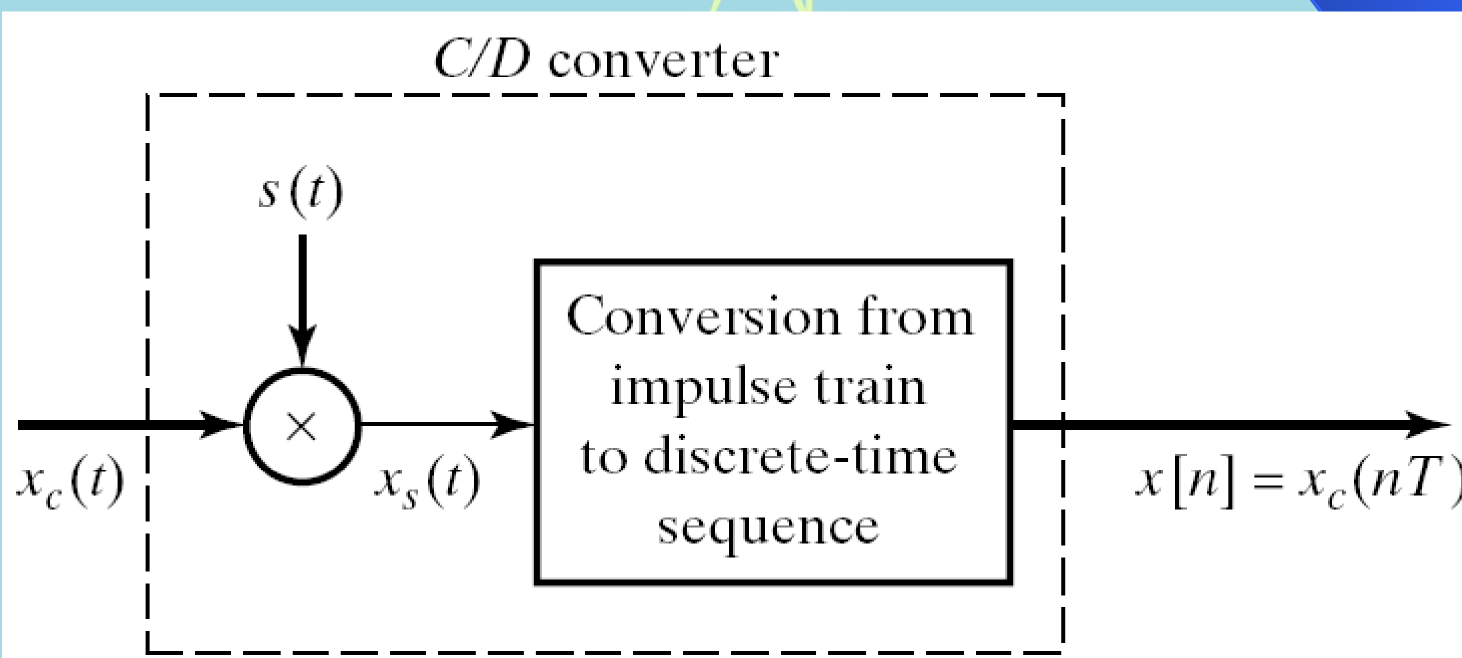
CH4 连续时间信号的采样

- 4.1 周期采样
- 4.2 采样的频域表示
- 4.3 由样本重构带限信号
- 4.4 连续与离散系统的等效性
- 4.5 离散变采样方法
- 4.6 有限字长效应

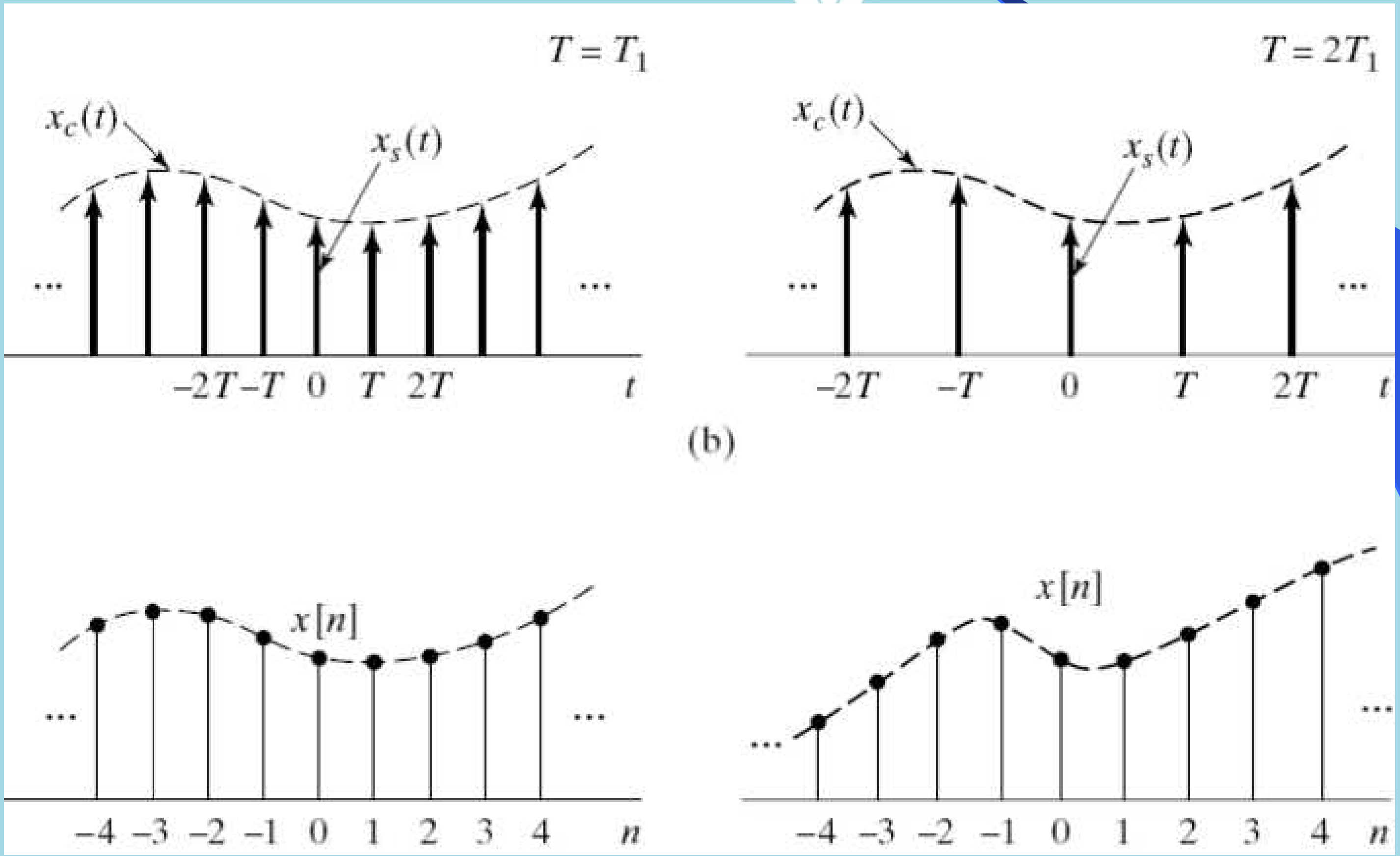
4. 1 周期采样

采样周期：T(S)　　采样频率：fs=1/T(Hz)

$x[n] = x_c(nT)$



同一信号，不同采样频率的采样输出



4.2 采样的频域表示

$$\Theta\ x_s(t)=x_c(t)s(t)$$

$$\therefore X_s(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega)*S(j\Omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s),let,\Omega_s=2\pi/T$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j\Omega)*\delta(\Omega-k\Omega_s)$$

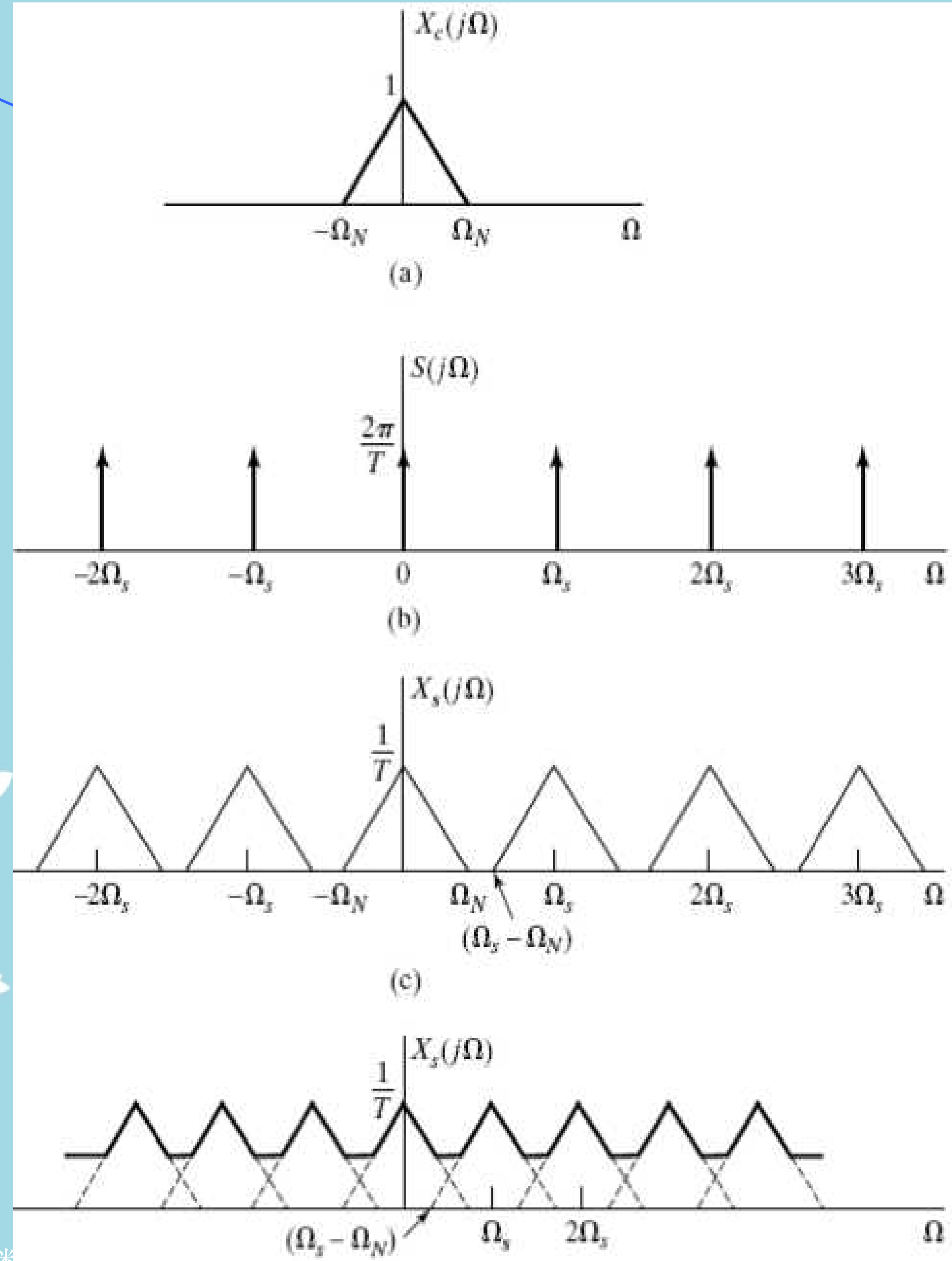
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\Omega-k\Omega_s))$$

$$X(e^{j\omega})=X_s(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\omega-k2\pi)/T)$$

周期采样后的信号频谱为原信号频谱的平移叠加

平移叠加

- 当横轴分别为f, Ω，ω 时，平移周期对应为 f_s, Ω_s， 2π
- 当 $\Omega_s < 2\Omega_N$ 时，信号频谱产生混叠
- 幅度因子1/T

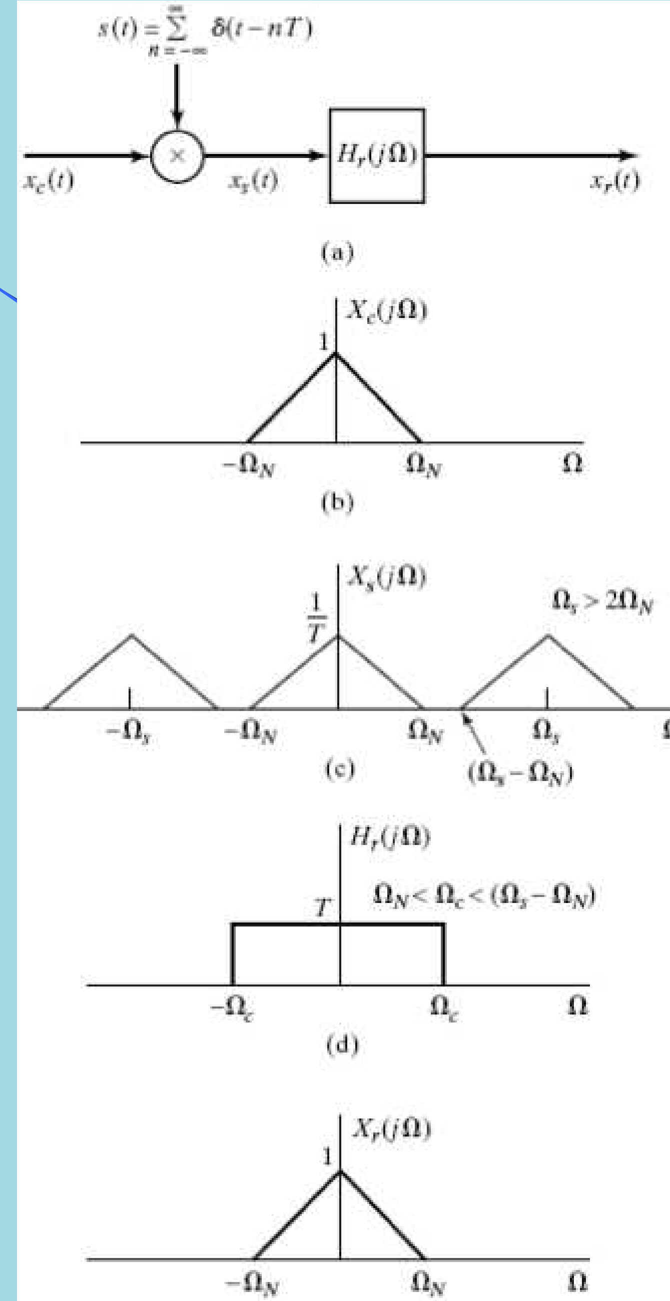


连续时间信号的恢复

- 当 $\Omega_s > 2\Omega_N$时，原理上可找到合适的理想低通滤波器完全恢复原来的连续时间信号

$$X_r(j\Omega) = X_s(j\Omega)H_r(j\Omega) = X_c(j\Omega)$$

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$



奈奎斯特采样定理

- 对带限信号$x_c(t)$，有

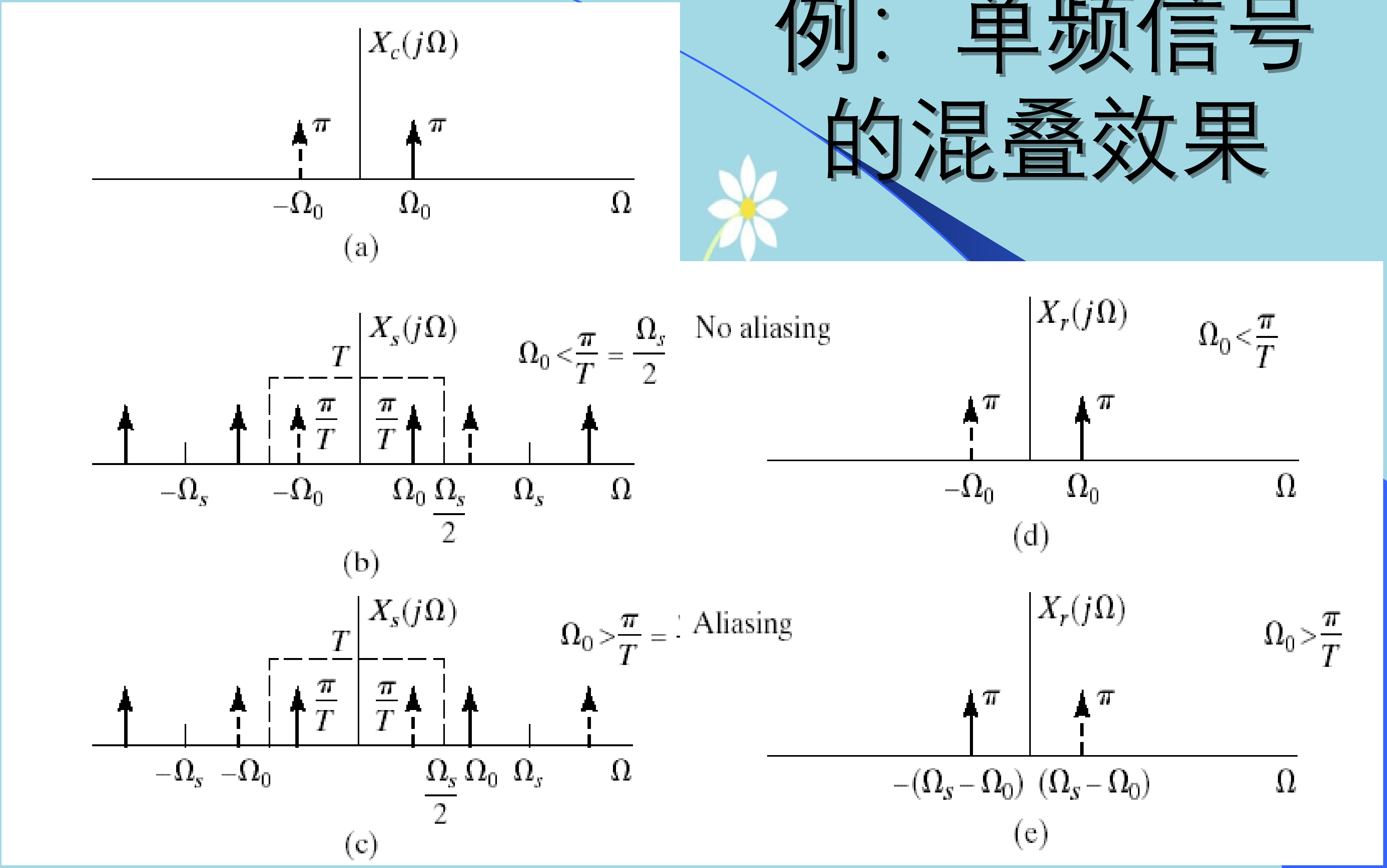
$$X_c(j\Omega)=0, |\Omega|\ge\Omega_N$$

- 当采样频率 $\Omega_s=\frac{2\pi}{T}\ge 2\Omega_N$ 时:

$$x[n]=x_c(nT), n=0,\pm1,\pm2,$$

- 周期采样信号x[n]唯一决定了$x_c(t)$

例：单频信号的混叠效果



$X_c(j\Omega)$
π
π
$-\Omega_0$
Ω_0
Ω
(a)
$X_s(j\Omega)$
T
$\Omega_0 < \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$
No aliasing
$\frac{\pi}{T}$
$\frac{\pi}{T}$
$-\Omega_s$
$-\Omega_0$
Ω_0
$\frac{\Omega_s}{2}$
Ω_s
Ω
(b)
$X_s(j\Omega)$
T
$\Omega_0 > \frac{\pi}{T}$
Aliasing
$\frac{\pi}{T}$
$\frac{\pi}{T}$
$-\Omega_s$
$-\Omega_0$
$\frac{\Omega_s}{2}$
Ω_0
Ω_s
Ω
(c)
$X_r(j\Omega)$
$\Omega_0 < \frac{\pi}{T}$
π
π
$-\Omega_0$
Ω_0
Ω
(d)
$X_r(j\Omega)$
$\Omega_0 > \frac{\pi}{T}$
π
π
$-(\Omega_s - \Omega_0)$
$(\Omega_s - \Omega_0)$
Ω
(e)

4.3 由样本重构带限信号

$$H_r(j\Omega)=\begin{cases}T & |\Omega|\le\Omega_c\\ 0 & |\Omega|>\Omega_c\end{cases}$$

$$h_r(t)=IFT[H_r(j\Omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_r(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c}Te^{j\Omega t}d\Omega$$

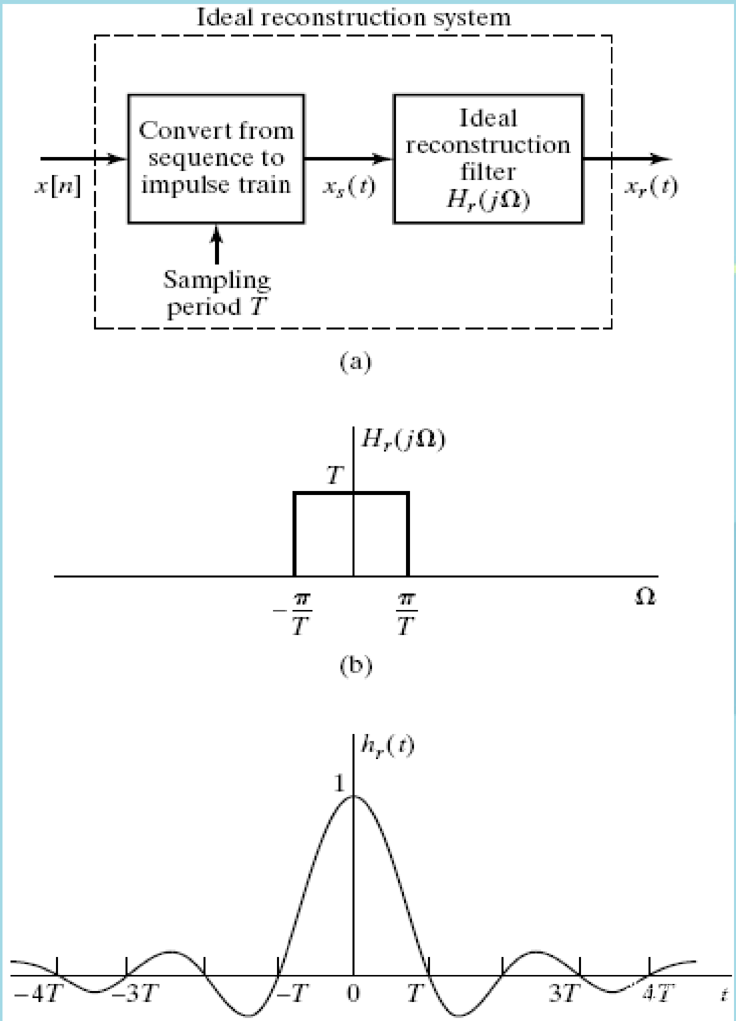
$$=\frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t/T}=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

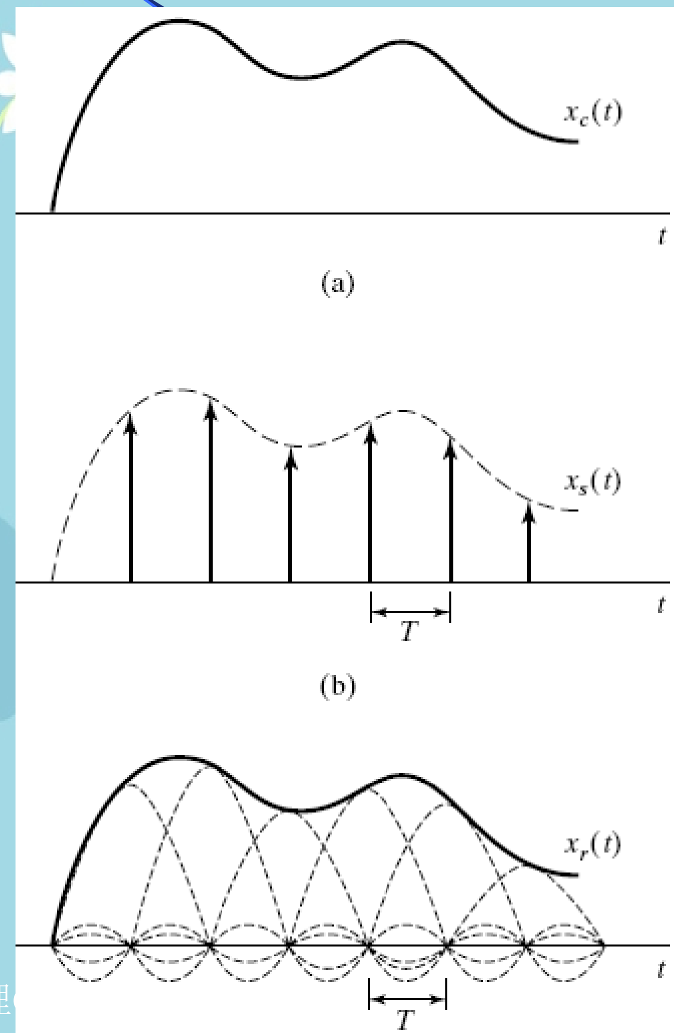
$$X_r(j\Omega)=X_s(j\Omega)H_r(j\Omega),$$

$$\therefore x_r(t)=x_s(t)*h_r(t)=[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-nT)]*\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n][\delta(t-nT)*\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

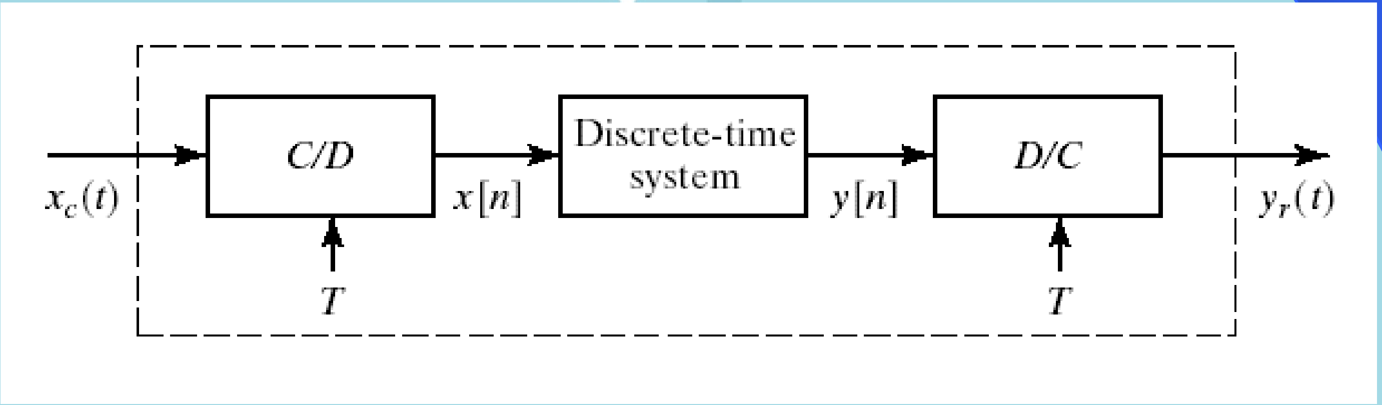
时域重构过程的理想带限内插





4.4 连续与离散系统的等效性

- 等效的充分条件：带限信号通过线性时不变系统



连续与离散系统频率响应的等效关系

$$X_c(j\Omega)=0 \qquad for \qquad |\Omega|\ge \pi/T$$

$$H_r(j\Omega)=\begin{cases}T & |\Omega|<\Omega_c=\Omega_s/2=\pi/T\\ 0 & |\Omega|\ge \pi/T\end{cases}$$

$$then, Y_r(j\Omega)=Y(e^{j\Omega T})H_r(j\Omega)=X(e^{j\Omega T})H(e^{j\Omega T})H_r(j\Omega)$$

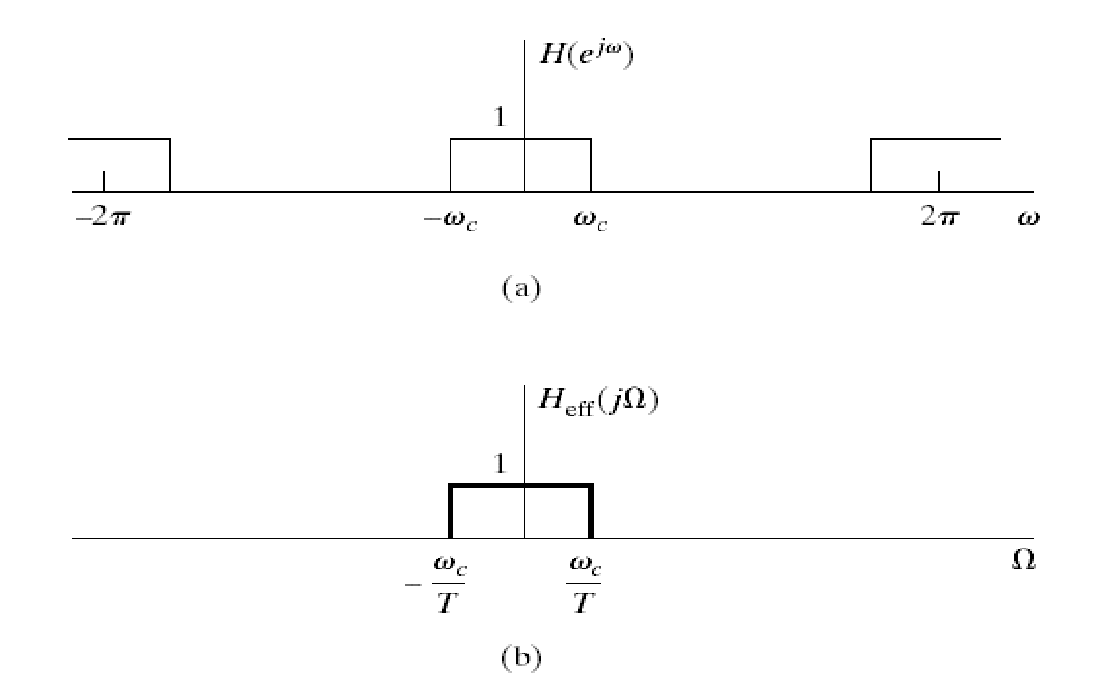
$$=H(e^{j\Omega T})H_r(j\Omega)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\Omega-2\pi k/T))$$

$$=H(e^{j\Omega T})\begin{cases}X_c(j\Omega) & |\Omega|<\pi/T\\ 0 & |\Omega|\ge \pi/T\end{cases}$$

$$=\begin{cases}X_c(j\Omega)H(e^{j\Omega T}), & |\Omega|<\pi/T\\ 0, & |\Omega|\ge \pi/T\end{cases}=X_c(j\Omega)\begin{cases}H(e^{j\Omega T}), & |\Omega|<\pi/T\\ 0, & |\Omega|\ge \pi/T\end{cases}$$

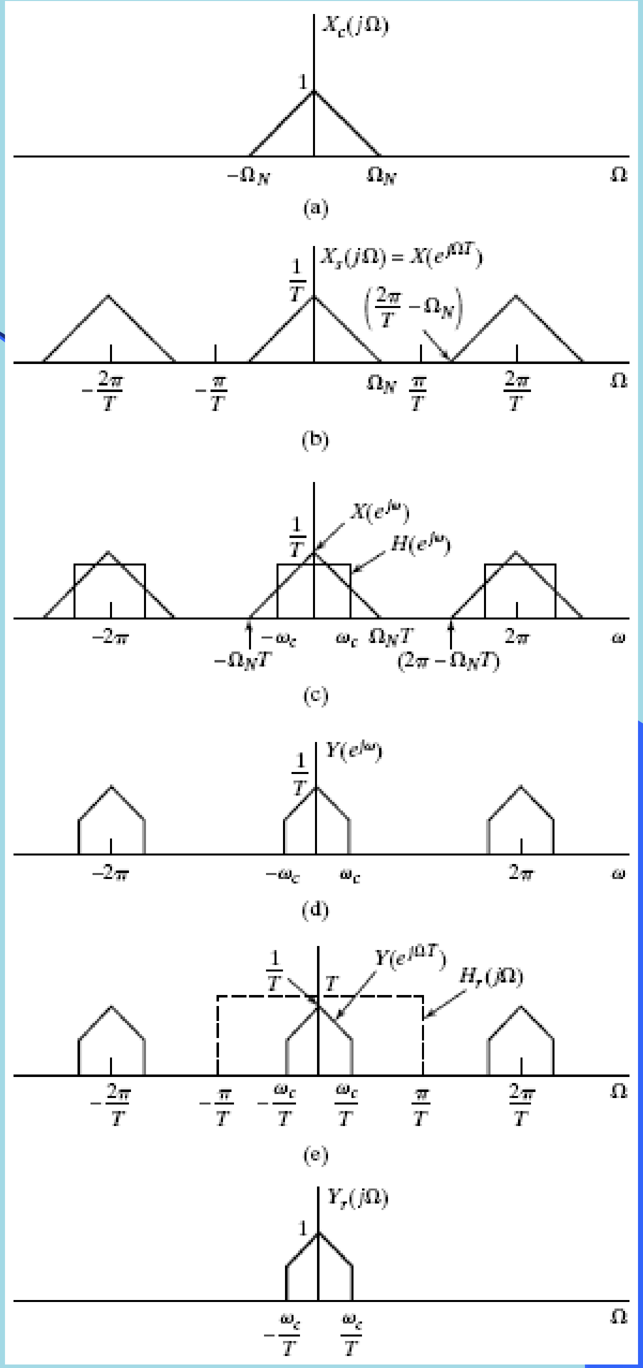
$$\therefore H_{eff}(j\Omega)=\begin{cases}H(e^{j\Omega T}) & |\Omega|<\pi/T\\ 0 & |\Omega|\ge \pi/T\end{cases}$$

连续等效系统相当于离散系统周期频率响应的基带周期



例：数字低通滤波器

- 输入信号必须带限
- 对低通滤波，允许信号采样稍有混叠
- 改变信号采样率，可等效不同截止频率的模拟滤波器



带限连续系统对应离散系统

- 与信号采样相似，频率响应平移叠加
- 无混叠时，单周期内相同：

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega / T) \qquad , for\,|\omega| < \pi$$

- 脉冲响应不变：h[n] = T h_c(nT)
- 注意：脉冲响应采样有幅度因子T

例：延时系统

$$:H(e^{j\omega})=e^{-j\omega\Delta}$$

- 用傅里叶变换时移性质，得：

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$y[n]=x[n-\Delta]$$

- 当延时为整数n_0时，相当延时n_0个样本，上面输入-输出方程可实现
- 但当延时为非整数时，上式不成立且离散系统数学意义不明确

例：非整数延时系统

$$(1)\ x_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

$$(2)\ H_c(j\Omega)=H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}=e^{-j\Omega\Delta T}$$

$$Y_c(j\Omega)=X_c(j\Omega)H_c(j\Omega)=X_c(j\Omega)e^{-j\Omega\Delta T}$$

$$y_c(t)=x_c(t-\Delta T)$$

$$(3)\ y[n]=y_c[nT]=x_c(nT-\Delta T)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{\sin[\pi(t-kT)/T]}{\pi(t-kT)/T}\Big|\, t=nT-\Delta T$$

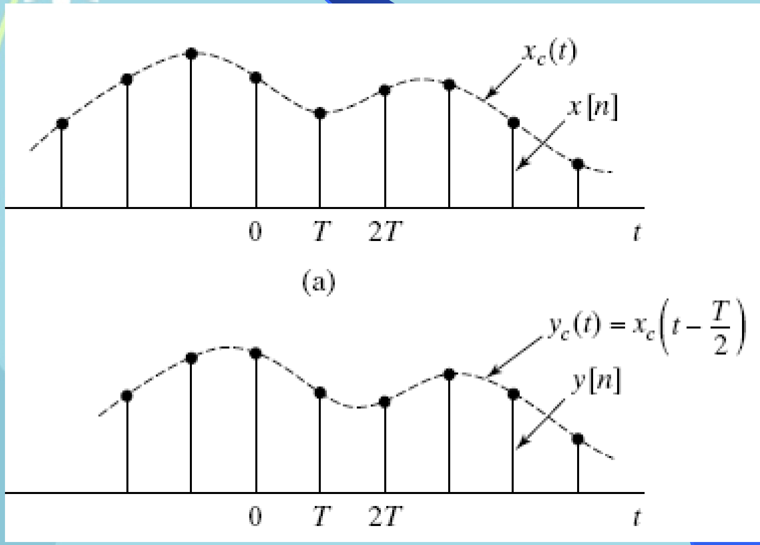
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{\sin[\pi(n-k-\Delta)]}{\pi(n-k-\Delta)}$$

- 该方程是无限卷积也无法实现，但过程说明了非整数延时系统的数学意义

例：非整数延时系统（续）

非整数延时系统输出结果等效于：

- 输入连续化
- 延时
- 离散重采样

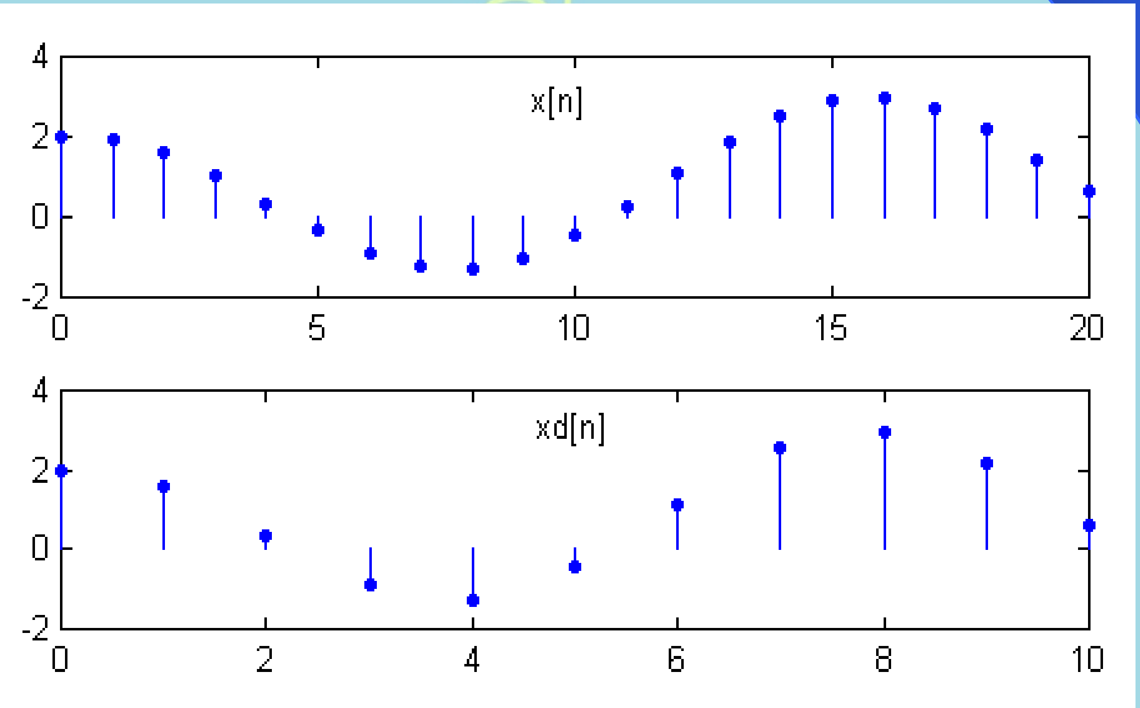


4.5 离散变采样方法

- 采样定理要求采样率大于信号带宽的2倍
- 非理想锐截止抗混叠低通滤波器一般要求采样率再提高20%
- 较高的采样率意味着较大的数据量，也就要求系统较大的运算处理能力
- 等效模拟相同性能的FIR滤波器其运算量正比于采样率的平方!

4.5.1比例抽取—M整倍数减采样

- 对原始序列每M点抽取一点
- $x_d[n]=x[nM]=x_c(nMT)$



减采样频谱关系

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{MT} - j\frac{2\pi r}{MT}\right)$$

$let, r = i + kM$

$$= \frac{1}{MT}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{M-1} X_c\left(j\frac{\omega}{MT} - j\frac{2\pi k}{T} - j\frac{2\pi i}{MT}\right)$$

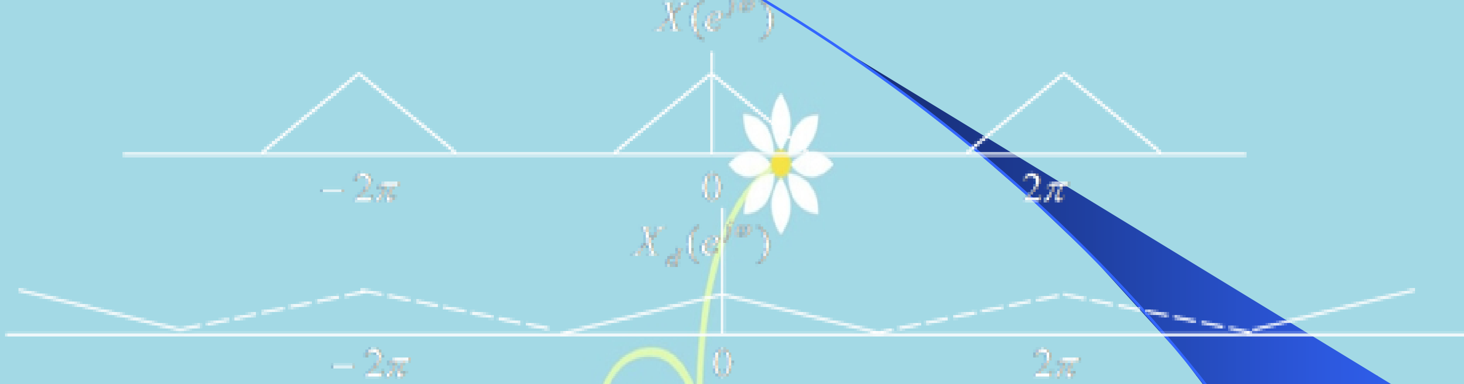
$$= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\right)$$

- 频谱扩大M倍，按2π平移M个，叠加除M

例: 2倍减采样

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega/2}\right) + X\left(e^{j(\omega-2\pi)/2}\right)\right]$$



3倍减采样

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\left[X\left(e^{j\omega/3}\right) + X\left(e^{j(\omega-2\pi)/3}\right) + X\left(e^{j(\omega-4\pi)/3}\right)\right]$$