第 14 章 勾股定理 单元提优小测

一、单选题

1．三角形的三边长分别为 a，b，c，且满足 $a^4-b^4+b^2c^2-a^2c^2=0$，则该三角形的形状是（　　）

A．任意等腰三角形　　　　B．等腰直角三角形

C．等腰三角形或直角三角形　　　　D．任意直角三角形

【答案】C

【分析】把所给的等式 $a^4-b^4+b^2c^2-a^2c^2=0$ 进行因式分解，求出三角形三边的关系，进而判断三角形的形状.

【详解】解：∵ $a^4-b^4+b^2c^2-a^2c^2=0$，

∴ $\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)-c^2\left(a^2-b^2\right)=0$，

∴ $\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a+b\right)\left(a-b\right)=0$，

∵已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，

∴ $abc\neq 0$，

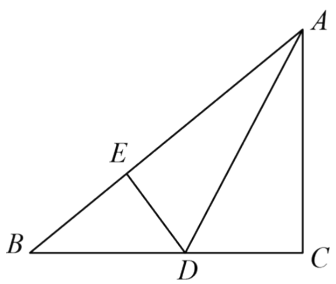
∴ $a^2+b^2-c^2$=0，或 $a-b=0$，即 $a^2+b^2=c^2$，或 $a=b$，

∴ $\triangle ABC$ 的形状为等腰三角形或直角三角形，

故选 C.

【点睛】本题考查了分组分解法分解因式，勾股定理的逆定理，等腰三角形的判定等等，利用因式分解最后整理成多项式的乘积等于 0 的形式是解题的关键.

2．如图，△*ABC* 中，∠*C*=90°，*AD* 平分∠*BAC* 交 *BC* 于点 *D*，*DE*⊥*AB* 于 *E*，若 *AB*=10cm，*AC*=6cm，则△*BED* 周长为（　　）



A．10cm　　　　B．12cm　　　　C．14cm.　　　　D．16cm

【答案】B

【分析】根据平分线的性质得出 $DC=DE$，由 HL 定理证明 $Rt\triangle ACD\cong Rt\triangle AED$，得出 $AE=AC=6\text{cm}$，即可求出 BE，由勾股定理算出 BC，

$C_{\triangle BED}=BE+BD+DE=BE+BD+DC=BE+BC$，计算即可得出答案.

【详解】∵ $\angle C=90°$，$DE\perp AB$，AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore DC=DE$，

在 $Rt\triangle ACD$ 与 $Rt\triangle AED$ 中，

$$\begin{cases} DC = DE \\ AD = AD \end{cases},$$

$Rt\triangle ACD \cong Rt\triangle AED(HL)$，

$\therefore AE = AC = 6\text{cm}$，

$\because AB = 10\text{cm}$，

$\therefore BE=10-6=4(\text{cm})$，

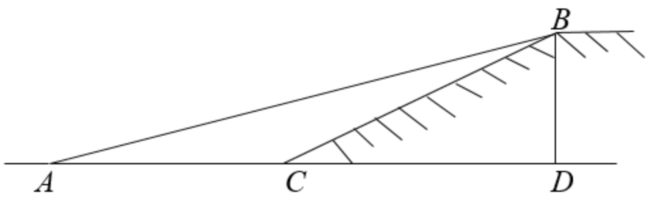
在 $Rt\triangle ACB$ 中，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8(\text{cm})$，

$\therefore C_{\triangle BED}=BE+BD+DE=BE+BD+DC=BE+BC=4+8=12(\text{cm})$.

故选：B.

【点睛】本题考查角平分线的性质、全等三角形的判定与性质以及勾股定理，掌握相关知识点是解题的关键.

3．如图，斜坡 BC 的长度为 4 米．为了安全，决定降低坡度，将点 C 沿水平距离向外移动 4 米到点 A，使得斜坡 AB 的长度为 $4\sqrt{3}$ 米，则原来斜坡的水平距离 CD 的长度是（　　）米．



A．2　　　　B．4　　　　C．$2\sqrt{3}$　　　　D．6

【答案】A

【分析】设 $CD=x$ 米，$BD=y$ 米，根据勾股定理用含 x 的代数式表示 y，进而列出方程，解方程得到答案.

【详解】解：设 $CD=x$ 米，$BD=y$ 米，

在 $Rt\triangle BCD$ 中，$BD^2=BC^2-CD^2$，即 $y^2=4^2-x^2$，

在 $Rt\triangle BAD$ 中，$BD^2=AB^2-AD^2$，即 $y^2=(4\sqrt{3})^2-(x+4)^2$，

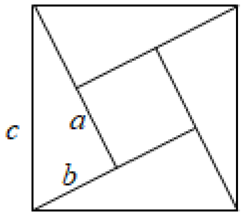
$\therefore 4^2-x^2=(4\sqrt{3})^2-(x+4)^2$，

解得：$x=2$，即 $CD=2$ 米，

故选：A.

【点睛】本题考查的是勾股定理的应用，解题的关键是灵活运用勾股定理列出方程.

4．如图是由 4 个全等的直角三角形与 1 个小正方形拼成的正方形图案．已知大正方形面积为 25，小正方形面积为 1，若用 a、b 表示直角三角形的两直角边（$a>b$），则下列说法：①$a^2+b^2=25$，②$a-b=1$，③$ab=12$，④$a+b=7$．正确的是（　　）



A．①②　　　　　B．①②③　　　　　C．①②④　　　　　D．①②③④

【答案】D

【分析】由大的正方形的边长为c，结合勾股定理可判断①，由小的正方形的边长为$a-b$，结合小正方形的面积可判断②，再利用$a^2-2ab+b^2=1$，结合$a^2+b^2=25$，可判断③，再由$a^2+2ab+b^2=25+24$，可判断④，从而可得答案．

【详解】解：由题意得：大正方形的边长为c，

$\therefore\ a^2+b^2=c^2=25$，故①符合题意；

用 a、b 表示直角三角形的两直角边（$a>b$），则小正方形的边长为：$a-b$，

$\therefore (a-b)^2=1$，则$a-b=1$（负值不合题意舍去）故②符合题意；

$\because (a-b)^2=1$，

$\therefore a^2-2ab+b^2=1$，而$a^2+b^2=25$，

$\therefore 25-2ab=1$，

$\therefore ab=12$，故③符合题意；

$\because a^2+b^2=25$，

$\therefore a^2+2ab+b^2=25+24$，

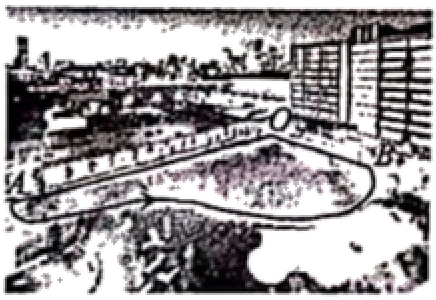
$\therefore (a+b)^2=49$，

$\therefore a+b=7$（负值不合题意舍去）故④符合题意；

故选 D

【点睛】本题考查的是以勾股定理为背景的几何面积问题，同时考查了完全平方公式的应用，熟练的应用完全平方公式的变形求值是解本题的关键．

5．近年来，作为规模较小的城市绿色敞开空间，口袋公园改善了城市生态环境，方便了市民健身休闲．如图，某口袋公园内有两条互相垂直的道路 OA，OB，若 OA 长 40m，OB 长 20m，当小明从 A 点沿公园内小路（图中箭头所示路线）走到 B 点时，小明所走的路程可能是（　　）



A．35m　　　　　　B．42m　　　　　　C．44m　　　　　　D．52m

【答案】D

【分析】根据两点之间线段最短，即可得到所走的最短距离即为 *AB* 的长，然后利用勾股定理求解判断即可

【详解】解：∵两点之间线段最短，

∴小明从 *A* 点沿公园内小路（图中箭头所示路线）走到 *B* 点时的最短距离即为 *AB* 的长，

∵ *OA*⊥*OB*，*OA*=40m，*OB*=20m，

∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=20\sqrt{5}\text{m}$，

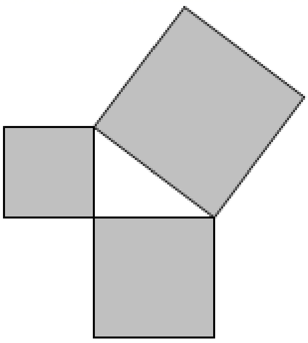
∵ $35^2<42^2<44^2<AB^2=2500<52^2$，

∴小明所走的路程可能为 52m，

故选 D．

【点睛】本题主要考查了勾股定理，两点之间线段最短，实数比较大小，解题的关键在于能够熟练掌握勾股定理．

6．如图是用三块正方形纸片以顶点相连的方式设计的“毕达哥拉斯”图案．现有五种正方形纸片，面积分别是 2，3，4，5，6，选取其中三块（可重复选取）按图的方式组成图案，使所围成的三角形是面积最大的直角三角形，则选取的三块纸片的面积分别是（　　）



A．2，4，6　　　　　B．2，3，5　　　　　C．3，3，6　　　　　D．2，2，4

【答案】C

【分析】根据题意可知，三块正方形的面积中，两个较小的面积之和等于最大的面积，再根据三角形的面积，分别计算出各个选项中围成的直角三角形的面积，比较大小，即可解答本题．

【详解】解：当选取的三块纸片的面积分别是 2，3，5 时，围成的直角三角形的面积是 $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

当选取的三块纸片的面积分别是 2，4，6 时，围成的直角三角形的面积是 $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{4}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}$；

当选取的三块纸片的面积分别是 3，3，6 时，围成的三角形面积是 $\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}$；

当选取的三块纸片的面积分别是 2，2，4 时，围成的直角三角形的面积是 $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}$，

∵ $\frac{\sqrt{4}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{2}<\frac{\sqrt{8}}{2}<\frac{\sqrt{9}}{2}$，

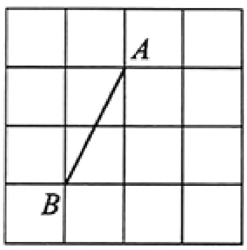
因为当选取 2，3，4；2，3，6；3，4，5；4，5，6；四种情况时，都不能构成直角三角形，

∴要使所围成的三角形是面积最大的直角三角形，则选取的三块纸片的面积分别是 3，3，6.

故选：C.

【点睛】本题考查勾股定理的逆定理，解答本题的关键是明确题意，利用勾股定理的逆定理解答.

7．如图，在 4×4 的正方形网格中有两个格点 A，B，连接 AB，在网格中再找一个格点 C，使得△ABC 是等腰直角三角形，则满足条件的格点 C 的个数是（　　）



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】C

【分析】根据题意，结合图形，分两种情况讨论：①AB 为等腰直角△ABC 底边；②AB 为等腰直角△ABC 其中的一条腰.

【详解】解：如图：分情况讨论：

①AB 为等腰直角△ABC 底边时，符合条件的 C 点有 0 个；

②AB 为等腰直角△ABC 其中的一条腰时，符合条件的 C 点有 3 个.

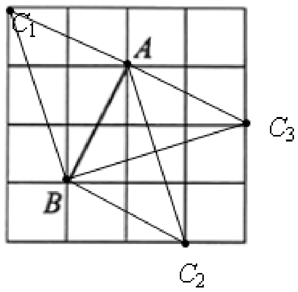
∵ $AC_1=AC_3=AB=BC_2=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$， $BC_1=BC_3=AC_2=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

∴ $AC_1{}^2+AB^2=BC_1{}^2$， $AC_3{}^2+AB^2=BC_3{}^2$， $BC_2{}^2+AB^2=AC_2{}^2$，

∴ $\triangle ABC_2$， $\triangle ABC_2$， $\triangle ABC_2$ 都是等腰直角三角形，

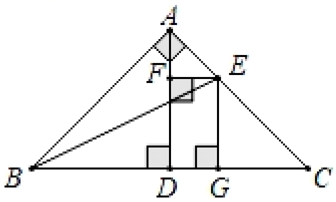
故共有 3 个点，

故选 C．



【点睛】本题考查了等腰直角三角形的判定；解答本题关键是根据题意，画出符合实际条件的图形，数形结合的思想是数学解题中很重要的解题思想．

8．如图，在等腰直角△ABC中，∠BAC＝90°，AD是△ABC的高线，E是边 AC上一点，分别作 EF⊥AD于点 F，EG⊥BC于点 G，几何原本中曾用该图证明了 BG^2+CG^2＝2（BD^2+DG^2），若△ABD与△AEF的面积和为 8.5，BG＝5，则 CG的长为（　　）



A．2　　　　　　B．2.5　　　　　　C．3　　　　　　D．3.5

【答案】C

【分析】由 $S_{△AEF}+S_{△ABD}$＝8.5，得 BD^2+DG^2＝17，从而有 BG^2+CG^2＝34，即可得出答案．

【详解】解：由题意知：△ABD，△AEF都是等腰直角三角形，

∴$S_{△AEF}=\frac{1}{2}EF^2=\frac{1}{2}DG^2$，$S_{△ABD}=\frac{1}{2}BD^2$，

∵$S_{△AEF}+S_{△ABD}$＝8.5，

∴BD^2+DG^2＝17，

∵BG^2+CG^2＝2（BD^2+DG^2），

∴BG^2+CG^2＝34，

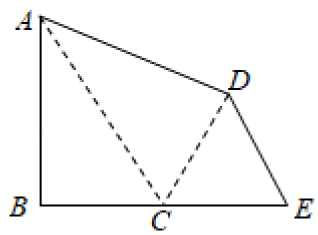
∵BG＝5，

∴$CG=\sqrt{34-25}=3$，

故选：C．

【点睛】本题主要考查了等腰直角三角形的判定与性质，勾股定理等知识，根据三角形的面积求出 BD^2+DG^2＝17 是解题的关键．

9．如图，在 Rt△ABC中，∠B＝90°，AB＝8，BC＝6，延长 BC至 E，使得 CE＝BC，将△ABC沿 AC翻折，使点 B落点 D处，连接 DE，则 DE的长为（　　）

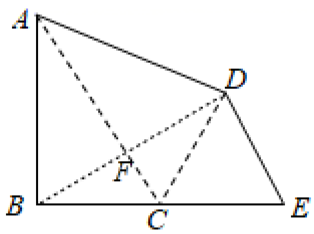


A. $\frac{18}{5}$　　B. $\frac{24}{5}$　　C. $\frac{32}{5}$　　D. $\frac{36}{5}$

【答案】D

【分析】连接 BD 交 AC 于点 F，由折叠的性质得出 $AB=AD$，$\angle BFC=90°$，$BF=DF$，利用等面积法求解 BF，再证明 $\angle BDE=90°$，再利用勾股定理求出 DE 的长．

【详解】解：连接 BD 交 AC 于点 F，



∵将△ABC 沿 AC 翻折，使点 B 落点 D 处，

∴$AB=AD$，$CB=CD$，$\angle BAC=\angle DAC$，

∴$BF=DF$，$\angle BFC=90°$，

∵$AB=8$，$BC=6$，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$，

$\because \frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot BF$,

$\therefore BF=\frac{6\times 8}{10}=\frac{24}{5}=DF$,

$\therefore BD=2BF=\frac{48}{5}$,

∵$CE=BC$，$CD=CB$,

所以 $CD=CB=CE$，

$\therefore \angle CBD=\angle CDB, \angle CDE=\angle CED$,

$\because \angle CBD+\angle BDE+\angle CED=180°$,

$\therefore \angle CDB+\angle CDE=90°$，即 $\angle BDE=90°$,

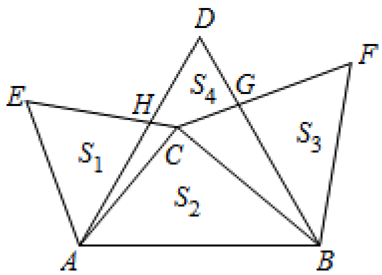
$\therefore DE=\sqrt{BE^2-BD^2}=\frac{36}{5}$.

故选：D．

【点睛】本题考查了折叠的性质，勾股定理，熟练掌握“折叠的性质，证明 $\angle BDE=90°$”

是解本题的关键.

10．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以 AB，AC，BC 为边作等边△ABD，等边△ACE，等边△CBF．设△AEH 的面积为 S_1，△ABC 的面积为 S_2，△BFG 的面积为 S_3，四边形 $DHCG$ 的面积为 S_4，则下列结论正确的是（　　）



A．$S_2=S_1+S_3+S_4$　　B．$S_1+S_2=S_3+S_4$

C．$S_1+S_4=S_2+S_3$　　D．$S_1+S_3=S_2+S_4$

【答案】D

【分析】根据勾股定理得到 $AC^2+BC^2=AB^2$，利用等边三角形的性质及勾股定理求出 $DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，同理：等边△$ACE$ 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}AC$，等边△CBF 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$，由此推出等边△ACE 的面积+等边△CBF 的面积=等边三角形 ABD 的面积，即可得到结论.

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，

过 D 作 $DM\perp AB$ 于 M，$\angle AMD=90°$，

∵△ABD 是等边三角形，

∴$\angle ADM=30°$，$AB=AD$，

∴ $AM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB$，

∴ $DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，

同理：等边△ACE 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}AC$，等边△CBF 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$，

∵等边△ACE 的面积+等边△CBF 的面积=$\frac{1}{2}\cdot AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AC+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}BC$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(AC^2+BC^2)$

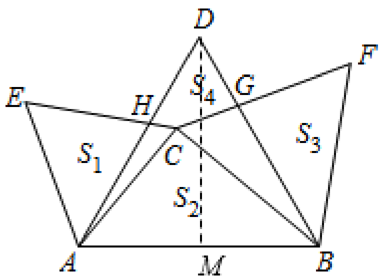
$=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$

$=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

∴等边△ACE的面积+等边△CBF的面积=等边三角形 ABD 的面积，

∴$S_1+S_3=S_2+S_4$，

故选：D.



【点睛】此题考查了勾股定理的应用，等边三角形的性质，熟记勾股定理的应用方法是解题的关键.

二、填空题

11.在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$S_{\triangle ABC}=30$，$c=13$，且$a<b$，则$a=$_________，$b=$_________.

【答案】5　　12

【分析】由题知$\triangle ABC$是直角三角形，根据勾股定理和三角形的面积公式列出两个方程，组成方程组求解即可.

【详解】解：根据勾股定理得 $a^2+b^2=c^2$，

即 $a^2+b^2=169$ ①，

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a \cdot b=30$，

∴$ab=60$ ②，

①+②×2，得$(a+b)^2=289$，即 $a+b=17$ ③，

①−②×2，得$(a-b)^2=49$，

∵$a<b$，

∴$a-b=-7$ ④，

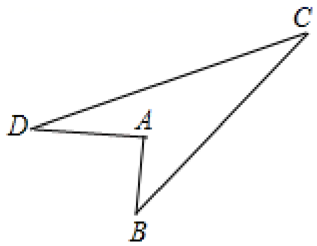
③+④，得 $a=5$，

∴$b=12$.

故答案为5，12.

【点睛】本题考查了勾股定理，解方程组，平方根的计算．解题的关键是根据题意列出方程组，并且灵活运用降次的方法解方程组.

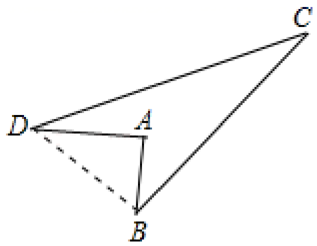
12．如图，四边形$ABCD$中，$\angle BAD=90°$，$AD=3$，$AB=4$，$BC=12$，$CD=13$，则四边形$ABCD$的面积为_________.



【答案】24

【分析】连接 BD，先根据勾股定理求出 BD 的长度，再根据勾股定理的逆定理判断出△BCD 的形状，再利用三角形的面积公式求解即可.

【详解】解：连接 BD，



∵$\angle DAB=90°$，$AB=3$，$AD=4$，

∴$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=5$，

∵$5^2+12^2=13^2$，

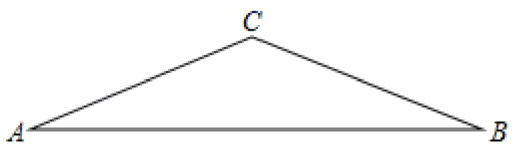
∴$\angle DBC=90°$，

∴四边形 $ABCD$ 的面积$=\frac{1}{2}\times5\times12-\frac{1}{2}\times3\times4=24$.

故答案为：24.

【点睛】本题考查的是勾股定理，勾股定理的逆定理及三角形的面积，能根据勾股定理的逆定理判断出△BCD 的形状是解答此题的关键.

13．如图，在△ABC 中，$AC=BC=13$，$AB=24$，D 是 AB 边上的一个动点，点 E 与点 A 关于直线 CD 对称，当△ADE 为直角三角形时，则 AD 的长为_____.



【答案】7 或 17

【分析】分两种情况：①当点 D 在 AF 上时；②当点 D 在 BF 上时；进行讨论即可求解.

【详解】解：作 $CF\perp AB$ 于 F，

∵在△ABC 中，$AC=BC=13$，$AB=24$，

∴$AF=12$，

∴$CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=5$，

①如图 1，当点 D 在 AF 上时，

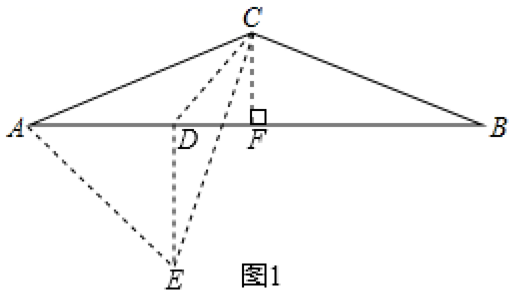


图1

∵∠ADE＝90°，

∴∠ADC＝∠EDC＝（360°－90°）÷2＝135°．

∴∠CDF＝45°．

∴CF＝DF.

∴AD＝AF－DF＝AF－CF＝12－5＝7.

②如图2，当点D在BF上时，

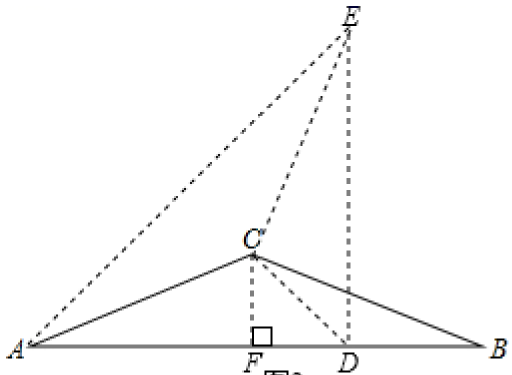


图2

∵∠ADE＝90°，

∴∠CDF＝45°．

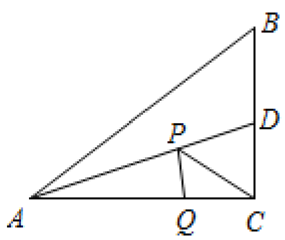
∴CF＝DF ．

∴AD＝AF+DF＝AF+CF＝12+5＝17.

故答案为：7或17．

【点睛】主要考查了勾股定理，等腰三角形的性质，轴对称的性质，解本题的关键是注意运用数形结合的思想解决问题.

14．如图，在$Rt\vee ABC$中，∠ACB＝90°，AC＝8，BC＝6，AD平分∠CAB，点P，点Q分别是AD，AC的动点，则PC+PQ的最小值为_________.



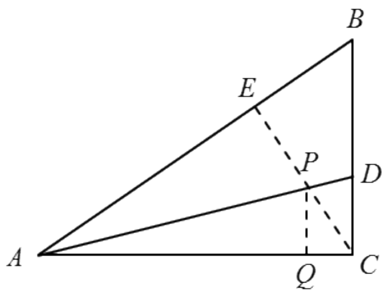
【答案】4.8

【分析】过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，交 AD 于点 P，根据轴对称的性质得到 CE 为 $PC+PQ$ 的最小值，根据勾股定理求出 AB，根据面积法求出 CE，得到答案．

【详解】解：过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，交 AD 于点 P，

∵AD 平分 $\angle BAC$，

∴此时 $PC+PQ=CE$ 取最小值，即 CE，



在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

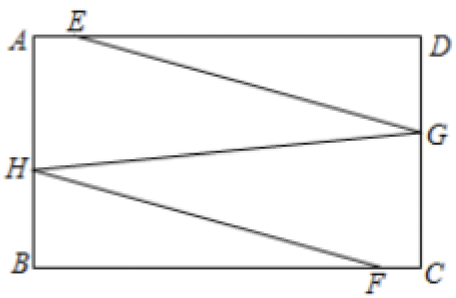
∴$CE=\dfrac{AC\times BC}{AB}=\dfrac{8\times 6}{10}=4.8$，

则 $PC+PQ$ 的最小值为 4.8，

故答案为：4.8．

【点睛】本题考查的是轴对称-最短路径问题、勾股定理的应用，解题的关键是找出满足 $PC+PQ$ 有最小值时点 P 和 Q 的位置．

15．如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=9$，$AD=14$．点 E、点 F 分别在 AD、BC 上，且 $AE=CF=1$，点 G 是 DC 边上的动点，点 H 是 AB 边上的动点．则 $EG+HG+HF$ 的是小值是____________________．



【答案】41

【分析】作点 E 关于 CD 的对称点 E'，点 F 关于 AB 的对称点 F'，得到 $BG+HG+HF$ 的最小值即为 $E'F'$ 的长，利用勾股定理即可求解．

【详解】作点 E 关于 CD 的对称点 E'，点 F 关于 AB 的对称点 F'，