{tr}_{AB}(\rho^{AB} \log \rho^{AB}) \\ S(A|B) &\equiv S(A, B) - S(B) \\ S(A:B) &\equiv S(A) + S(B) - S(A, B) \\ &= S(A) - S(A|B) = S(B) - S(B|A) \end{aligned} \quad (2-9)$$

其中  $\rho^{AB}$  表示的是复合系统 AB 的密度矩阵。

关于量子信息中 Von Neumann 熵的性质可以概括为以下几点:

(1) Von Neumann 熵具有非负的特性, 并且纯态下的熵为零。

(2) 当传输信息的体系处于  $d$  维的希尔伯特空间时, 熵会具有最大值, 为  $\log d$ , 当体系处于完全非相干叠加态  $\frac{I}{d}$  时, 熵为  $\log d$ 。

(3) 复合系统 AB 为纯态时, 有  $S(A)=S(B)$ 。

(4) 如果  $p_i$  是态  $\rho_i$  相应的概率, 则:

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (2-10)$$

(5) 联合熵定理

假设系统 A 的正交态为  $|i\rangle$ 、系统 B 的密度算符为  $\rho_i$ ， $p_i$  为密度算符  $\rho_i$  的概率，则：

$$S\left(\sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (2-11)$$

(6) 次可加性和三角不等式

如果 A 和 B 组成的复合系统的联合密度算符表示为  $\rho^{AB}$ ，复合系统的联合熵需要满足下列条件：

$$\begin{aligned} S(A, B) &\leq S(A) + S(B) \\ S(A, B) &\geq S(A) - S(B) \end{aligned} \quad (2-12)$$

上述不等式分别称为 Von Neumann 熵的次可加性不等式和三角不等式，有时也称为 Araki-Lieb 不等式。

(7) Von Neumann 熵的凸性

如果  $p_i$  是密度算符  $\rho_i$  的概率，则熵满足的条件会变为：

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \geq \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (2-13)$$

(8) 强次可加性

将两个子系统构成的复合系统的次可加性、三角不等式推广到三个子系统构成的复合系统时会得到的一个不等式，我们把这个不等式称为强次可加性不等式。强次可加性不等式在量子信息理论中是一个不可忽视的结论。对于三个量子系统 A, B, C 有

$$S(A, B, C) + S(B) \leq S(A, B) + S(B, C) \quad (2-14)$$

## 2.2 自旋链系统模型

量子自旋系统是一种固态系统，能够实现量子信息和量子计算两种过程。Zhou<sup>[143]</sup> 等人在 2002 年提出自旋链可以执行量子计算的操作，2003 年，Bose 提出用未加调制的自旋链能够传输量子状态下的信息，Yeo 等人用自旋链系统进行了量子隐形传态的研究。下面对几种常见的不同相互作用类型的自旋模型进行介绍。

## 伊辛模型

伊辛<sup>[144-148]</sup> (Ising) 模型是描述相互作用粒子的最小模型, 这也让很多科学家对伊辛模型产生了广泛的兴趣, 伊辛模型包括一维、二维、三维模型, 它会在每个格点占据一个自旋, 如果想要研究从无限大温度到绝对零度相互作用的粒子系统的演化过程, 那就可以采用三维伊辛模型。伊辛模型由于它自身的粒子具有两种可能的状态, 一种是自旋向上的状态, 一种是自旋向下的状态。

由于自旋的相互作用会使得相邻最近的自旋方向一致, 所以当系统的基态是铁磁态时, 所有的自旋取向都是一个方向, 它的温度也会处于绝对零度, 这样就会出现两个可能的情况, 要么方向全部都是向上的, 要么方向全部都是向下的。这种有序的状态会随着温度的升高而出现变化, 当温度升高到一定值时, 这个状态中的某个自旋就会摆脱与它相邻最近自旋的相互作用, 那么它的方向可能就会变成向下。在求能量本征值的时候需要对所有可能状态的玻尔兹曼权重<sup>[149, 150]</sup>的矩阵对角化。因此, 又回到了刚开始的时候, 只要能求出系统中所有不同状态下的配分函数, 这个问题就能够迎刃而解。

伊辛模型的哈密顿量可以表示为:

$$H = J \sum_i S_i^Z S_{i+1}^Z \quad (2-15)$$

其中,  $J$  表示最近邻格点间的耦合强度。

## 海森堡模型

近年来, 量子通信和量子计算的发展越来越快, 而在量子信息的发展中自旋系统的应用前景是一个热门的话题。固体物理中的自旋和其它物理系统相比, 自旋链不仅可以用来构造量子计算机和量子网点<sup>[151, 152]</sup>, 而且在自旋体系中的量子关联方面的应用也很有趣, 它也因此被广泛地应用于量子纠缠的物理意义上。在研究模拟量子计算机时, 海森堡模型<sup>[153-155]</sup>作为最简单的自旋链用在了研究过程中, 而且在量子点系统<sup>[156]</sup>、原子核自旋系统<sup>[157]</sup>、电子自旋<sup>[158]</sup>和光晶格等许多物理系统中也能实现海森堡模型。量子信息和凝聚态物理<sup>[159, 160]</sup>之间需要海森堡模型下的量子纠缠作为一个连接的纽带, 海森堡自旋链模型从不同的角度有许多不同的类型, 例如线型自旋链、环型自旋链和星型自旋链, 如下图示:

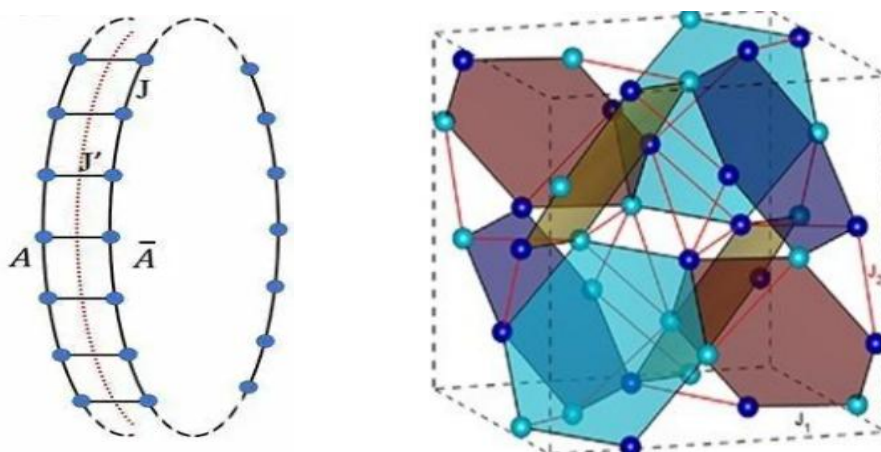
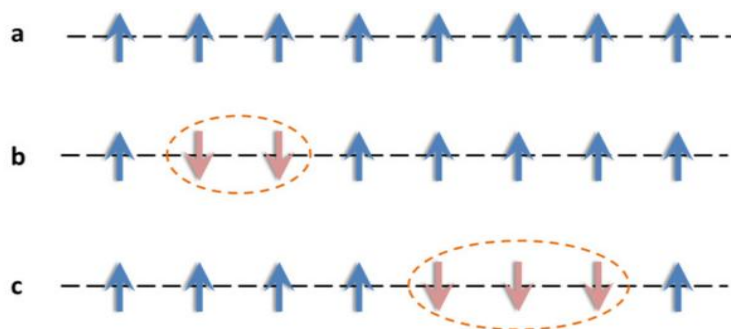


图 2-1 线型自旋链、环型自旋链、星型自旋链

## 2.3 DM 相互作用

Dzyaloshinskii 发现在三角形状下，具有弱铁磁性的材料中，反铁磁体中会出现一个微小的倾斜分量，这个倾斜分量是由于磁体中存在各向异性相互作用导致的。1949 年，Neel 把上述的这种现象归因于是磁铁矿杂质中的杂质效应。后来，科学家 Li 反对 Neel 提出的观点，Li 认为弱铁磁性不是来源于磁铁矿杂质的杂质效应，而是来源于反铁磁磁场范围，但是反铁磁磁场范围并不是所有情况下的材料都能形成，它有一个特殊要求是结构不能完整或者具有特殊的化学特性。

随后 Borovik-Romanov 等人通过实验发现当纯度很高的样品也会有铁磁性，如果根据 Neel 的观点弱铁磁性是来源于杂质，那么当纯度不同的样品，铁磁性也是不同的，而相对纯度非常高的理想晶体来说，铁磁性就会消失，这与 Borovik-Romanov 等人做的实验结论很明显是存在矛盾的。基于这种情况，Neel 关于铁磁性来源于杂质效应的解释是不能让人信服的。

1958 年，Dzyaloshinski 解释这些材料里边的铁磁性是因为自旋-轨道耦合<sup>[161, 162]</sup>和磁

偶极子<sup>[163-165]</sup>发生了各向异性的相互作用，而这种相互作用就会导致磁矩发生变化进一步导致弱铁磁性，他所提出的这个理论是以二级相变理论为前提的。他指出在 $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ 中，当自旋垂直于三角轴，反铁磁自旋构型的 $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ 晶体和倾斜自旋构型的 $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ 晶体有相同的对称性，然而，后者却有垂直于三角轴的净磁矩。1960年Moriya进一步以微观的角度解释了导致这种现象发生的原因，这次是利用了Anderson超交换作用的微扰方法，并给出了这种作用的具体形式：

$$\sum_{(ij)} \vec{D}_{ij} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) \quad (2-16)$$

其中 $\vec{D}_{ij}$ 代表DM相互作用参数， $\vec{S}_i$ 和 $\vec{S}_j$ 分别表示格点*i*和格点*j*上的自旋矢量。这种相互作用又被称为Dzialoshinskii-Moriya相互作用，简称DM相互作用<sup>[166, 167]</sup>。DM相互作用参数具有反对称性，即 $\vec{D}_{ij} = -\vec{D}_{ji}$ 。

人们将DM相互作用解释为具有反铁磁性晶体材料中的弱铁磁磁性，这种相互作用是由于自旋轨道耦合所产生的。磁性材料在一般情况下都会具有铁磁性或反铁磁性，这个特性意味着磁性材料内部的磁矩排列方式有的是平行的，有的则是反平行的，其中磁矩之间的相互作用又可以称之为海森堡交换作用。

DM相互作用不仅存在于反铁磁体中而且存在于铁磁体中，在研究过程中还体现出了极小的量级，但是不妨碍它可以让系统出现一些新的特征，所以量级虽小但是产生的影响不可忽略。正是因为它的影响不可忽略，所以也会使得系统具有一些新的特性，对它的研究也会变得十分重要。

## 2.4 自旋压缩模型

1950年，Stolar首次引入压缩态概念，从此有关压缩态的研究工作就一直是热点问题。Yuen在1976年根据压缩态详细研究了光场的量子特点，结果表明处在压缩态中的光场的量子噪声与相干态比较减弱了很多，这个结果能够让压缩态光场的这一特性应用范围更广阔，除光场具有压缩的特性以外，比如在玻色子系统、原子系统和自旋系统也会存在与光场压缩相似的非经典现象。

1981年，D.F.Walls<sup>[168]</sup>引入原子偶极压缩的概念。此后开始慢慢发现在自旋或角动量系统中也会出现与光场中压缩态概念类似的特点，即可以用自旋压缩系统来描述系统



中状态的涨落性质。

1992年，Wineland<sup>[169]</sup>等人又发现一个与光场压缩量子态相似的情形，就是在自旋压缩态系统下噪声的影响也会减小很多，从而提高光谱的灵敏度，这个自旋压缩态称为原子自旋压缩态。1993年，Kitagawa<sup>[170]</sup>等人在由很多自旋组合而成的系统中利用特殊的两个非线性耦合，自旋压缩态从此出现了，从此以后，提出了许多如何能够产生自旋压缩态的方法。

当系统中存在纠缠时，就意味着有自旋压缩产生。对于自旋压缩态的概念也有不同的解释，究其根本是系统中角动量本身具有复杂的结构，所以自旋压缩态<sup>[171-173]</sup>在应用方面也具有不同的特点，一个重要的应用是在光谱学中比量子极限标准还要低的多粒子系统关于一个分量的量子涨落的整体自旋，这个结论可以通过降低量子噪声应用在高度敏感光谱仪上。同样自旋压缩态在精度和稳定性的方面也有非常多的应用。

另一个重要的应用是在量子信息和量子计算领域。自旋压缩态应用到量子存储时可以降低存储器的量子噪声大小，把量子计算理论和自旋压缩理论联系起来。量子计算中的量子计算机在执行命令时一般会通过存储的比特产生自旋压缩，而存储比特是由自旋构成的，假设量子计算机的命令是由一些受限制的命令集组合而成的，那么当计算机在执行一般的命令时就会受到阻碍。量子计算机在执行部分命令纠缠会产生自旋压缩，对自旋的探测也成为了量子计算的手段。

在自旋压缩系统中，有一个特点对于量子相关应用有着重要的影响，其特点指的是，对于多粒子所组成的复合系统中，整体形成的自旋分量的不确定性与自标准值相比较是偏低的。这个特点可以使原子干涉仪在执行量子计算任务和信处理任务时，能够更准确以及更稳定的完成任务。

## 2.5 退相干

信息的概念目前是一个被学者们讨论比较频繁的话题，量子信息进行信息处理时是以量子系统为载体的，它可以让信息处于绝对安全的状态，这是经典信息所达不到的一个状态。

虽然量子信息具有经典信息所达不到的优势，但是在实际信息传输的过程中会遇到很多的困难。其中，对量子信息影响最高的便是退相干。量子系统由于与环境的相互作用，在随着时间演化的过程中，部分能量和信息都会丢失在环境中，量子态还会从相干

叠加态，也就是所谓的纯态，演化到非相干叠加态，即混合态，退相干的定义就是这样来的。

通常情况下，在研究完成信息处理任务的过程中，人们都会想当然的以为所选择的系统是处于理想状态下的，即系统是一个封闭的系统。然而在实际的信息传输系统中，系统都会在所难免的与周围环境发生相互耦合作用，这种作用在一定程度上会影响到信息传输的质量，也会大大降低量子信息的有效程度。由于退相干所表现出来的这种特性，许多学者开始思考怎样能够抑制信息传输系统中退相干效应的产生。经过大家长时间的努力，提出了一些能够解决退相干效应的方法，分别叫做量子纠错码、无消相干子空间和动力学解耦。

量子纠错码（Quantum Error Correcting Codes<sup>[174-178]</sup>，QECC）思想，是通过添加冗余的量子比特位来实现量子信息中错误的检测与纠正。

举一个简单的例子，考虑到一个量子系统是腔场，这个腔场刚开始处于偶相干态，环境初始状态为 $|\varphi\rangle$ ，则腔场与环境所组合而成的复合系统的状态为：

$$|\psi(0)\rangle \propto (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)|\varphi\rangle \quad (2-17)$$

t时刻时复合系统的状态就会变为：

$$|\psi(t)\rangle \propto (|\beta(t)\rangle|\varphi_1\rangle + |-\beta(t)\rangle|\varphi_2\rangle) \quad (2-18)$$

其中：

$$|\beta(t)\rangle = \alpha e^{-\gamma t/2} \quad (2-19)$$

从上式可以看出，腔场与环境发生了相互作用，产生了纠缠。此时，由腔场与环境组成的复合系统的密度算符表示为：

$$\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (2-20)$$

对环境执行求迹的操作，可以假设 $\langle\varphi_j|\varphi_k\rangle = \delta_{jk}$ ，这样就可以得到腔场的约化密度算符，表示为：

$$\begin{aligned} \rho_F &= Tr_e \rho \\ &= \sum_j \langle\varphi_j|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\varphi_j\rangle \\ &\propto |\beta(t)\rangle\langle\beta(t)| + |-\beta(t)\rangle\langle-\beta(t)| \end{aligned} \quad (2-21)$$

通过上述所举的简单的一个例子，可以看出来虽然腔场刚开始是处于纯态，但是由于环境会对这个复合系统产生一定的影响，在随时间演化过程中，腔场会慢慢演化成混合态，也被称为相干态的非相干叠加态，也就是所谓的退相干。



### 3 两种双量子比特自旋压缩模型的稠密编码

#### 3.1 引言

量子纠缠<sup>[60, 62, 87]</sup>近年来在量子力学中得到了广泛的研究，因为它是量子力学中最迷人的特征之一，并且在量子信息处理（QIP）和量子计算起着重要的作用。因此，近年来得到了广泛的应用，例如量子密钥分配、量子隐形传态、量子稠密编码等。所谓量子纠缠，即当不同的粒子发生相互作用之后，即使粒子与粒子之间可能在空间上远离，在改变其中一个粒子的状态时，也会立即影响其它粒子的状态。这种多体关联的现象，称为量子纠缠。具体而言，量子纠缠态是量子力学区别于经典物理学的特有状态，按照是否纠缠可以分为可分离态和不可分离态。由于量子态的叠加原理，一个量子态可以同时处于多个本征态的线性叠加，叠加态又可分为纯态和混合态。

近年来探测纠缠方面发展了更多的方法，如强不可分性判据，连续变量的可分性判据等。任何具有开放性的系统都会在所难免的与周围环境产生一定的影响，产生退相干和耗散现象，所以很容易造成纠缠的衰减或者猝死。也就是说，在系统中制备量子纠缠并且使纠缠得以保持的主要影响因素就是环境会产生耗散现象，它会大大降低信息处理的速率。所以，基于以上原因，大家开始慢慢关注如何在具有开放性的系统中制备纠缠以及使纠缠保持时间延长的问题。人们对于量子系统中纠缠特性的大量研究，极大的促进了量子计算的发展，也开始慢慢发现在信息传输和储存的过程中，还有一个值得注意的问题就是能够高效完成信息处理任务。

在本篇论文中，着重研究量子稠密编码的过程。在初始的稠密编码协议中，如果发送方和接收方共享一个最大纠缠态，即 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 态，那么发送方就可以通过发送一个量子比特的信息向接收方传输两个量子比特的经典信息。从那时起，实验上或理论上许多关于稠密编码的工作就已经被提出了。量子稠密编码最初是由 Bennett 等人在 1992 年提出的利用量子纠缠现象可以实现只传输一个量子比特，而接收到两个经典比特的信息。我们知道，在一般的稠密编码过程中，发送方会采用  $d$  维量子空间执行一种局部的幺正变换：

$$U_i \in U(d) \tag{3-1}$$

先验概率表示为：

$$p_i (i=0,1,\dots,i_{\max}) \quad (3-2)$$

将量子态  $\rho$  制备成:

$$\rho_i = (U_i \otimes I_d) \rho (U_i^\dagger \otimes I_d) \quad (3-3)$$

然后发送方把自己所持有的量子状态发送给接收方。接收方在量子系统中接收到发送方所传输的信息后,对  $\rho_i$  执行测量,从而把信息提取出来。在这个过程中,已知所能传达的最佳信息量是由 Holevo 量限定的:

$$\chi = S(\bar{\rho}) - \sum_{i=0}^{i_{\max}} p_i S(\rho_i) \quad (3-4)$$

这里  $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$  是冯诺依曼熵 (Von Neumann entropy);

信号系统的平均密度矩阵:

$$S(\bar{\rho}) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} p_i S(\rho_i) \quad (3-5)$$

由于 Holevo 量是渐进可实现的,因此稠密编码容量的定义可以表示为:

$$\chi = S(\bar{\rho}) - \sum_{i=0}^{i_{\max}} p_i S(\rho_i) \quad (3-6)$$

此外,冯诺依曼熵 (Von Neumann entropy) 在么正变换下是不变的,所以  $S(\rho_i) = S(\rho)$

$$(3-7)$$

因此,稠密编码容量也可以写成

$$\chi = S(\bar{\rho}) - S(\rho) \quad (3-8)$$

接下来的问题就是找到最大化的  $\chi$  的最优信号集合  $\{\rho_i; p_i\}_{i=0}^{i_{\max}}$ 。在参考文献<sup>[179]</sup>中,作者证明了具有相同的概率由相互正交的么正变换提到  $d^2$  的单重态 ( $i_{\max} = d^2 - 1$ ) 是可以产生稠密编码容量  $\chi$  的最大值,这叫做最优稠密编码。此外,该文献还考虑了共享纠缠态为一般混合纠缠态时的最优稠密编码。

自热纠缠建立以来,例如自旋链等固态体系中的量子纠缠的研究成为一个重要的新兴领域,并且与其他物理系统相比,自旋链是实现纠缠的最好选择。近年来,文献<sup>[180]</sup>提出了利用热纠缠态作为信道的量子隐形传态过程,同时在实验或理论上提出了许多关于稠密编码的工作过程。然而,利用双量子比特自旋压缩模型的热纠缠态进行最优稠密

编码的研究很少。受前人研究的启发，本文研究了具有外加磁场条件下的双量子比特自旋压缩模型的稠密编码特性。

在本章中，研究了在双量子比特自旋压缩模型中两种压缩相互作用下的稠密编码容量  $\chi$  的特性。本文的内容安排如下：在第二节中，我们描述了系统的哈密顿量，给出了双量子比特自旋压缩模型中两种压缩相互作用下稠密编码容量的定义。第三节研究了单轴扭转模型的稠密编码容量特性。第四节研究了双轴反扭模型的稠密编码容量特性。结论在第五节中给出。

### 3.2 模型描述和稠密编码

现在我们考虑一个哈密顿量，它的表达形式为：

$$H = \mu S_x^2 + \nu S_y^2 + \gamma(S_x S_y + S_y S_x) + f(S_z) \quad (3-9)$$

在自旋压缩模型中会出现两种情况：

- (1) 当  $\nu = \gamma = 0, f(S_z) = \Omega S_z$ 。将其化简为由哈密顿量所描述的横向场的单轴扭转模型 (OATM) 是：

$$H_1 = \mu S_x^2 + \Omega S_z \quad (3-10)$$

其中  $\Omega (\geq 0)$  是 Z 方向的外磁场的强度， $\mu (\geq 0)$  描述了 X 方向上的自旋压缩相互作用强度，自旋算符的和：

$$S_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_\alpha^i, (\alpha \in x, y, z) \quad (3-11)$$

其中  $\sigma_\alpha^i$  是第  $i^{\text{th}}$  自旋的泡利矩阵。

- (2) 当  $u = \nu = 0, f(S_z) = \Omega S_z$ 。它可以化简为由哈密顿量所描述的横向场的双轴反扭模型 (TACM)：

$$H_2 = \gamma(S_x S_y + S_y S_x) + \Omega S_z \quad (3-12)$$

这里  $\gamma$  表示 XY 平面中自旋压缩相互作用的强度， $\Omega$  和  $S_\alpha$  分别指的是 Z 方向的外磁场的强度、自旋算符的和，与上面所述的第二个情况中的含义相同。

对于温度为 T 时处于平衡状态的系统，密度算符可以写成：

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} = \sum_{n=1}^4 P_n(T) |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (3-13)$$

这里的  $P_n(T)$  是特征态的占据概率，表示为：

$$P_n(T) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \quad (3-14)$$

其中

$$\beta = 1 / (\kappa_B T) (\kappa_B = 1) \quad (3-15)$$

T 指的是温度， $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$  是配分函数。通过一系列的计算，密度矩阵可以表示为：

$$\rho(T) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

在这里，我们标出了四个基态  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  分别对应数字 1, 2, 3, 4。对于一个双量子比特系统，我们知道密度矩阵的非零元素通常是沿着主对角线和反对角线的，所以密度矩阵呈 x 态形式。

现在，我们将上述双量子比特系统在平衡状态下的热纠缠态作为信道进行稠密编码。给出了双量子比特最优稠密编码相互正交么正变换的集合：

$$\begin{aligned} U_{00}|j\rangle &= |j\rangle, \\ U_{01}|j\rangle &= |j+1(\bmod 2)\rangle, \\ U_{10}|j\rangle &= e^{i\pi j}|j\rangle, \\ U_{11}|j\rangle &= e^{i\pi j}|j+1(\bmod 2)\rangle, \end{aligned} \quad (3-17)$$

其中  $|j\rangle$  是单量子比特的计算基底 ( $|j\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ )。在进行这些么正变换后，由上述方程产生的信号状态集合的平均状态为：

$$\bar{\rho}^*(T) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 (U_i \otimes I) \rho(t) (U_i^\dagger \otimes I) \quad (3-18)$$

我们已经给出了基底  $1 \rightarrow |00\rangle, 2 \rightarrow |01\rangle, 3 \rightarrow |10\rangle, 4 \rightarrow |11\rangle$  和热状态  $\rho(T)$ 。通过简单的代数运算，我们可以得到：



$$\bar{\rho}^*(T) = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} + \rho_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{11} + \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{11}\rho_{44} \end{pmatrix} \quad (3-19)$$

在完成相互正交的么正变换后，接下来就可以用 Holevo 量来测量量子稠密编码容量，公式可以表示为：

$$\chi = S(\bar{\rho}^*) - S(\rho) \quad (3-20)$$

这里的  $\rho$  是发送者和接收者的共享态， $\bar{\rho}^*$  表示量子稠密编码后的密度矩阵， $S$  是冯诺依曼熵， $\chi$  是稠密编码容量。

接下来，我们将选择这两种类型的自旋压缩模型来进行稠密编码，并利用广泛使用的何勒夫量（Holevo）量来检验它们的量子稠密编码容量的性质。

### 3.3 在 OATM 模型中稠密编码容量的性质

已经知道了 OATM 模型中的哈密顿量  $H_1$ ，那么就可以计算出平衡状态下哈密顿量的本征值  $E_n$  和对应的本征向量  $|\Psi_n\rangle$ ：

$$\begin{aligned} E_{1,4} &= \frac{\mu \pm \kappa}{2}, |\Psi_{1,4}\rangle = \frac{1}{A_{\pm}} (\mu|00\rangle + (2\Omega \pm \kappa)|11\rangle), \\ E_2 &= 0, |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle), \\ E_3 &= \mu, |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle), \end{aligned} \quad (3-21)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{\mu^2 + 4\Omega^2} \\ A_{\pm} &= \sqrt{\mu^2 + (2\Omega \pm \kappa)^2} \end{aligned} \quad (3-22)$$

根据式子（3-13）和式子(3-14)表示的密度算符和密度矩阵，将  $H_1$  的本征值  $E_n$  和对应的本征向量  $|\Psi_n\rangle$  代入到公式(3-13)中，则非零矩阵元素就可以表示为：

$$\begin{aligned}
\rho_{11} &= \frac{1}{Z} \mu^2 e^{-\frac{\beta\mu}{2}} \left( \frac{e^{-\frac{\kappa\beta}{2}}}{A_+^2} + \frac{e^{\frac{\kappa\beta}{2}}}{A_-^2} \right), \\
\rho_{14} = \rho_{41} &= \frac{1}{Z} \mu e^{-\frac{\beta\mu}{2}} \left( \frac{e^{-\frac{\kappa\beta}{2}} (2\Omega + \kappa)}{A_+^2} + \frac{e^{\frac{\kappa\beta}{2}} (2\Omega - \kappa)}{A_-^2} \right), \\
\rho_{22} = \rho_{33} &= \frac{1}{2Z} (1 + e^{-\beta\mu}), \\
\rho_{23} = \rho_{32} &= \frac{1}{2Z} (-1 + e^{-\beta\mu}), \\
\rho_{44} &= \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta\mu}{2}} \left( \frac{e^{-\frac{\kappa\beta}{2}} (2\Omega + \kappa)^2}{A_+^2} + \frac{e^{\frac{\kappa\beta}{2}} (2\Omega - \kappa)^2}{A_-^2} \right),
\end{aligned} \tag{3-23}$$

其中配分函数表示为如下公式：

$$Z = e^{-\frac{\beta\mu}{2}} \left( e^{-\frac{\beta\kappa}{2}} + e^{\frac{\beta\kappa}{2}} + e^{-\frac{\beta\mu}{2}} \right) + 1 \tag{3-24}$$

将以上非零密度矩阵元素带入到公式(3-20)中，可以通过定量分析获得稠密编码容量  $\chi$  的性质。

图 3-1 表示的是，在横向场的单轴扭转模型中，假设温度  $T=0.2$  时，随着参数  $\Omega$  和  $\mu$  的改变，稠密编码效率的变化趋势。从图中可以看出随着参数  $\Omega$  和  $\mu$  的增加， $\chi$  的值先增加，最后达到一个稳定值。此外，从图 3-1 中也很容易发现，在参数  $\Omega$  和  $\mu$  的大部分数值变化范围内， $\chi$  的值总是小于 1，这也就意味着在横向场的单轴扭转模型体系中不能进行有效的稠密编码。也就是说，当  $\chi$  的值总是小于 1 的时候，横向场的单轴扭转模型体系中稠密编码是没有效果的。然而，随着参数  $\Omega$  和  $\mu$  取更大范围的值（例如： $\Omega > 1.5, \mu > 3$ ）， $\chi$  的值会大于 1，也就是说，当系统在横向场的单轴扭转模型中运行时，只有参数  $\Omega$  和  $\mu$  的取值在较大范围内才能进行有效的稠密编码。只有当  $\Omega$  和  $\mu$  取值的范围在合适的区间时，稠密编码是有效的。

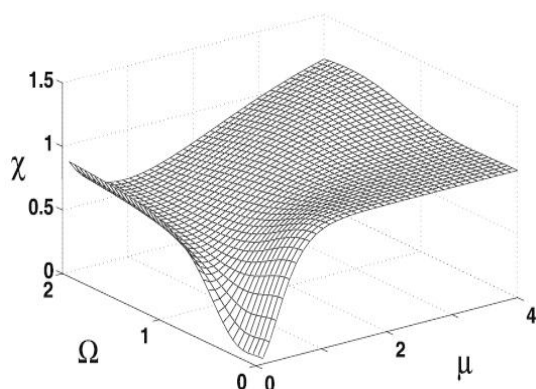


图 3-1

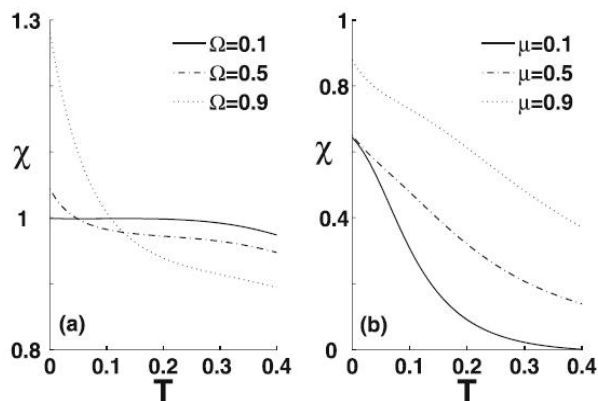


图 3-2

图 3-1 在 OATM 体系中（即横向场的单轴扭转模型），相对于参数 $\Omega$ 和 $\mu$ ，稠密编码容量 $\chi$ 的数值变化，其中假设温度 $T=0.2$ 。

图 3-2 在 OATM 体系中，（即横向场的单轴扭转模型）图 (a) 描述的是当 $\mu=3$  时，稠密编码容量 $\chi$  关于温度 $T$  的函数图像，其中 $\Omega$  取不同的值，实线表示 $\Omega=0.1$ ；虚线表示 $\Omega=0.5$ ；点线表示 $\Omega=0.9$ 。图 (b) 描述的是当 $\Omega=0.5$  时，稠密编码容量 $\chi$  关于温度 $T$  的函数图像，其中 $\mu$  取不同的值，实线表示 $\mu=0.1$ ；虚线表示 $\mu=0.5$ ；点线表示 $\mu=0.9$ 。

在图 3-1 中表示的是当参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 取不同值时， $\Omega$ 分别为 0.1, 0.5, 0.9,  $\mu$ 分别为 0.1, 0.5, 0.9。稠密编码容量 $\chi$ 随着温度 $T$ 变化的函数图像。从图 3-2(a)和(b)中可以看出： $\chi$ 的值均随着温度 $T$ 的增加而降低，这种变化趋势类似于横向场的单轴扭转(OATM)模型。不同的是，在图(a)中，当 $\mu=3$ 时我们用实线表示 $\Omega=0.1$ ；虚线表示 $\Omega=0.5$ ；点线表示 $\Omega=0.9$ ，发现参数 $\Omega$ 可以明显地影响稠密编码容量的演化（特别是在较低的温度区域）。随着磁场强度 $\Omega$ 的增大，温度的升高，稠密编码容量的初始值明显增加，并且 $\chi$ 的值可以通过调整磁场强度使其大于 1。这就意味着人们可以通过改善外部磁场强度来提高有效的稠密编码能力，这是一个很好的结果。在图(b)中实线表示 $\mu=0.1$ ；虚线表示 $\mu=0.5$ ；点线表示 $\mu=0.9$ ，当 $\Omega=0.5$ 时图中的现象是随着耦合参数 $\mu$ 的增加，稠密编码容量 $\chi$ 的效率也有所增强。

但是，通过改变参数 $\mu$ 很难实现有效的稠密编码。无论 $\mu$ 的取值如何变化，稠密编码的图像都不会出现大于 1 的情况。在横向场的单轴扭转(OATM)模型中，通过分析参数 $\Omega$ 、 $\mu$ 和 $T$ 对稠密编码容量的影响，我们可以发现参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 对稠密编码容量起着积极作用，可以促进有效的稠密编码，而温度 $T$ 对稠密编码容量发挥着消极作用，它总是阻碍有效的稠密编码。也可以说，通过调整优化这些参数，在参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 取值的更大范围内以及参数 $T$ 的更小范围区域内进行有效的稠密编码，这样会大幅度提高所研究参

数对稠密编码的影响。

### 3.4 在 TACM 模型中稠密编码容量的性质

已知哈密顿量  $H_2$ ，那么  $H_2$  的本征值  $E_n$  和对应的本征向量  $|\Psi_n\rangle$  可以计算得到：

$$\begin{aligned} E_{1,4} &= \pm\sqrt{\Omega^2 + \gamma^2}, |\Psi_{1,4}\rangle = \mp i\sqrt{\frac{\delta \pm \Omega}{2\delta}}|00\rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2\delta(\delta \pm \Omega)}}|11\rangle, \\ E_2 &= 0, |\Psi_2\rangle = |01\rangle, \\ E_3 &= 0, |\Psi_3\rangle = |10\rangle, \end{aligned} \quad (3-25)$$

这里

$$\delta = \sqrt{\Omega^2 + \gamma^2} \quad (3-26)$$

本征值  $E_2$  和  $E_3$  是双重简并的。然后将公式(3-21)的本征值  $E_n$  和对应的本征向量  $|\Psi_n\rangle$  代入到公式(3-4)中，求得演化密度矩阵的非零矩阵元素分别是：

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{ne^{-\beta\delta} + me^{\beta\delta}}{2Z\delta}, \\ \rho_{22} &= \rho_{33} = \frac{1}{Z}, \\ \rho_{44} &= \frac{e^{-\beta\delta}\gamma^2}{2\delta nZ} + \frac{e^{\beta\delta}\gamma^2}{2\delta mZ}, \\ \rho_{14} &= \rho_{41}^* = \frac{i\gamma(e^{\beta\delta} - e^{-\beta\delta})}{2Z\delta}, \end{aligned} \quad (3-27)$$

这里

$$m = \delta - \Omega, n = \delta + \Omega \quad (3-28)$$

配分函数

$$Z = 2 \cosh(\beta\delta) + 2 \quad (3-29)$$

已经知道密度矩阵元素的解析形式，并结合稠密编码容量  $\chi$  的定义式(3-20)，我们可以得到在横向场的双轴反扭（TACM）模型中的稠性编码容量性质。

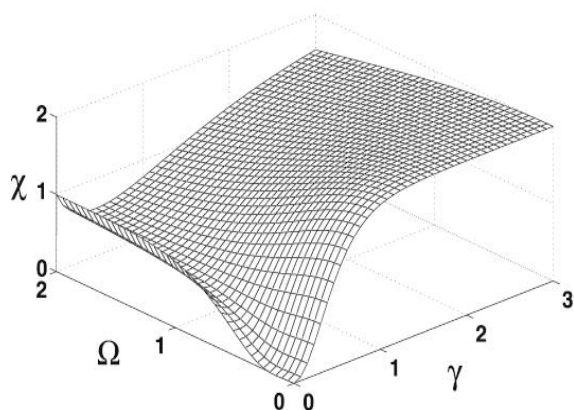


图 3-3

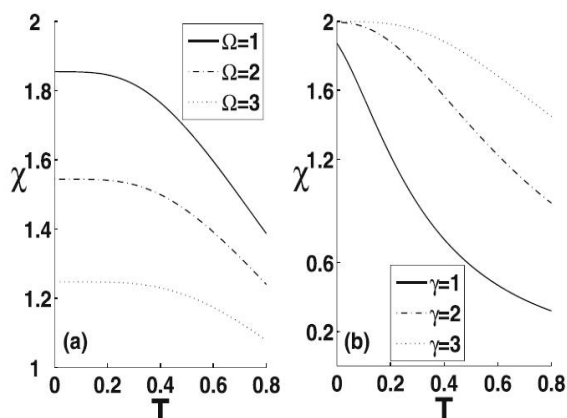


图 3-4

图 3-3 在 TACM 体系中，（即横向场的双轴反扭模型），我们假设  $T=0.2$ ，稠密编码容量  $\chi$  关于  $\Omega$  和  $\gamma$  的函数图像。

图 3-4 在 TACM 体系中，图(a)是当  $\gamma=3$  时，稠密编码容量  $\chi$  关于温度  $T$  的函数图像，其中参数  $\Omega$  取不同的值，分别是实线： $\Omega=1$ ；虚线： $\Omega=2$ ；点线： $\Omega=3$ 。图 (b) 是当  $\Omega=0.1$  时，稠密编码容量  $\chi$  关于温度  $T$  的函数图像，其中参数  $\gamma$  取不同的值，分别是实线： $\gamma=1$ ；虚线： $\gamma=2$ ；点线： $\gamma=3$ 。

在图 3-3 中，我们在确定  $T=0.2$  的条件下，通过改变参数  $\Omega$  和  $\gamma$  来研究稠密编码容量  $\chi$  的性质。可以看出，在弱参数  $\Omega$  的空间区域内，环境相干率的参数  $\gamma$  的增加对稠密编码能力有促进作用， $\chi$  的值随着参数  $\gamma$  的增大而增大，能够更接近有效的稠密编码，而在强参数  $\Omega$  的空间区域内，参数  $\gamma$  的增加对稠密编码能力呈现出与刚刚不同的作用，稠密编码容量  $\chi$  的值会随着  $\gamma$  的增加呈现出先减少后增加的趋势，这说明在强参数  $\Omega$  的空间区域内，对稠密编码的影响是不稳定的。此外，当参数  $\gamma$  的值进一步增加时，从图 3-3 可以看出稠密编码容量的值达到某一稳定值，当稠密编码达到这一稳定值时，无论环境相干率怎么变化都不会影响稠密编码的效果，这说明稠密编码是有效的。但我们必须注意的一点是这一稳定值几乎总是大于 1，这就意味着无论参数  $\Omega$  取何值，通过增加  $\gamma$  的值就可以很容易实现有效稠密编码。然而，参数  $\Omega$  对最优稠密编码容量  $\chi$  的影响是复杂的，我们发现随着参数  $\Omega$  的增加，其对  $(\chi > 1)$  的有效稠密编码起到抑制作用，使得稠密编码的图像不能大于 1，在弱压缩相互作用的条件下，其对稠密编码起到积极作用，又能够促进稠密编码。总之，我们还能发现在横向场的双轴反扭（TACM）体系中，很容易实现有效稠密编码  $(\chi > 1)$  和最优稠密编码  $(\chi = 2)$ 。

图 3-4 描述的是参数  $\Omega$  或  $\gamma$  取不同值时，稠密编码容量  $\chi$  关于温度  $T$  的函数演化的图像，图(a)中实线、虚线和点线分别表示  $\Omega=1$ ,  $\Omega=2$ ,  $\Omega=3$  时  $\chi$  关于时间  $T$  的变化趋势；

图(b)中实线、虚线和点线分别表示 $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\gamma = 3$   $\chi$  关于时间 T 的变化趋势。根据图像(a)和(b), 我们可以看出两幅图像都展示了稠密编码容量 $\chi$  随着温度的增加而呈现减小的趋势。在图像(a)中, 可以看出可以看出 $\Omega$ 的值对 $\chi$ 的演化有消极的作用, 稠密编码容量 $\chi$  的值随着参数 $\Omega$ 值的减小而增加。这就说明了外部磁场对稠密编码起到消极的作用, 如果我们想要实现有效的稠密编码, 那么系统就不需要外部磁场或者说减少外部磁场的影响。在图像(b)中, 可以看出 $\gamma$  的值对 $\chi$ 的演化有积极的作用, 稠密编码容量 $\chi$  的值随着 $\gamma$  值的增加而增加。这就意味着压缩相互作用对稠密编码起到积极的影响, 这种影响类似于在横向场的单轴扭转 (OATM) 体系中参数 $\mu$  对稠密编码过程的影响。通过分析图(a)和(b)的变化趋势, 可以推断出只要选择合适的参数 $\Omega$ 或 $\gamma$ , 在横向场的双轴反扭 (TACM) 体系中不仅能实现有效的稠密编码, 而且还能实现最优稠密编码。

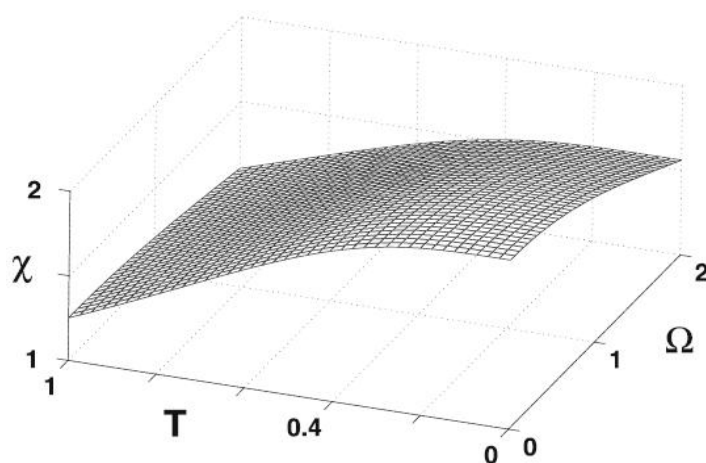


图 3-5 在 TACM 体系中, 当 $\gamma=3$  时, 稠密编码容量 $\chi$  关于参数 $\Omega$ 和 T 的函数图像。

图 3-5 描述的是当 $\gamma = 3$  时, 参数 $\Omega$ 和 T 取不同值对稠密编码容量 $\chi$  的影响。从图中可以观察到随着参数 $\Omega$ 和 T 值的增加, 稠密编码容量 $\chi$  的值缓慢减小。一个有趣的现象是, 如果我们选择合适的压缩相互作用 $\gamma$  的值 (例如 $\gamma = 3$ ), 那么在横向场的双轴反扭 (TACM) 体系中总是可以实现有效稠密编码。通过分析参数 $\Omega$ 、 $\gamma$  和 T 对稠密编码性质的影响, 可以得出结论: 参数 $\Omega$ 和 T 对稠密编码的效率起到抑制作用, 而压缩相互作用 $\gamma$  对稠密编码的效率起到促进作用。我们发现在横向场的双轴反扭 (TACM) 模型中很容易实现有效稠密编码, 甚至通过适当调优上面提到的参数可以实现最优稠密编码。

### 3.5 总结

综上所述，我们详细研究了两种双量子比特自旋压缩模型（OATM 和 TACM）中的稠密编码容量的特性。

对于横向场的单轴反扭（OATM）模型，研究发现：随着参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 值的增大，稠密编码容量 $\chi$ 的值也会增大，然后随着这两个参数的进一步增大， $\chi$ 的值最后达到一个稳定值。在这个模型中，参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 在大部分取值空间区域内，都很难实现有效稠密编码。然而，当参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 在少部分空间区域取值时可以实现有效稠密编码，例如： $\Omega > 1.5; \mu > 3$ 。此外，我们还研究了参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 取不同值时，稠密编码容量 $\chi$ 作为关于 $T$ 的函数随温度 $T$ 的演化规律。稠密编码容量 $\chi$ 的值会随着温度 $T$ 值的增加而呈现减小的趋势，我们可以通过增加参数 $\Omega$ 和 $\mu$ 的值来实现有效稠密编码( $\chi > 1$ )。结果表明，外磁场强度 $\Omega$ 和压缩相互作用 $\mu$ 对有效稠密编码会产生积极的影响。

研究在横向场双轴反扭（TACM）体系中稠密编码容量的特性，结果表明：在参数 $\Omega$ 值较小的范围内，随着参数 $\gamma$ 值的增加，稠密编码容量的值也随之增加，而在参数 $\Omega$ 值逐渐增大的情况下，稠密编码容量 $\chi$ 的值会呈现出先减小后增大的趋势。值得注意的是，随着参数 $\gamma$ 的值的进一步增加，稠密编码容量 $\chi$ 的值会逐渐达到一个稳定值，而且这个稳定值总是大于1，也就是说无论参数 $\Omega$ 的值选择多少，都可以通过增大参数 $\gamma$ 的值，来实现有效稠密编码。然而，参数 $\Omega$ 对稠密编码容量效率的影响是比较复杂的，我们能够发现外部磁场强度( $\Omega$ )对有效稠密编码( $\chi > 1$ )起到抑制作用，在弱压缩相互作用( $\gamma$ )的条件下，对稠密编码起到积极作用。另外，随着温度 $T$ 的增加稠密编码容量 $\chi$ 会逐渐减弱。在横向场的双轴反扭（TACM）体系中，不难发现，即使处在高温环境下，也通过适当调整参数 $\gamma$ 和 $\Omega$ 很容易的实现有效稠密编码，甚至达到最优稠密编码。令人高兴的是：正确地选择参数外部磁场强度 $\Omega$ 、压缩相互作用 $\mu$ 、弱压缩相互作用 $\gamma$ 的值，系统总是能够进行有效的稠密编码。





以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/247031001014010010>