2025

高考总复习

课时规范练70　双曲线的定义、方程与性质

基础巩固练

1.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 P 在双曲线 C 的右支上,则$|PF_2|-|PF_1|=$(A)

A.-8　　B.8　　C.10　　D.-10

解析 因为双曲线C的左、右焦点分别为F_1,F_2,点P在双曲线C的右支上,所以$|PF_2|-|PF_1|=-2a=-8$.

2.(2024·河南平顶山模拟)已知双曲线 C:$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{4}=1(m>0)$的左焦点与抛物线 $y^2=-16x$ 的焦点重合,则双曲线的实轴长为(D)

A.$2\sqrt{5}$　　B.$4\sqrt{5}$　　C.$2\sqrt{3}$　　D.$4\sqrt{3}$

解析 抛物线的焦点为(-4,0),所以$m+4=4^2$,得$m=12$,所以双曲线的实轴长为 $4\sqrt{3}$.

3. 已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线与直线 $x+y-1=0$ 垂直,则 C 的离心率为(　D　)

A.$\sqrt{2}$　　B.2　　C.$\sqrt{3}$　　D.1

解析 由于双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线和直线 $x+y-1=0$ 垂直,故该渐近线的斜率$\frac{b}{a}=1$,所以双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

4. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{2a}-\frac{y^2}{a}=1(a>0)$,下列结论正确的是(C)

A. C 的实轴长为 $\sqrt{2a}$

B. C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$

C. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. C 的一个焦点的坐标为 $(\sqrt{5a},0)$

解析 对于 A,C 的实轴长为 $2\sqrt{2a}$,故 A 错误;

对于 B,C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a}}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$,故 B 错误;

对于 C,C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2a+a}}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,故 C 正确;

对于 D,C 的焦点的坐标为 $(\pm\sqrt{3a},0)$,故 D 错误.

5.(2024·浙江绍兴模拟)已知双曲线$C:x^2-y^2=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2,若左支上的两点A,B与左焦点F_1三点共线,且$\triangle ABF_2$的周长为8,则$|AB|$=(A)

A.2　　B.3　　C.4　　D.6

解析 因为双曲线$C:x^2-y^2=1$,所以$a=1$.

由双曲线的定义得$|AF_2|-|AF_1|=2a=2$,$|BF_2|-|BF_1|=2a=2$,

两式相加得$|AF_2|+|BF_2|-|AB|=4a=4$.

$\triangle ABF_2$的周长为8,即$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=8$,两式相减得$|AB|=2$.

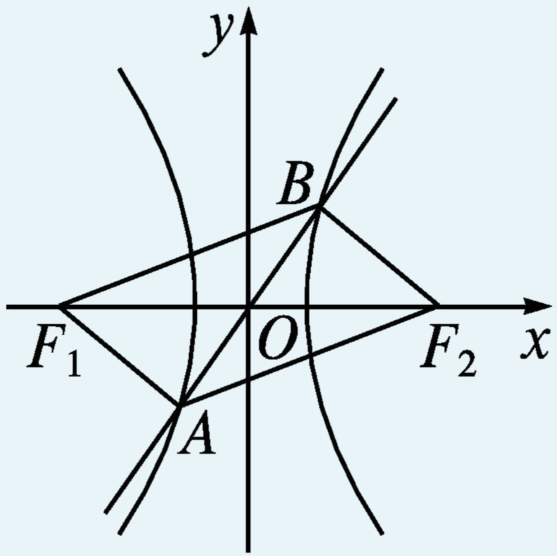
6.(2024·九省适应性测试,8)设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过坐标原点的直线与 C 交于 A,B 两点,$|F_1B|=2|F_1A|$,$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=4a^2$,则 C 的离心率为(D)

A.$\sqrt{2}$　　B.2　　C.$\sqrt{5}$　　D.$\sqrt{7}$

解析 如图,由双曲线的对称性可知$|F_1A|=|F_2B|$,$|F_1B|=|F_2A|$,所以四边形AF_1BF_2为平行四边形,令$|F_1A|=|F_2B|=m$,则$|F_1B|=|F_2A|=2m$,

由双曲线定义可知$|F_2A|-|F_1A|=2a$,故有 $2m-m=2a$,即 $m=2a$,

即$|F_1A|=|F_2B|=m=2a$,$|F_1B|=|F_2A|=4a$,



$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=|\overrightarrow{F_2A}||\overrightarrow{F_2B}|\cos\angle AF_2B=4a\times2a\cos\angle AF_2B=4a^2$,

则 $\cos\angle AF_2B=\frac{1}{2}$,即$\angle AF_2B=\frac{\pi}{3}$,故$\angle F_2BF_1=\frac{2\pi}{3}$,

则有 $\cos\angle F_2BF_1=\frac{|F_1B|^2+|F_2B|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1B||F_2B|}=\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\times4a\times2a}=-\frac{1}{2}$,

即$\frac{20a^2-4c^2}{16a^2}=-\frac{1}{2}$,即$\frac{20}{16}-\frac{4e^2}{16}=-\frac{1}{2}$,则 $e^2=7$,因为 $e>1$,所以 $e=\sqrt{7}$.故选 D.

7.(2020·全国Ⅲ,理 11)设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,离心率为$\sqrt{5}$.P 是 C 上一点,且 $F_1P\perp F_2P$.若$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4,则 $a=$(A)

A.1 B.2 C.4 D.8

解析 不妨设点 P 在第一象限,设$|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,则 $m>n$,

依题意得,$\begin{cases}\frac{c}{a}=\sqrt{5},\\ \frac{1}{2}mn=4,\\ m^2+n^2=4c^2,\\ m\text{-}n=2a,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

8.(多选题)(2024·山东枣庄模拟)已知曲线C_1:$5x^2+y^2=5$,C_2:$x^2-4y^2=4$,则下列说法正确的有(BC)

A.C_1的长轴长为$\sqrt{5}$

B.C_2的渐近线方程为$x\pm 2y=0$

C.C_1与C_2的离心率互为倒数

D.C_1与C_2的焦点相同