北京市第八中学2023-2024学年高二下学期期中练习数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知函数$f(x)=\frac{x}{e^x}$，则$f'(x)=$（　　）

A．$\frac{x-1}{e^x}$　　B．$\frac{x+1}{e^x}$

C．$\frac{1-x}{e^x}$　　D．$-\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$

2．在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_4+a_8=16$，则该数列前11项和$S_{11}=$

A．58　　B．88　　C．143　　D．176

3．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和.若$S_2=4$，$S_4=6$，则$S_6=$（　　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

4．曲线$f(x)=x^2\mathrm{e}^x$在点$(1,f(1))$处的切线方程为（　　）

A．$\mathrm{e}x-y=0$　　B．$2\mathrm{e}x-y-\mathrm{e}=0$

C．$3\mathrm{e}x-y-2\mathrm{e}=0$　　D．$4\mathrm{e}x-y-3\mathrm{e}=0$

5．用数学归纳法证明“对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$1+2+3+\cdots+3n=\frac{3n(1+3n)}{2}$”，由$n=k$到$n=k+1$时，等式左边应当增加的项为（　　）

A．$3k+1$　　B．$(3k+1)+(3k+2)+(3k+3)$

C．$3k+3$　　D．$(k+1)+(k+2)+(3k)$

6．$1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)$的值为(　　)

A．$18+\frac{1}{2^{9}}$　　　　B．$20+\frac{1}{2^{10}}$

C．$22+\frac{1}{2^{11}}$　　　　D．$18+\frac{1}{2^{10}}$

7．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-\lambda n$（$\lambda\in\mathrm{R}$），若$\{a_n\}$为单调递增数列，则实数λ的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,3)$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$(-\infty,0)$

8．小华分期付款购买了一款5000元的手机，每期付款金额相同，每期为一月，购买后每月付款一次，共付6次，购买手机时不需付款，从下个月这天开始付款.已知月利率为1%，按复利计算，则小华每期付款金额约为（　　）（参考数据：$1.01^5\approx1.05$，$1.01^6\approx1.06$，$1.01^7\approx1.07$）

A．764元　　B．875元　　C．883元　　D．1050元

9．若函数$f(x)=kx-\ln x$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，则实数k的取值范围是

A．$(-\infty,-2]$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

10．已知数列：$\frac{1}{k},\frac{2}{k-1},\cdots,\frac{k}{1}\left(k\in N^*\right)$，按照$k$从小到大的顺序排列在一起，构成一个新的数列$\{a_n\}$：$1,\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1},\cdots,$则$\frac{8}{9}$首次出现时为数列$\{a_n\}$的

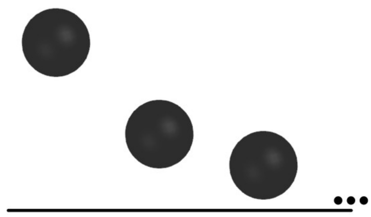
A．第44项　　B．第76项　　C．第128项　　D．第144项

二、填空题

11．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则 $f'\left(x\right)=$__________.

12．设等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 $S_n, S_{35}<0, S_{36}>0$，若对任意正整数 n，都有 $S_n\geq S_k$，则整数 $k=$____.

13．如图，一个小球从 10m 高处自由落下，每次着地后又弹回到原来高度的 $\frac{1}{3}$，若已知小球经过的路程为 $\frac{530}{27}$ m，则小球落地的次数为____.



14．函数 $f\left(x\right)=\left|2x-1\right|-2\ln x$ 的最小值为____.

15．关于函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x\left(\sin x-\cos x\right)$，$x\in\left(-4,4\right)$，有如下 4 个结论：

①$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增；②$f\left(x\right)$ 有三个零点；③$f\left(x\right)$ 有两个极值点；④$f\left(x\right)$ 有最大值.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题

16．记 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，若 $a_3=S_5, a_2a_4=S_4$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）求使$S_n>a_n$成立的n的最小值.

17．已知函数$f(x)=(x-1)e^x$

(1)判断函数$f(x)$的单调性，并求出$f(x)$的极值；

(2)设$g(x)=f(x)-a(a\in R)$，讨论函数$g(x)$的零点个数.

18．已知函数$f(x)=a^2x^3+3ax^2-bx-1$在$x=1$时有极值0.

(1)求实数a,b的值；

(2)若$f(x)\geq m$在$[0,+\infty)$上恒成立，求实数m的取值范围.

19．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-3n\left(n\in N^*\right)$.

(1)证明数列$\{a_n+3\}$是等比数列，并求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)在a_n与a_{n+1}之间插入n个数，使得包括a_n与a_{n+1}在内的这$n+2$个数成等差数列，其公差为b_n，求数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

20．已知函数$f(x)=ax-2\ln x$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

(2)设函数$g(x)=x-2$，若存在$x\in\left[1,e^3\right]$，使得$f(x)\leq g(x)$，求a的取值范围.

21．如果无穷数列$\{a_n\}$是等差数列，且满足：①$\forall i$、$j\in\mathbf{N}^*$，$\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得$a_ia_j=a_k$；②$\forall k\in\mathbf{N}^*$，$\exists i$、$j\in\mathbf{N}^*$，使得$a_ia_j=a_k$，则称数列$\{a_n\}$是“H数列”.

(1)下列无穷等差数列中，是“H数列”的为____________；（直接写出结论）

$\{a_n\}$:1、3、5、……

$\{b_n\}$:0、2、4、……

$\{c_n\}$:0、0、0、……

$\{d_n\}$:-1、0、1、……

(2)证明：若数列$\{a_n\}$是“H数列”，则$a_1 \in \mathbf{Z}$且公差$d \in \mathbf{N}$；

(3)若数列$\{a_n\}$是“H数列”且其公差$d \in \mathbf{N}^*$为常数，求$\{a_n\}$的所有通项公式.

参考答案：

1．C

【分析】直接利用求导公式和法则求解即可

【详解】解：因为$f(x)=\frac{x}{e^x}$，

所以$f^{'}(x)=\frac{x^{'}\cdot e^x-x\cdot\left(e^x\right)^{'}}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x-x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{1-x}{e^x}$，

故选：C

2．B

【详解】试题分析：等差数列前n项和公式$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，

$s_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11(a_4+a_8)}{2}=\frac{11\times16}{2}=88$.

考点：数列前n项和公式.

3．A

【分析】根据题目条件可得S_2，S_4-S_2，S_6-S_4成等比数列，从而求出$S_6-S_4=1$，进一步求出答案.

【详解】∵S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，

∴S_2，S_4-S_2，S_6-S_4成等比数列

∴$S_2=4$，$S_4-S_2=6-4=2$

∴$S_6-S_4=1$，

∴$S_6=1+S_4=1+6=7$·

故选：A.

4．C

【分析】以导数几何意义去求切线方程即可.

【详解】由 $f(x)=x^2e^x$ 可得 $f(1)=e$

又 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

则切线斜率 $k=f'(1)=(1+2)e=3e$

故曲线 $f(x)=x^2e^x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

$y=3e(x-1)+e$ 即 $3ex-y-2e=0$

故选：C

5．B

【分析】分别写出 $n=k$ 和 $n=k+1$ 时，左边的式子，两式作差，即可得出结果.

【详解】由题意可得，当 $n=k$ 时，等式左边等于 $1+2+3+\cdots+3k$，共 $3k$ 项求和；

当 $n=k+1$ 时，等式左边等于 $1+2+3+\cdots+3(k+1)$，共 $3k+3$ 项求和；

所以由 $n=k$ 的假设到证明 $n=k+1$ 时,等式左边应添加的式子是 $(3k+1)+(3k+2)+(3k+3)$.

故选：B.

6．B

【详解】设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}$，分组求和可得：

$\therefore S_n=2n-\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}$，

则：$S_{11}=2\times 11-2+\frac{1}{2^{11-1}}=20+\frac{1}{2^{10}}$.

本题选择B选项.

7．A

【分析】由已知得$a_{n+1}-a_n=2n+1-\lambda$，根据$\{a_n\}$为递增数列，所以有$a_{n+1}-a_n>0$，建立关于λ的不等式，解之可得λ的取值范围.

【详解】由已知得$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-\lambda(n+1)-n^2+\lambda n=2n+1-\lambda$，

因为$\{a_n\}$为递增数列，所以有$a_{n+1}-a_n>0$，即$2n+1-\lambda>0$恒成立，

所以$\lambda<2n+1$，所以只需$\lambda<(2n+1)_{\min}$，即$\lambda<2\times 1+1=3$，

所以$\lambda<3$，

故选：A.

【点睛】本题考查数列的函数性质：递增性，根据已知得出$a_{n+1}-a_n>0$是解决此类问题的关键，属于基础题.

8．C

【分析】设小华每期付款金额为x元，第n期付款后欠款为$A_n\left(n=1,2,3,4,5,6\right)$元，根据已知条件，依次写出$A_1$，$A_2$，$A_3$，$\cdots$，$A_6$，结合$A_6=0$及等比数列的前$n$项和公式即可求解.

【详解】设小华每期付款金额为x元，第n期付款后欠款为$A_n\left(n=1,2,3,4,5,6\right)$元，

则$A_1=5000\times(1+1\%)-x=5000\times 1.01-x$，

$A_2=(5000\times 1.01-x)\times(1+1\%)-x=5000\times 1.01^2-1.01x-x$，

$A_3=\left(5000\times1.01^2-1.01x-x\right)\times\left(1+1\%\right)-x=5000\times1.01^3-1.01^2x-1.01x-x$，

$A_6=5000\times1.01^6-\left(1.01^5+1.01^4+1.01^3+1.01^2+1.01+1\right)x$，

因为$A_6=0$，所以$5000\times1.01^6-\left(1.01^5+1.01^4+1.01^3+1.01^2+1.01+1\right)x=0$，

即$x=\dfrac{5000\times1.01^6}{1.01^5+1.01^4+1.01^3+1.01^2+1.01+1}=\dfrac{5000\times1.01^6}{\dfrac{1\times\left(1-1.01^6\right)}{1-1.01}}\approx\dfrac{5000\times1.06}{\dfrac{1-1.06}{1-1.01}}=\dfrac{5300}{6}\approx883$，

所以小华每期付款金额约为883元.

故选：C.

9．D

【详解】试题分析：$f'(x)=k-\dfrac{1}{x}$，∵函数$f\left(x\right)=kx-\ln x$在区间$(1,+\infty)$单调递增，∴$f'(x)\geq0$在区间$(1,+\infty)$上恒成立．∴$k\geq\dfrac{1}{x}$，而$y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,+\infty)$上单调递减，∴$k\geq1$．∴k的取值范围是$[1,+\infty)$．故选D.

考点：利用导数研究函数的单调性.

10．C

【分析】从分子分母的特点入手，找到$\dfrac{8}{9}$出现前的所有项，然后确定$\dfrac{8}{9}$的项数.

【详解】观察分子分母的和出现的规律：$2,3,4,5\cdots$，

把数列重新分组：$(\frac{1}{1}),(\frac{1}{2},\frac{2}{1}),(\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}),\cdots(\frac{1}{k},\frac{2}{k-1},\cdots,\frac{k}{1})$，

可看出$\frac{8}{9}$第一次出现在第16组，因为$1+2+3+\cdots+15=120$，所以前15组一共有120项；

第16组的项为$(\frac{1}{16},\frac{2}{15},\cdots,\frac{7}{10},\frac{8}{9}\cdots)$，所以$\frac{8}{9}$是这一组中的第8项，故$\frac{8}{9}$第一次出现在数列的第128项，故选C.

【点睛】本题主要考查数列的通项公式，结合数列的特征来确定，侧重考查数学建模的核心素养.

11．$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

【分析】根据简单复合函数的求导法则计算可得.

【详解】因为$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以$f'\left(x\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

故答案为：$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

12．18

【分析】根据给定条件，利用等差数列前n项和公式，结合通项的性质计算判断其所有负数项作答.

【详解】等差数列$\{a_n\}$中，$S_{35}=\frac{35(a_1+a_{35})}{2}=35a_{18}<0$，则$a_{18}<0$，

又$S_{36}=\frac{36(a_1+a_{36})}{2}=18(a_{18}+a_{19})>0$，则$a_{18}+a_{19}>0$，即有$a_{19}>-a_{18}$，

于是数列$\{a_n\}$的公差$d=a_{19}-a_{18}>0$，即$\{a_n\}$是递增等差数列，其前18项均为负数，从第19项起为正数，

因此$(S_n)_{\min}=S_{18}$，所以对任意正整数n，都有$S_n\geq S_k$的整数$k=18$.