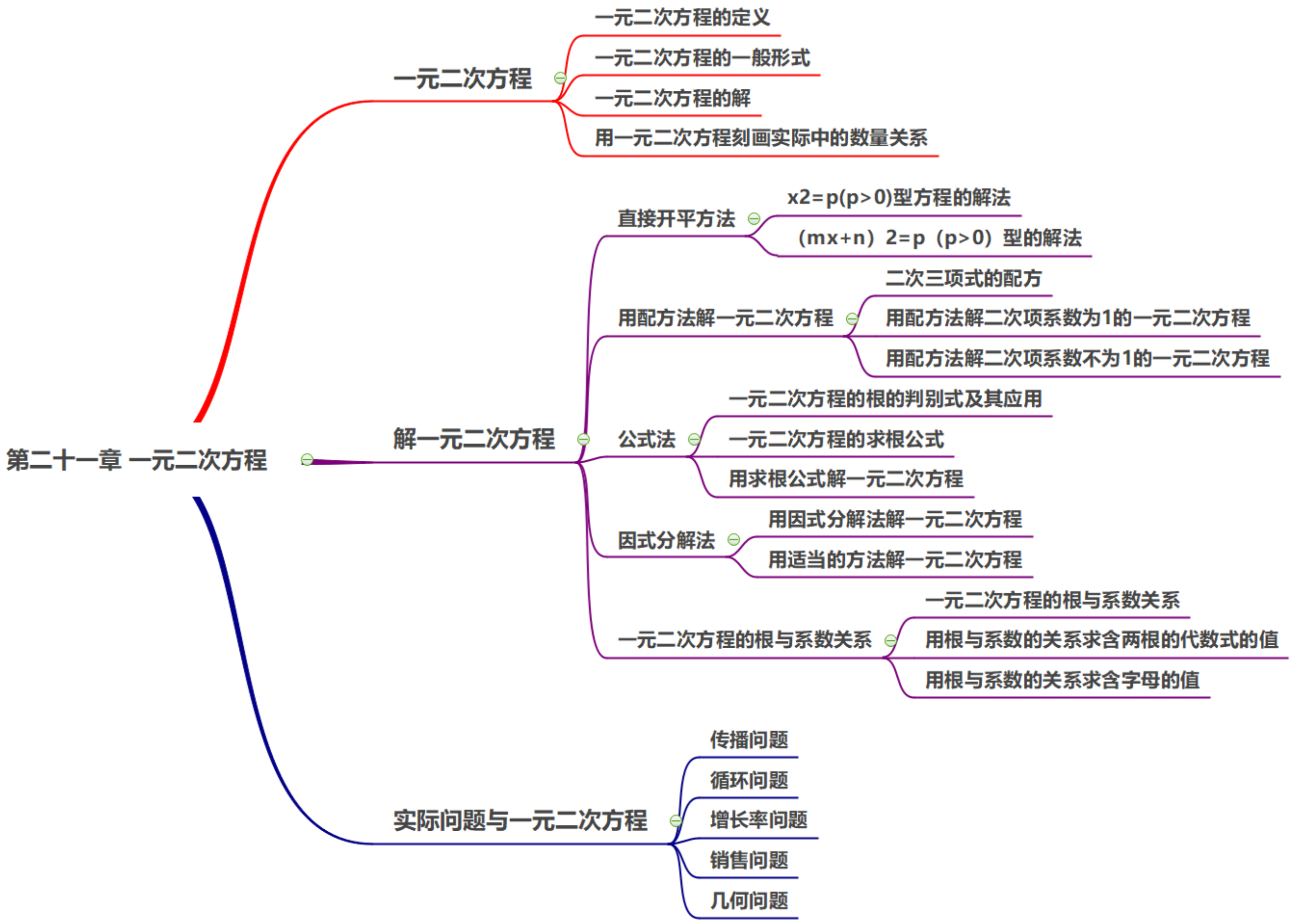
第二十一章 一元二次方程知识归纳与题型突破（17 题型清单）

01 思维导图



02 知识速记

一、一元二次方程的概念

1.概念

等号两边都是整式,只含有一个未知数(一元),并且未知数的最高次数是 2(二次)的方程,叫做一元二次方程.

2.一元二次方程满足的条件(三要素)

(1)是整式方程;(2)只含有一个未知数;(3)整理后未知数的最高次数是 2.

3.对“未知数的最高次数是 2”的理解

(1)该项系数不为 0:

(2)该项未知数指数为 2;

(3)当方程中的二次项系数含有字母时,字母取值不确定,这个方程不一定是一元二次方程

二、一元二次方程的一般形式

1.一般形式

一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$ (a≠0).其中 ax^2 是二次项,a 是二次项系数;bx 是一次项,b 是一次项系数;c 是常数项.

2.一元二次方程的一般形式的特点:方程右边是 0,左边是关于 x 的二次整式,且二次项系数不为 0.

3.特殊形式

二次项系数不为 0,当 b 取 0 或 c 取 0 时,一元二次方程的一般形式呈现如下情况:

特殊形式	二次项	一次项	常数项
$ax^2+bx=0(a\neq0,b\neq0)$	ax^2	bx	0
$ax^2+c=0(a\neq0,c\neq0)$	ax^2	0	c
$ax^2=0(a\neq0)$	ax^2	0	0

4.注意事项

确定一元二次方程的各项和各项系数时注意不要丢掉前面的符号.一般情况下,将一元二次方程整理为一般形式时,若二次项系数为负数,要乘“-1”把它转化为正数,若有的项系数是分数,要把它转化为整数.

三、一元二次方程的解(根)

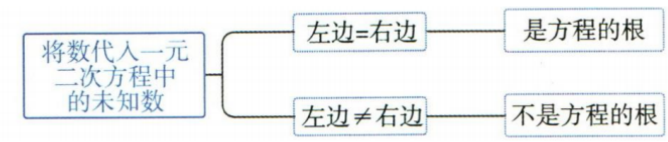
1.概念

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根.

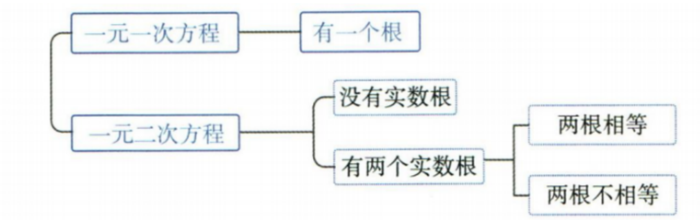
如 x=2 和 x=5 都是方程 $x^2-7x+10=0$ 的解(根).

2.一元二次方程的解(根)满足的条件(1)未知数的值;(2)使方程左右两边相等

3.判断一个数是不是一元二次方程的解(根)的方法



4.一元一次方程和一元二次方程根的区别



四、一元二次方程的解法：直接开平方法

直接开平方法解一元二次方程：将方程化成$(x+a)^2=b(b\geq 0)$的形式，则 $x=-a\pm\sqrt{b}(b\geq 0)$.

五、一元二次方程的解法：配方法

1.配方法：配方法是一种以配方为手段，以开平方为基础的一种解一元二次方程的方法.

2.用配方法解一元二次方程：$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$）的一般步骤是：

（1）化二次项系数为 1，即方程两边同除以二次项系数；

（2）移项，即使方程的左边为二次项和一次项，右边为常数项；

（3）配方，即方程两边都加上一次项系数的绝对值一半的平方；（4）化原方程为$(x+m)^2=n$ 的形式；

（5）如果 $n\geq 0$ 就可以用两边开平方来求出方程的解；如果 $n<0$，则原方程无解.

注意：实际在解方程的过程中，一般也只是针对 $a=\pm 1$ 且 b 为偶数时，才使用配方法，否则可以考虑使用公式法来更加简单。

六、公式法

1.公式法是用求根公式求出一元二次方程的解的方法．它是通过配方推导出来的.

一元二次方程的求根公式是: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(\Delta=b^2-4ac\geq 0)$

2.**推导过程：**一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，用配方法将其变形为：$(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

3.**公式法解方程的步骤：**①化方程为一元二次方程的一般形式； ②确定 a、b、c 的值； ③求出 b^2-4ac 的值；④若 $b^2-4ac\geq 0$，则代人求根公式，求出 x_1 ,x_2．若 $b^2-4ac<0$，则方程无解.

七、一元二次方程根的判别式 $(\Delta=b^2-4ac)$

1.①当$\Delta=b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实根；

② 当$\Delta=b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实根；

③ 当$\Delta=b^2-4ac<0$时，方程没有实根。

判别式作用：①定根的个数；②求待定系数的值。

注意：

(1)在使用根的判别式之前，应将一元二次方程化成一般式；

(2)在确定一元二次方程待定系数的取值范围时，必须检验二次项系数 $a≠0$

(3)证明 $\Delta = b^2 - 4ac$ 恒为正数的常用方法：把Δ的表达式通过配方化成“完全平方式+正数”的形式。

七、因分解法

1.元二次方程通过因式分解，分解为两个一次因式乘积等于 0 的形式，再使这两个一次因式分别等于 0，实现降次的方法。

即将一元二次方程化简为$(x-x_1)(x-x_2)=0$；从而得出：$x=x_1,或x=x_2$，因式分解法的关键是分解成两个一次因式相乘的形式。

2.分解的主要方法：

提取公因式法：通过提取公因式达到因式分解的目的，进而求解一元二方程。

乘法公式：因式分解的目的在将方程化成两个因式乘积等于 0 的形式，利用如下乘法公式，有时可以很好解决。①平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；②完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a+b)^2$

十字相乘法：

十字相乘法能将某些二次三项式因式分解。十字相乘法的二次三项式需满足三个条件：

①十字左边上下两数相乘等于二次项；②十字右边上下两数相乘等于常数项；③十字交叉相乘积的和等于一次项。 例如：用十字相乘法解方程：$2x^2-x-6=0$

$2x^2-x-6=0$

2x　　3

x　　－2

$2x\cdot(-2)+x\cdot 3=-x$

∴方程可分解为：(2x+3)（x－2）=0　　∴$x_1=-\frac{3}{2},x_2=2$

4）解一元二次方程的方法选择：

①虽然所有的一元二次都可以用公式法来求解，但它往往并非最简单的，一定要注意方法的选用。

②解一元二次方程时一般不使用配方法（除特别要求外）但又必须熟练掌握。

③四种求方程方法的一定要合理选用，依次按直接开平方、因式分解，配方法和公式法的顺序考虑选用。

八、因分解法

韦达定理：如果x_1，x_2是一元二次方程 $ax^2-bx+c=0(a\neq 0)$的两个根,由解方程中的公式法得,

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$．

那么可推得 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ 这是一元二次方程根与系数的关系．

九、一元二次方程解应用题的一般步骤

①根据题意和实际问题涉及的类型，建立等量关系式；

②以利于表示等量关系式为原则，设未知数 x；

③依据等量关系式和未知数 x 建立方程；

④解方程并解答。

注：一元二次方程通常有 2 解，但是，应检验方程的 2 个根是否都符合实际情况。

十、二次方程应用题常见类型：

1）面积问题；2）平均变化率问题；3）销售利润问题；4）传播问题；5）循环问题；6）数字问题。

十一、变化率问题

1.增长率问题

$a(1+x)^2=b$，其中 a 为增长前的量，x 为增长率，2 为增长次数，b 为增长后的量.

2.降低率问题

$a(1-x)^2=b$，其中 a 为降低前的量，x 为降低率，2 为降低次数，b 为降低后的量.注意 1 与 x 位置不可调换.

总结：有关增长率和降低率的有关数量关系

增长率的问题在实际生活中普遍存在，有一定的模式.若平均增长(或降低)百分率为 x，增长(或降低)前的量是 a，增长(或降低)n 次后的量是 b，则它们的数量关系可表示为 $a(1\pm x)^n=b$(其中增长取“+”，降低取“－”).

十二、传播问题实例探索

数量关系： 第一轮传播后的量=传播前的量×（1+传播速度）

第二轮传播后的量=第一轮传播后的量×（1+传播速度）=传播前的量×（1+传播速度）^{2}

十三、循环问题

（1）重叠类型（双循环）：n 支球队互相之间都要打一场比赛，总共比赛场次为 m。

∵1 支球队要和剩下的（$n-1$）支球队比赛，∴1 支球队需要比（$n-1$）场

∵存在 n 支这样的球队，∴比赛场次为：n（$n-1$）场

∵A 与 B 比赛和 B 与 A 比赛是同一场比赛，∴上述求法有重叠部分 ∴$m=\frac{1}{2}n(n-1)$

（2）不重叠类型（单循环）：n 支球队，每支球队要在主场与所有球队各打一场，总共比赛场次为 m。

∵1 支球队要和剩下的（$n-1$）支球队比赛，∴1 支球队需要比（$n-1$）场

∵存在 n 支这样的球队，∴比赛场次为：n（$n-1$）场

∵A 与 B 比赛在 A 的主场，B 与 A 比赛在 B 的主场，不是同一场比赛，∴上述求法无重叠 ∴$m=n$（$n-1$）

03 题型归纳

题型一　一元二次方程的定义

例题：（23-24 八年级下·山东烟台·期中）下列方程中：①$x^2-2x+1=0$；②$ax^2+bx+c=0$；③$\frac{2}{x^2}+3x-5=0$；④$-x^2=0$；⑤$(x-1)^2+y^2=2$；⑥$(2x-1)(x-3)=2x^2$，一元二次方程的个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义，只含有一个未知数，且未知数的最高次为 2 的整式方程叫做一元二次方程，据此求解即可．

【详解】解：①$x^2-2x+1=0$，是一元二次方程；

②$ax^2+bx+c=0$，当 $a=0$ 时，不是一元二次方程；

③$\frac{2}{x^2}+3x-5=0$，不是整式方程，不是一元二次方程；

④$-x^2=0$，是一元二次方程；

⑤$(x-1)^2+y^2=2$，含有两个未知数，不是一元二次方程;；

⑥$(2x-1)(x-3)=2x^2$，即 $-7x+3=0$，未知数的最高次不是 2，不是一元二次方程；

∴一元二次方程有 2 个，

故选：B．

巩固训练

2．（23-24 八年级下·浙江金华·期末）下列方程中，属于一元二次方程的是（　）

A．$x^2+xy=1$　　B．$2x-1=x+2$　　C．$2x^2-3x=4$　　D．$\frac{1}{x}+x^2=3$

【答案】C

【分析】本题考查一元二次方程的定义，根据一元二次方程的定义："含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程"进行判断即可求解．

【详解】解：A、含有两个未知数，未知数的最高次数是 2，不是一元二次方程，故不符合题意；

B、未知数的最高次数是 1，不是一元二次方程，故不符合题意；

C、含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2，是一元二次方程，故符合题意；

D、不是整式方程，故不符合题意；

故选：C.

3.（23-24八年级下·山东济宁·期末）下列方程中一定是关于x的一元二次方程的是（　）

A．$2ax^2+x+1=0$　　B．$a^2x+4x=0$

C．$x^2+xy=0$　　D．$(|a|+2)x^2+4x+5=0$

【答案】D

【分析】本题考查一元二次方程的定义，熟练掌握一元二次方程的定义是只含有一个未知数，并且未知数项的最高次数是2的整式方程是解题的关键.

根据一元二次方程的定义即可解答.

【详解】解：A、$2ax^2+x+1=0$，当$a=0$时不是一元二次方程，故不符合题意；

B、$a^2x+4x=0$，当$a=0$时不是一元二次方程，故不符合题意；

C、$x^2+xy=0$，含有两个未知数，不是一元二次方程，故不符合题意；

D、$(|a|+2)x^2+4x+5=0$是一元二次方程，故符合题意.

故选：D.

4.（23-24八年级下·安徽滁州·期末）关于x的方程$(a-2)x^{a^2-2}-5x+6=0$是一元二次方程，则a的值是（　）

A．-2　　B．2　　C．±2　　D．4

【答案】A

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义，根据一元二次方程的定义解方程求解以及不等式即可得出答案.

【详解】解：根据题意可得出$a^2-2=2$且$a-2\neq0$

解得：$a=-2$，

故选：A.

题型二　一元二次方程的一般形式

例题：5.（24-25九年级上·浙江·假期作业）若一元二次方程$(x+a)^2=b$（a，b为常数），化成一般形式为$x^2-8x-5=0$，则a，b的值分别是（　　）

A．$-4,11$　　B．$-4,21$　　C．$4,21$　　D．$-8,69$

【答案】B

【分析】本题考查的是一元二次方程的一般形式．要确定二次项系数，一次项系数和常数项，必须先把一元二次方程化成一般形式，根据完全平方公式、移项法则把原方程化为一般形式，根据题意列出方程，解方程得到答案．

【详解】解：$\left(x+a\right)^2=b$，

则$x^2+2ax+a^2=b$，

∴$x^2+2ax+a^2-b=0$，

由题意得：$2a=-8$，$a^2-b=-5$，

解得：$a=-4$，$b=21$，

故选：B．

巩固训练

6．（23-24八年级下·江苏南通·期末）一元二次方程$x^2+2x-3=0$的二次项系数、一次项系数和常数项分别是（　）

A．1，2，3　　B．0，2，-3　　C．0，-2，-3　　D．1，2，-3

【答案】D

【分析】本题考查一元二次方程的一般形式，解题关键在于将方程转化为一元一次方程的一般形式即可解答．将方程转化为一元一次方程的一般形式，然后找出方程的二次项系数、一次项系数及常数项即可．

【详解】解：方程$x^2+2x-3=0$的二次项系数、一次项系数、常数项分别是1，2，-3，

故选D

7．（2023·湖北孝感·一模）已知一元二次方程$\left(x-2\right)\left(x+3\right)=0$，将其化成二次项系数为正数的一般形式后，它的常数项是______．

【答案】-6

【分析】本题考查了一元二次方程的一般式，熟练掌握运算的法则是解题的关键．

先把化方程为一般式，从而得到常数项．

【详解】解：$\left(x-2\right)\left(x+3\right)=0$，

去括号，得$x^2+3x-2x-6=0$，

合并，得$x^2+x-6=0$，

所以常数项是-6．

故答案为：-6．

8．（23-24 八年级下·全国·假期作业）将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出二次项系数、一次项系数和常数项．

(1) $3x^2-1=2x$；

(2) $x(x-2)=4x^2-3x$；

(3)关于 x 的方程 $mx^2-nx+mx+nx^2=q-p(m+n\neq 0)$．

【答案】(1) $3x^2-2x-1=0$，二次项系数为 3，一次项系数为 -2，常数项为 -1

(2) $3x^2-x=0$，二次项系数为 3，一次项系数为 -1，常数项为 0

(3) $(m+n)x^2+(m-n)x+p-q=0$，二次项系数为 $(m+n)$，一次项系数为 $(m-n)$，常数项为 $(p-q)$

【分析】本题考查的是一元二次方程的一般形式，掌握一般形式是解本题的关键；

（1）先移项，把方程的右边化为 0，从而可得答案；

（2）先去括号，再移项，把方程的右边化为 0，从而可得答案；

（3）先移项，把方程的右边化为 0，从而可得答案；

【详解】（1）解：$3x^2-1=2x$

移项，得 $3x^2-2x-1=0$．

二次项系数为 3，一次项系数为 -2，常数项为 -1．

（2）$x(x-2)=4x^2-3x$，

去括号，得 $x^2-2x=4x^2-3x$；

移项、合并同类项，得 $-3x^2+x=0$，

整理，得 $3x^2-x=0$．

二次项系数为 3，一次项系数为 -1，常数项为 0．

（3）$mx^2-nx+mx+nx^2=q-p(m+n\neq 0)$

移项、合并同类项，得 $(m+n)x^2+(m-n)x+p-q=0$．

二次项系数为 $(m+n)$，一次项系数为 $(m-n)$，常数项为 $(p-q)$．

题型三　一元二次方程的解

例题：9．（23-24 八年级下·山东威海·期末）若 a，b，c 满足 $\begin{cases}a+b+c=0\\4a-2b+c=0\end{cases}$，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根的平方和是（　）

A．2　　　　B．3　　　　C．5　　　　D．8

【答案】C

【分析】本题考查一元二次方程的根，根据题意，得到方程的两个根为$x=1$和$x=-2$，进而求出两个根的平方和即可．

【详解】解：∵a，b，c满足$\begin{cases}a+b+c=0\\4a-2b+c=0\end{cases}$，

∴关于x的方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq0\right)$的两个根分别为$x=1$和$x=-2$，

∴$1^2+\left(-2\right)^2=5$；

故选C．

巩固训练

10．（23-24八年级下·河南郑州·期末）若关于x的一元二次方程$ax^2+bx+2=0\left(a\neq0\right)$有一根为$x=2024$，则一元二次方程$a\left(x-1\right)^2+b\left(x-1\right)+2=0$必有一根为（　）

A．2024　　B．2025　　C．2026　　D．2027

【答案】B

【分析】本题考查了一元二次方程根的定义，理解一元二次方程根的定义是解题的关键．根据一元二次方程根的定义，可得一元二次方程$a\left(x-1\right)^2+b\left(x-1\right)+2=0$中，$x-1=2024$满足该方程，进而即可求解．

【详解】解：设$u=x-1$，则一元二次方程$a\left(x-1\right)^2+b\left(x-1\right)+2=0$可化为，

$au^2+bu+2=0$，

Q 关于x的一元二次方程$ax^2+bx+2=0\left(a\neq0\right)$有一根为$x=2024$，

∴ 一元二次方程$au^2+bu+2=0$有一个根为$u=2024$，

则$u=x-1=2024$，即$x=2025$，

∴ 一元二次方程$a\left(x-1\right)^2+b\left(x-1\right)+2=0$必有一根为2025．

故选：B．

11．（23-24八年级下·浙江衢州·期中）若m是方程$4x^2-2x-7=0$的一个根，则代数式$m-2m^2+3$的值是____．

【答案】$-\frac{1}{2}$

【分析】本题考查了代数式求值，一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．

先根据一元二次方程解的定义得到$4m^2-2m-7=0$，则$2m^2-m=\frac{7}{2}$，再把$m-2m^2+3$变形为$-(2m^2-m)+3$，然后利用整体代入的方法计算.

【详解】解：$\because m$是方程$4x^2-2x-7=0$的一个根，

$\therefore 4m^2-2m-7=0$，

$\therefore 2m^2-m=\frac{7}{2}$，

$\therefore m-2m^2+3=-(2m^2-m)+3=-\frac{7}{2}+3=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

12．（23-24八年级下·浙江宁波·期末）已知关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，如果a，b，c满足$3a+2b+c=0$，我们就称这个一元二次方程为波浪方程.

(1)判断方程$2x^2-x-4=0$是否为波浪方程，并说明理由.

(2)已知关于x的波浪方程$ax^2-2x+c=0$的一个根是-1，求这个波浪方程.

【答案】(1)该方程是波浪方程

(2)$3x^2-2x-5=0$

【分析】本题主要考查了一元二次方程的解，理解题中所给波浪方程的定义及熟知一元二次方程解得定义是解题的关键.

（1）根据波浪方程的定义对所给方程进行判断即可.

（2）根据波浪方程的定义，结合方程的一个根为-1，得到关于a，c的方程组即可解决问题.

【详解】（1）解：$\because a=2$，$b=-1$，$c=-4$，

$\therefore 3a+2b+c=3\times2+2\times(-1)+(-4)=0$，

故该方程是波浪方程；

（2）解：由已知得：$\begin{cases}3a-4+c=0\\a+2+c=0\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=3\\c=-5\end{cases}$，

$\therefore$这个波浪方程为$3x^2-2x-5=0$.

题型四　用配方法解一元二次方程

例题：13.（23-24八年级下·安徽亳州·期末）解方程：$x^2-6x+2=5$.

【答案】$x_1=3+2\sqrt{3}$，$x_2=3-2\sqrt{3}$

【分析】本题考查了解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程的各种解法是解题的关键．利用配方法即可求解．

【详解】解：$x^2-6x+2=5$

配方得：$x^2-6x+9=12$

即$(x-3)^2=12$

∴ $x-3=2\sqrt{3}$或$-2\sqrt{3}$，

∴ $x_1=3+2\sqrt{3}$，$x_2=3-2\sqrt{3}$．

巩固训练

14．（23-24八年级下·山东济南·期末）用配方法解一元二次方程$x^2-6x-5=0$，配方正确的是（　）

A．$(x-3)^2=4$　　B．$(x-6)^2=14$

C．$(x-3)^2=14$　　D．$(x+3)^2=4$

【答案】C

【分析】本题考查解一元二次方程-配方法，解题的关键是熟练掌握完全平方公式．

方程移项变形后，利用完全平方公式化简得到结果，即可做出判断．

【详解】解：$x^2-6x-5=0$，

移项，得$x^2-6x=5$，

配方，得$x^2-6x+9=5+9$，

即$(x-3)^2=14$，

故选：C．

15．（23-24八年级下·浙江绍兴·期末）用配方法解方程$x^2-x-\frac{15}{4}=0$时，变形结果正确的是（　）

A．$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4$　B．$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$　C．$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=4$　D．$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{2}$

【答案】A

【分析】本题考查了配方法解一元二次方程，掌握配方法的步骤是解题的关键．根据配方法的步骤先把常数项移到等号的右边，再在等式两边同时加上一次项系数一半的平方，配成完全平方的形式，从而得出答案．

【详解】解：∵ $x^2-x-\frac{15}{4}=0$，

∴ $x^2-x=\frac{15}{4}$，

∴ $x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}+\frac{1}{4}$，

∴ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4$；

故选：A.

16．（23-24 八年级下·浙江衢州·期中）用配方法解一元二次方程 $x^2-6x+2=0$，下列配方正确的是（ ）

A．$(x+3)^2=11$　　B．$(x-3)^2=11$　　C．$(x+3)^2=7$　　D．$(x-3)^2=7$

【答案】D

【分析】本题主要考查用配方法解一元二次方程，将常数项移到方程的右边，两边都加上一次项系数一半的平方配成完全平方式后即可得.

【详解】$x^2-6x+2=0$

$x^2-6x=-2$

$x^2-6x+9=7$

$(x-3)^2=7$.

故选：D.

题型五　配方法的应用

例题：17．（23-24 九年级下·江苏南通·阶段练习）已知 $xy=-9$，则 $x^2+4x+y^2-4y+10$ 的最小值是（　　）

A．-2　　B．0　　C．2　　D．4

【答案】D

【分析】本题考查了配方法的应用．利用配方法对原式进行变形，再根据偶次方的运算计算出结果.

【详解】解：$x^2+4x+y^2-4y+10=(x+2)^2+(y-2)^2+2$

因为 $(x+2)^2\ge 0$，$(y-2)^2\ge 0$，

$xy=-9$，

所以当 $x=-3$，$y=3$ 时，

原式有最小值 4，

故选：D.

巩固训练

18.（23-24八年级下·浙江嘉兴·期末）已知关于x的多项式$ax^2-2bx+c\left(a\neq 0\right)$，当$x=a$时，该多项式的值为$c-a$，则多项式$a^2+b^2+3$的值可以是（　）

A．3.5　　B．3.25　　C．3　　D．2.75

【答案】A

【分析】本题考查了代数式及配方法，不等式及偶次方的非负性，熟练掌握知识点是解题的关键．先将$x=a$代入原式，可整理得$a^2=2b-1>0$，再代入到a^2+b^2+3，配方得$\left(b+1\right)^2+1$，进而求解即可．

【详解】∵当$x=a$时，该多项式的值为$c-a$，

∴$a^3-2ab+c=c-a$，

整理得$a^3-2ab+a=0$，即$a\left(a^2-2b+1\right)=0$

∵$a\neq 0$，

∴$a^2-2b+1=0$，即$a^2=2b-1>0$，

∴$b>\frac{1}{2}$，

∴$a^2+b^2+3=b^2+2b-1+3=\left(b+1\right)^2+1>3.25$，

四个选项中，只有A符合，

故选：A．

19.（23-24八年级下·浙江宁波·期中）代数式x^2-4x+5的值恒为（　）

A．正数　　B．负数　　C．非正数　　D．非负数

【答案】A

【分析】本题主要考查了完全平方公式的应用，熟练掌握完全平方公式是解题关键．将原式整理为$\left(x+2\right)^2+1$，即可获得答案．

【详解】解：∵$x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=\left(x+2\right)^2+1$，

又∵$\left(x+2\right)^2\geq 0$，

∴$x^2-4x+5=\left(x+2\right)^2+1>0$，

∴代数式x^2-4x+5的值恒为正数．

故选：A．

20.（23-24八年级下·浙江宁波·期末）已知实数 x,y 满足 $4x^2-x+4xy+y^2=1$ ，设 $M=x+y$ ，则 M

的最大值是 （ ）

A．$\frac{7}{5}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{19}{16}$　　D．1

【答案】B

【分析】根据$4x^2-x+4xy+y^2=1$，可以得到$(2x+y)^2=x+1$，然后可以得到$2x+y=\pm\sqrt{x+1}$，进而得到$x+y=\pm\sqrt{x+1}-x$，再设$\sqrt{x+1}=a$，即可得到$x+y=\pm a-(a^2-1)=-(a\pm\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$，然后即可写出$x+y$的最大值，从而可以得到$M$的最大值．本题考查配方法的应用、非负数的性质，解答本题的关键是明确题意，求出M的最大值．

【详解】解：$\because 4x^2-x+4xy+y^2=1$，

$\therefore (2x+y)^2=x+1$，

$\therefore 2x+y=\pm\sqrt{x+1}$，

$\therefore x+y=\pm\sqrt{x+1}-x$，

设$\sqrt{x+1}=a$，则$x=a^2-1$，

则$x+y=\pm a-(a^2-1)=-(a\pm\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$，

$\therefore x+y$的最大值为$\frac{5}{4}$，

即M的最大值为$\frac{5}{4}$，

故选：B．

21．（2024八年级下·浙江·专题练习）用配方法说明，无论x取何值，代数式$-2x^2+8x-12$的值总小于0．

【答案】见解析

【分析】本题主要考查配方的应用，将$-2x^2+8x-12$配方，先把二次项系数化为1，然后再加上一次项系数一半的平方，然后根据配方后的形式，再根据$a^2\ge 0$这一性质即可证得．

【详解】证明：$-2x^2+8x-12=-2(x^2-4x)-12=-2(x^2-4x+4)+8-12=-2(x-2)^2-4$，

$\because (x-2)^2\ge 0$，

$\therefore -2(x-2)^2\le 0$，

$\therefore -2(x-2)^2-4<0$，

$\therefore$无论x为何实数，代数式$-2x^2+8x-12$的值总小于零．

22．（23-24八年级下·广西梧州·期中）先阅读下面内容，再解决问题：

若关于m、n的方程$m^2+2m+n^2-6n+10=0$，求m、n的值．

解；因为$m^2+2m+n^2-6n+10=0$

所以$m^2+2m+n^2-6n+1+9=0$

所以$m^2+2\,m+1+n^2-6n+9=0$

即$(m+1)^2+(n-3)^2=0$

所以$(m+1)^2=0$，$(n-3)^2=0$

所以$m+1=0$，$n-3=0$

解得$m=-1$，$n=3$

(1)模仿阅读内容解关于x、y的方程，已知$x^2+4x+y^2-2y+5=0$，求x、y的值；

(2)若a、b是方程$a^2-8a+b^2+4b+20=0$的解，求关于x的一次函数$y=ax+b$图象与坐标轴交点所围成的三角形的面积．

【答案】(1)$x=-2$，$y=1$

(2)$\frac{1}{2}$

【分析】本题考查了配方法的应用，一次函数的性质，解题的关键是熟练掌握配方法和一次函数的性质．

（1）根据题意把方程进行配方即可求解；

（2）先根据配方法求出a、b，进而得到一次函数的解析式，再求出一次函数与坐标轴的交点坐标，最后利用三角形面积公式求解即可．

【详解】（1）解：$\because x^2+4x+y^2-2y+5=0$

$\therefore x^2+4x+y^2-2y+1+4=0$

$\therefore x^2+4x+4+y^2-2y+1=0$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=0$

即$(x+2)^2=0$，$(y-1)^2=0$

$\therefore x+2=0$，$y-1=0$

解得：$x=-2$，$y=1$；

（2）$\because a^2-8a+b^2+4b+20=0$

$\therefore a^2-8a+b^2+4b+16+4=0$

$\therefore a^2-8a+16+b^2+4b+4=0$

即$\left(a^2-8a+16\right)+\left(b^2+4b+4\right)=0$

$\therefore (a-4)^2+(b+2)^2=0$

$\therefore a-4=0$，$b+2=0$

解得$a=4$，$b=-2$

将$a=4$，$b=-2$代入一次函数$y=ax+b$，得$y=4x-2$，

令$x=0$，则$y=0-2=-2$；令$y=0$，则$4x-2=0$，解得$x=\frac{1}{2}$；

$\therefore$该函数与x轴的交点为$\left(\frac{1}{2},0\right)$，于$y$轴的交点为$(0,-2)$

$\therefore$一次函数$y=4x-2$的图像与坐标轴交点所围成的三角形的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{2}$.

题型六　用公式法解一元二次方程

例题：23.（23-24八年级下·黑龙江哈尔滨·期末）解方程：$2x^2-x+2=3x+1$.

【答案】$x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

【分析】本题考查解一元二次方程，先将所给一元二次方程化成一般形式，再利用公式法求解.

【详解】解：$2x^2-x+2=3x+1$，

$2x^2-4x+1=0$，

$a=2$，$b=-4$，$c=1$，

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times1=8>0.$

方程有两个不等的实数根，

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{8}}{2\times2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$,

即$x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

巩固训练

24.（24-25九年级上·安徽·假期作业）用求根公式解一元二次方程$5x^2-1=4x$时a，b，c的值是（　）

A．$a=5$，$b=-1$，$c=-4$　　B．$a=5$，$b=-4$，$c=1$

C．$a=5$，$b=-4$，$c=-1$　　D．$a=5$，$b=4$，$c=1$

【答案】C

【分析】本题主要考查解一元二次方程的一般形式，认知一次项系数二次项系数常数项是解题的关键．按照未知数 x 的降幂排列，据此可得答案．

【详解】解：$\because 5x^2-1-4x=0$，

$\therefore 5x^2-4x-1=0$，

则 $a=5$， $b=-4$， $c=-1$，

故选：C

25．（23-24 八年级下·浙江湖州·期末）在用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求一元二次方程的根时，小珺正确地代入了 a，b，c 得到 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$，则她求解的一元二次方程是（　）

A． $2x^2-3x-1=0$　　B． $2x^2+4x-1=0$

C． $-x^2-3x+2=0$　　D． $3x^2-2x+1=0$

【答案】A

【分析】本题主要考查了一元二次方程的解，解题的关键是掌握求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 中字母所表示的意义．根据求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 解答．

【详解】解：由 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$ 知： $a=2$， $b=-3$， $c=-1$．

所以该一元二次方程为： $2x^2-3x-1=0$．

故选：A．

26．（2024·浙江金华·二模）设关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$，已知①$b=2$， $c=1$；②$b=-2$， $c=-3$；③$b=1$， $c=2$．请在上述三组条件中选择其中一组 b， c 的值，使这个方程有两个实数根，并解这个方程．

【答案】若选①，则方程的解为 $x_1=x_2=-1$；若选②，则方程的解为 $x_1=3$，$x_2=-1$

【分析】本题考查了解一元二次方程，一元二次方程根的判别式，根据题意解一元二次方程，即可求解．

【详解】解：①当 $b=2$， $c=1$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=4-4=0$，

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2\pm0}{2}$

解得： $x_1=x_2=-1$；

②$b=-2$， $c=-3$；

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$

∴ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm4}{2}$

解得：$x_1=3$，$x_2=-1$；

③$b=1$，$c=2$．

$\Delta=b^2-4ac=1-8=-7<0$，原方程无解．

题型七　用根的判别式判断根的情况

例题：27．（23-24 八年级下·广东广州·期末）方程$x^2-4=0$的根的情况是（　）

A．没有实数根　　B．有两个相等的实数根

C．有两个不相等的实数根　　D．只有一个实数根

【答案】C

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式．利用一元二次方程根的判别式，即可求解．

【详解】解：∵ $\Delta=b^2-4ac=0-4\times1\times(-4)=16>0$，

∴方程有两个不相等的实数根，

故选：C

巩固训练

28．（2024·河南驻马店·三模）下列一元二次方程中，有两个不相等的实数根的是（　）

A．$x^2-2x+3=0$　　B．$x^2+6x+9=0$

C．$4x^2-3x-2=0$　　D．$3x^2-x+2=0$

【答案】C

【分析】本题主要考查根的判别式．分别求出每个方程判别式的值，根据判别式的值与方程的解的个数间的关系得出答案．

【详解】解：A、Q $\Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$，

∴方程没有实数根，不符合题意；

B、Q $\Delta=6^2-4\times1\times9=0$，

∴方程有两个相等的实数根，不符合题意；

C、Q $\Delta=(-3)^2-4\times4\times(-2)=41>0$，

∴方程有两个不相等的实数根，符合题意；

D、Q $\Delta=(-1)^2-4\times3\times2=-23<0$，

∴方程没有实数根，不符合题意；

故选：C．

题型八　根据根的判别式求字母的值

例题：29．（23-24八年级下·安徽合肥·期中）已知：关于x的一元二次方程$x^2+(2k+1)x+k-1=0$．

(1)若$x=1$是方程的一个根，求k的值；

(2)求证：方程有两个不相等的实数根．

【答案】(1)$-\frac{1}{3}$(2)见解析

【分析】本题考查了根的判别式：一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根与$\Delta=b^2-4ac$有如下关系：当$\Delta>0$时，方程有两个不相等的实数根；当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根；当$\Delta<0$时，方程无实数根．

（1）把$x=1$代入一元二次方程得到关于k的一次方程，然后解一次方程即可；

（2）先计算根的判别式的值得到$\Delta=4k^2+5$，则可判断$\Delta>0$，然后根据根的判别式的意义得到结论．

【详解】（1）解：把$x=1$代入$x^2+(2k+1)x+k-1=0$得$1+2k+1+k-1=0$，

解得$k=-\frac{1}{3}$；

（2）证明：$\because \Delta=(2k+1)^2-4(k-1)$

$=4k^2+4k+1-4k+4$

$=4k^2+5>0$，

$\therefore$方程有两个不相等的实数根．

巩固训练

30．（23-24八年级下·广西梧州·期中）关于x的一元二次方程$x^2+mx-2(m+3)=0$的根情况是（　）

A．有两个相等的实数根　　　　B．有两个不相等的实数根

C．没有实数根　　　　D．实数根的个数由m的值确定

【答案】B

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式，配方法，熟记判别式并灵活应用是解题关键．先确定a、b、c的值，计算$\Delta=b^2-4ac$的值进行判断即可求解．

【详解】由题意可知：$a=1$，$b=m$，$c=-2(m+3)=-2m-6$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=m^2-4\times1\times(-2m-6)=(m+4)^2+8\geq 8$

$\therefore$方程有两个不相等的实数根．

故选：B．

31．（23-24八年级下·安徽合肥·阶段练习）关于x的一元二次方程$\frac{1}{8}x^2+(2\text{m}-1)x-2=0$的根的判别式等于2

，则 m 的值是（　　）

A． 4　　B． -4　　C． 0　　D． 0 或1

【答案】D

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式，利用根的判别式的定义得到 $(2\mathrm{m}-1)^2-4\times\frac{1}{8}\times(-2)=2$，然后解关于 m 的方程即可．解题的关键是掌握：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$． 也考查了解一元二次方程．

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $\frac{1}{8}x^2+(2\mathrm{m}-1)x-2=0$ 的根的判别式等于 2，

∴ $(2\mathrm{m}-1)^2-4\times\frac{1}{8}\times(-2)=2$，

整理，得：$(2\mathrm{m}-1)^2=1$，

解得：$m_1=1$，$m_2=0$，

即 m 的值为 0 或 1．

故选：D．

32．（23-24 八年级下·安徽滁州·期末）已知关于 x 的方程 $x^2-2mx+m^2-3=0$．

(1)判断此方程根的情况；

(2)若 $x=-2$ 是该方程的一个根，求代数式 $-2m^2-8m-3$ 的值．

【答案】(1)方程有两个不相等的实数根(2) -1

【分析】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的解，熟练掌握"当根的判别式 $\Delta>0$ 时方程有两个不相等的实数根"是解题的关键．

（1）根据方程的系数结合根的判别式即可得出 $\Delta=12>0$， 由此得出方程有两个不相等的实数根；

（2）将 $x=2$ 代入原方程可求出 $m^2-8m=-15$， 将其代入代数式 $-m^2+8m-3$ 中即可得出结论．

【详解】（1） 解：Q $\Delta=(-2m)^2-4\times1\times(m^2-3)=12>0$，

∴ 方程有两个不相等的实数根；

（2） 解：将 $x=-2$ 代入方程，得 $4+4m+m^2-3=0$， 即 $m^2+4m=-1$，

$\therefore -2m^2-8m=2$，

$\therefore -2m^2-8m-3=2-3=-1$．

33．（2024·甘肃金昌·三模）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+2k-1=0$．

(1)当 $k=1$ 时，求方程的解；

(2)若该方程有实数根，求k的取值范围.

【答案】(1)$x_1=x_2=1$(2)$k\le 1$

【分析】本题考查解一元二次方程，一元二次方程跟的判别式.

（1）利用配方法解方程即可；

（2）根据一元二次方程跟的判别式$\Delta\ge 0$，列出不等式求解即可.

【详解】（1）解：当$k=1$时，原方程可化为$x^2-2x+1=0$，

配方，得$(x-1)^2=0$，

解得$x_1=x_2=1$；

（2）解：∵该方程有实数根，

∴$(-2)^2-4\times 1\times\left(2k-1\right)\ge 0$，

解得$k\le 1$，

即若该方程有实数根，k的取值范围是$k\le 1$.

34.（2024·辽宁朝阳·三模）关于x的一元二次方程$mx^2-2x-1=0$有两个不相等的实数根，则m的最小整数值是（　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

【答案】D

【分析】本题考查一元二次方程的根的存在性，熟练掌握利用判别式确定一元二次方程的根的存在性是解题的关键.

【详解】解：∵关于x的一元二次方程$mx^2-2x-1=0$有两个不相等的实数根，

$\therefore\Delta=\left(-2\right)^2-4m\times\left(-1\right)>0$，

解得$m>-1$，

∵$mx^2-2x-1=0$是关于x的一元二次方程，

$\therefore m\ne 0$，

$\therefore m$的最小整数值为1.

故选：D.

35.（23-24八年级下·浙江绍兴·期末）若方程$x^2-4x+c=0$有两个相等的实数根，则c的值是（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

【答案】C