江苏省镇江市、南京市联盟校2023-2024学年高一下学期5月学情调查数学试题

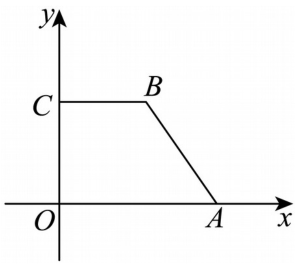
学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．向量$\vec{a}=(\cos 20°,\sin 20°)$与$\vec{b}=(\cos 10°,\sin 10°)$的夹角为（　）

A．$10°$　　B．$20°$　　C．$30°$　　D．$40°$

2．如图所示直角梯形$OABC$上下两底分别为2和4，高为$2\sqrt{2}$，则利用斜二测画法所得其直观图的面积为（　　）



A．2　　B．3

C．4　　D．6

3．已知$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则$\sin 2\alpha=$（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$-\frac{1}{5}$

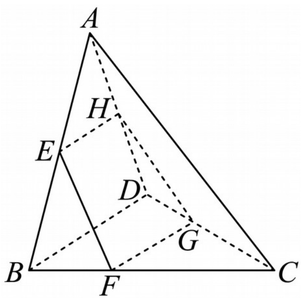
4．已知m，n表示两条不同的直线，α表示平面．下列说法正确的是（　）

A．若$m \parallel \alpha$，$n /\!/ \alpha$，则$m /\!/ n$　　B．若$m \perp \alpha$，$n \perp \alpha$，则$m /\!/ n$

C．若$m \perp \alpha$，$m \perp n$，则$n /\!/ \alpha$　　D．若$m \parallel \alpha$，$m \perp n$，则$n \perp \alpha$

5．如图所示，在空间四边形$ABCD$中，点E，H分别是边AB，AD的中点，点F，G分

别是边BC，CD上的点，且$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，则下列说法正确的个数为（　）



①E，F，G，H四点共面；

②$EF//$平面ADC；

③EF与GH的交点M一定在直线AC上.

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

6．在平行四边形$ABCD$中，已知$AB=4$，$AD=2$，$A=60^{\circ}$，点P在CD边上，满足

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=4$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=$（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　　　B．0　　　　C．-1　　　　D．1

7．若$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}\cos 2\theta$，则$\tan 2\theta=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{9}{2}$　　　　C．5　　　　D．$\frac{4}{3}$

8．以P为顶点，圆O为底面的圆锥中，轴截面PAB为等边三角形，M为底面圆O上一点，

$\angle AOM=60^{\circ}$，则异面直线OM与AP所成角的余弦值为（　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{8}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

二、多选题

9．已知向量$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(\lambda,1)$，则下列说法中正确的是（　）

A．若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\lambda=\frac{1}{2}$

B．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\lambda=2$

C．若$\lambda<2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角

D．当$\lambda=1$时，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量的坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

10．设z_1,z_2为复数，则下列结论中正确的是（　）

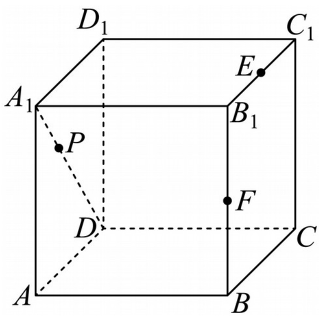
A．若$\frac{1}{z_1}$为虚数，则z_1也为虚数

B．若$|z_1+\mathrm{i}|=1$，则$|z_1|$的最大值为$\sqrt{2}$

C．$|z_1z_2|=|z_1\overline{z_2}|$

D．$|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$

11．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱B_1C_1，BB_1的中点，P为线段A_1D上的动点，则（　）



A．对任意的点P，总有$EF \perp B_1P$

B．对任意的点P，总有PE与CC_1是异面直线

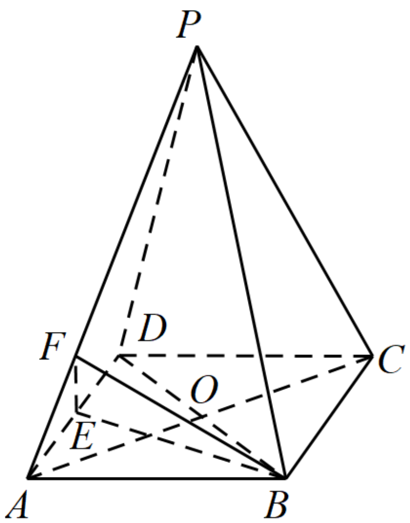
C．过点E，F，D的平面截该立方体的截面形状是四边形

D．异面直线PF与AB所成角的正切值的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

三、填空题

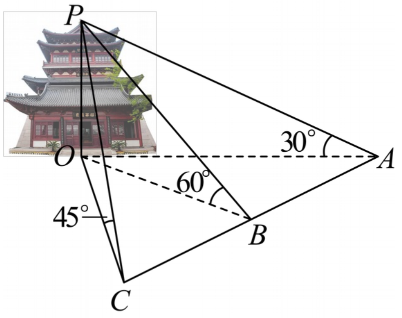
12．已知复数z满足$z\mathrm{i}^{2023}=1+\mathrm{i}$，其中$\mathrm{i}$是虚数单位，则$|z|=$______.

13．如图，已知四棱锥$P-ABCD$的底面是平行四边形，E为AD的中点，F在PA上，$AP=\lambda AF$，若PC//平面BEF，则λ的值为_____.



14．镇江西津渡的云台阁，是一座宋元风格的仿古建筑，始建于2010年，目前已成为镇江市的地标建筑之一.如图，在云台阁旁水平地面上共线的三点A，B，C处测得其顶点P的仰

角分别为30°，60°，45°，且$AB=BC=40$米，则云台阁的高度为____米.



四、解答题

15．已知复数z在复平面上对应点在第四象限，且$|z|=\sqrt{2}$，z^2的虚部为-2.

(1)求复数z；

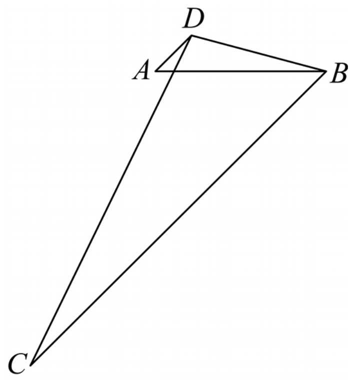
(2)设复数z、$\bar{z}$、z^2在复平面上对应点分别为A、B、C，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值.

16．已知锐角α,β满足$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(1)求$\sin(2\alpha-\beta)$的值；

(2)求$\alpha+\beta$的大小.

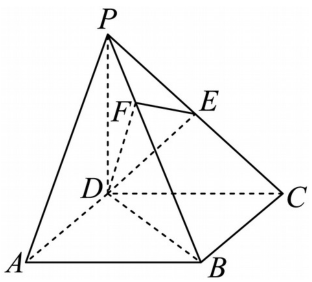
17．如图，某海域的东西方向上分别有A，B两个观测塔，它们相距$5\sqrt{6}$海里，现A观测塔发现有一艘轮船在D点发出求救信号，经观测得知D点位于A点北偏东45，同时B观测塔也发现了求救信号，经观测D点位于B点北偏西75，这时位于B点南偏西45且与B相距30海里的C点有一救援船，其航行速度为30海里/小时.



(1)求 B 点到 D 点的距离；

(2)若命令 C 处的救援船立即前往 D 点营救，救援船能否在 1 小时内到达救援地点？请说明理由.（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$，$\sqrt{7}\approx2.65$）

18．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，且 $PD=CD$，点 E 为棱 PC 的中点，点 F 为棱 PB 上一点.



(1)若点 F 为 PB 中点，求证：$EF//$ 平面 PAD；

(2)若点 F 满足 $EF\perp PB$，

（i）求证：$DF\perp PB$；

（ii）求直线 PD 与平面 DEF 所成角的正切值.

19．对于数集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$n\geq2$，定义向量集 $Y=\{\vec{a}|\vec{a}=(s,t),s\in X,t\in X\}$，若对任

意$\overrightarrow{a_1}\in Y$，存在$\overrightarrow{a_2}\in Y$使得$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$，则称$X$是“对称的”.

(1)判断以下三个数集$\{-2,2\}$、$\{-1,1,2\}$、$\{1,2,4\}$是否是“对称的”（不需要说明理由）；

(2)若$x>3$，且$X=\{-1,1,3,x\}$是“对称的”，求x的值；

(3)若“对称的”数集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$n\geq 3$满足：$x_1=-1$，$0<x_2<x_3<\cdots<x_n$，$x_n>1$.

求证：$x_2=1$.

参考答案：

1．A

【分析】根据向量的坐标运算求解.

【详解】因为$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos 20^\circ\cos 10^\circ+\sin 20^\circ\sin 10^\circ=\cos\left(20^\circ-10^\circ\right)=\cos 10^\circ$，

则$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\cos 10^\circ}{1\times 1}=\cos 10^\circ$，且$0^\circ\le\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\le 180^\circ$，

所以$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=10^\circ$.

故选：A.

2．B

【分析】根据题意，由梯形面积公式求出原图的面积，结合原图与直观图面积的关系，分析即可得出结果.

【详解】根据题意，原图直角梯形$OABC$中，上下两底分别为2和4，高为$2\sqrt{2}$，

其面积$S=\frac{2+4}{2}\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，

则其直观图的面积$S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S=3$.

故选：B.

3．D

【分析】利用降幂公式和诱导公式化简可得答案.

【详解】$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{2}=\frac{3}{5}$，解得：$\sin 2\alpha=-\frac{1}{5}$，

故选：D

4．B

【分析】根据空间直线与平面间的位置关系判断.

【详解】对于A，若$m\parallel\alpha$，$n/\!/\alpha$，则m与n相交、平行或异面，故A错误；

对于B，若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，由线面垂直的性质定理得$m/\!/n$，故B正确；

对于C，若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n/\!/\alpha$或$n\subset\alpha$，故C错误；

对于D，若$m\parallel\alpha$，$m\perp n$，则n与α相交、平行或$n\subset\alpha$，故D错误.

故选：B.

5．C

【分析】利用平面几何的性质及平行公理可得$FG//EH$，且四边形$EFGH$为梯形，结合公理可得答案.

【详解】依题意，可得$EH//BD$，$FG//BD$，故$FG//EH$，所以E，F，G，H四点共面，故①正确；

因为$EH=\frac{1}{2}BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$，所以四边形$EFGH$为梯形，EF与GH必相交，设交点M，

所以EF不平行平面ADC，故②错误；

因为点M在EF上，故点M在平面ACB，同理，点M在平面ADC上，

所以点M是平面ABC与平面ADC的交点，

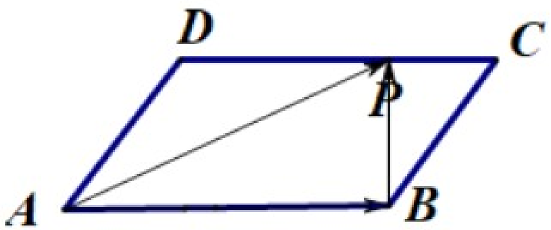
又AC是平面ABC与平面ADC的交线，所以EF与GH的交点M一定在直线AC上，故③正确；

故选：C

6．B

【分析】根据题意，由向量的线性运算法则将$\overline{AP}$用$\overline{AB}$和$\overline{AD}$，由向量数量积的公式运算求出P的位置，从而可得答案。

【详解】作出图形



设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}\ (0\le\lambda\le1)$，由图可得：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AB}^2=4$

因为在平行四边形$ABCD$中，已知$AB=4$，$AD=2$，$A=60^\circ$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times4\times\cos60^\circ+16\lambda=4$，解得$\lambda=0$，则点$P$在$D$点，

所以$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=4-4=0$,

故选：B

7．D

【分析】先利用三角恒等变换化简整理可得$\sin2\theta=1-\frac{1}{3}\cos2\theta$，然后利用同角三角函数的

基本关系求得$\cos2\theta$，进而得$\sin2\theta$，从而由$\tan2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}$可得结果.

【详解】$\sin\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}\cos2\theta$，

化简得$\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{3}\cos2\theta$，即$\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1-\cos2\theta}{2}=\frac{1}{3}\cos2\theta$，

整理得$\sin 2\theta = 1-\frac{1}{3}\cos 2\theta$.

因为$(\sin 2\theta)^2+(\cos 2\theta)^2=1$，所以$\left(1-\frac{1}{3}\cos 2\theta\right)^2+(\cos 2\theta)^2=1$.

整理得$\cos 2\theta\left(\frac{10}{9}\cos 2\theta-\frac{2}{3}\right)=0$，又$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，即$2\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\frac{10}{9}\cos 2\theta-\frac{2}{3}=0$，即$\cos 2\theta=\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}=\frac{3}{5}$，进而$\sin 2\theta=1-\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$，

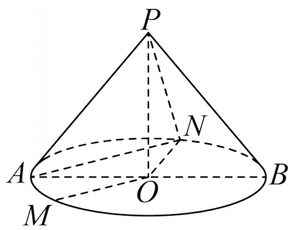
于是$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{4}{3}$.

故选：D.

8．D

【分析】首先得出异面直线OM与AP所成角即为$\angle PAN$（或其补角），在$\triangle APN$中利用余弦定理求解即可.

【详解】



如图，过点A作$AN \parallel OM$，交圆O于点N，连接ON，PN，

则$\angle PAN$即异面直线OM与AP所成角或其补角，

设 $AO=ON=1$,可知$\angle OAN=\angle ONA=60^\circ$，

则$AN=1$，

因为轴截面PAB为等边三角形，所以$PA=PN=2$，

在$\triangle APN$中，由余弦定理得，

$\cos\angle PAN=\dfrac{PA^2+AN^2-PN^2}{2PA\cdot AN}=\dfrac{4+1-4}{2\times2\times1}=\dfrac{1}{4}$，

所以异面直线OM与AP所成角的余弦值为$\dfrac{1}{4}$.

故选：D.

9．BD

【分析】根据向量平行垂直的坐标表示求λ判断A、B选项；对C，用向量反向共线说明不成立；对D，直接计算投影向量即可.

【详解】向量$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(\lambda,1)$，

对于A，由$\vec{a}//\vec{b}$，得$-2\lambda=1$，解得$\lambda=-\dfrac{1}{2}$，A错误；

对于B，由$\vec{a}\perp\vec{b}$，得$\lambda-2=0$，解得$\lambda=2$，B正确；

对于C，当$\lambda=-\dfrac{1}{2}<2$时，反向共线，夹角为π，此时$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角不为钝角，C错误；

对于D，当$\lambda=1$时，$\vec{b}=(1,1)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+(-2)\times1=-1,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

因此$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，D正确.

故选：BD

10．ACD

【分析】对于A，由$\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{\overline{z_1}}{z_1\cdot\overline{z_1}}$为虚数，得$\overline{z_1}$为虚数，从而可判断A，对于B，由$z_1=-2\mathrm{i}$