专题 3.7　整式的乘除章末八大题型总结（拔尖篇）

【浙教版】

题型梳理

举一反三

【题型 1　巧用幂的运算逆向运算】

【例 1】（2023 春·安徽蚌埠·八年级统考期末）已知$2^a=3$，$2^b=6$，$2^c=12$，

（1）$2^{c-b}=$______；

（2）a，b，c之间满足的等式关系为______.

【答案】　2　$a+c=2b$

【分析】（1）逆用同底数幂除法法则计算即可；

（2）利用幂的乘方的法则及同底数幂的乘法的法则对式子进行整理即可.

【详解】解：（1）∵$2^b=6$，$2^c=12$，

∴$2^{c-b}=2^c\div2^b=12\div6=2$，

故答案为：2；

（2）∵$2^a\times2^c=2^{a+c}=3\times12=36$，$\left(2^b\right)^2=6^2$，$2^{2b}=36$，

∴$2^{a+c}=2^{2b}$，

∴$a+c=2b$,

故答案为：$a+c=2b$.

【点睛】本题主要考查了积的乘方与幂的乘方，熟练掌握积的乘方与幂的乘方运算法则进行求解是解决本题的关键.

【变式 1-1】(2023 春·江苏苏州·八年级期中)已知常数 a，b 满足$2^{a}\times2^{2b}=8$，且$(5^{a})^{2}\times(5^{2b})^{2}\div(5^{3a})^{b}=1$，求$ab$的值，

【答案】2

【分析】直接利用同底数幂的乘除运算法则将原式变形进而得出答案.

【详解】解：$\because 2^{a}\times2^{2b}=8$，

$\therefore 2^{a+2b}=2^{3}$，

$\therefore a+2b=3$，

$\because (5^{a})^{2}\times(5^{2b})^{2}\div(5^{3a})^{b}=1$，

$\therefore 5^{2a+4b-3ab}=5^{0}$，

$\therefore 2a+4b-3ab=0$，

$\therefore 2(a+2b)-3ab=0$，

$\therefore 2\times3-3ab=0$，

解得：$ab=2$.

【点睛】本题考查同底数幂的乘除运算，正确将原式变形是解题关键.

【变式 1-2】(2023 春·河北石家庄·八年级统考期中)已知$x^{n}=2$，$y^{n}=3$.

(1) $(xy)^{2n}$的值为______；

(2) 若$x^{3n+1}\cdot y^{3n+1}=64$，则$xy$的值为______.

【答案】 36 $\frac{8}{27}$

【分析】(1)利用幂的乘方与积的乘方的法则进行计算，即可得出结果；

(2)利用幂的乘方与积的乘方的法则进行计算，即可得出结果.

【详解】解：(1) $\because x^{n}=2$，$y^{n}=3$，

$\therefore (xy)^{2n}$

$=x^{2n}y^{2n}$

$=(x^{n})^{2}(y^{n})^{2}$

$=2^{2}\times3^{2}$

$=4\times9$

$=36$，

故答案为：36；

(2) $\because x^{3n+1}\cdot y^{3n+1}=64$，

$\therefore x^{3n} \cdot y^{3n} \cdot xy = 64$，

$\therefore (x^n)^3 \cdot (y^n)^3 \cdot xy = 64$，

$\because x^n = 2$，$y^n = 3$，

$\therefore 2^3 \times 3^3 \cdot xy = 64$，

$\therefore xy = \frac{8}{27}$，

故答案为：$\frac{8}{27}$.

【点睛】本题考查了幂的乘方与积的乘方，掌握幂的乘方与积的乘方的法则是解决问题的关键.

【变式 1-3】（2023 春·江苏泰州·八年级统考期中）爱动脑筋的小明在学习《幂的运算》时发现：若 $a^m = a^n(a > 0$，且$a \neq 1$，m、n都是正整数），则$m = n$，例如：若$5^m = 5^4$，则$m = 4$．小明将这个发现与老师分享，并得到老师确认是正确的，请您和小明一起用这个正确的发现解决下面的问题：

(1)如果 $2 \times 4^x \times 32^x = 2^{36}$，求 x 的值；

(2)如果$3^{x+2} + 3^{x+1} = 108$，求 x 的值．

【答案】(1)x=5

(2)x=2

【分析】（1）利用幂的乘方的法则及同底数幂的乘法的法则对式子进行整理，从而可求解；

（2）利用同底数幂的乘法的法则及幂的乘方的法则对式子进行整理，即可求解.

【详解】（1）因为 2×4x×32x=2^{36}，

所以 2×2^2x×2^5x=2^{36}，

即 $2^{1+7}x$=2^{36}，

所以 1+7x=36，

解得：x=5；

（2）因为 $3x^{+2}$+$3x^{+1}$=108，

所以 3×$3x^{+1}$+$3x^{+1}$=4×27，4×$3x^{+1}$=4×3^3，

即 $3x^{+1}$=3^3，

所以 x+1=3，

解得：x=2.

【点睛】本题主要考查幂的乘方，同底数幂的乘法，解答的关键是对相应的运算法则的掌握与运用.

【题型 2　整式乘法中不含某项问题】

【例 2】（2023 春·四川巴中·八年级四川省巴中中学校考期中）若$(x^2+nx+3)(x^2-3x+m)$的展开式中不含x^2和x^3项，则$m+n=$____________.

【答案】9.

【分析】根据展开式中不含x^2和x^3项，即x^2和x^3项的系数为 0 即可求解.

【详解】解：$(x^2+nx+3)(x^2-3x+m)$，

$=x^4-3x^3+mx^2+nx^3-3nx^2+mnx+3x^2-9x+3m$，

$=x^4+(n-3)x^3+(m-3n+3)x^2+(mn-9)x+3m$，

根据展开式中不含x^2和x^3项，列方程组得，

$\begin{cases} n-3=0 \\ m-3n+3=0 \end{cases}$，

解得，$\begin{cases} n=3 \\ m=6 \end{cases}$，

$m+n=9$，

故答案为：9.

【点睛】本题考查整式乘法和二元一次方程组，解题关键是根据多项式中不含某一项时，这一项的系数为 0 列方程组.

【变式 2-1】（2023 秋·甘肃武威·八年级校考期末）老师在黑板上布置了一道题：

已知 $x=-2$，求式子$(2x-y)(2x+y)+(2x-y)(y-4x)+2y(y-3x)$的值.

小亮和小新展开了下面的讨论：

小亮：只知道 x 的值，没有告诉 y 的值，这道题不能做；

小新：这道题与 y 的值无关，可以求解；

根据上述说法，你认为谁说的正确？为什么？

【答案】小新的说法正确，原因见解析

【分析】根据平方差公式，多项式乘以多项式，单项式乘以多项式的计算法则去括号，然后合并同类项化简即可得到答案.

【详解】解：$(2x-y)(2x+y)+(2x-y)(y-4x)+2y(y-3x)$

$=4x^2-y^2+2xy-y^2-8x^2+4xy+2y^2-6xy$

$=-4x^2$，

∴这道题与 y 的值无关，可以求解，

∴小新的说法正确．

【点睛】本题主要考查了平方差公式，多项式乘以多项式，多项式乘以单项式，熟知整式的相关计算法则是解题的关键，注意去括号的时候的符号问题．

【变式 2-2】（2023 秋·河南周口·八年级校考期末）已知$(x^2+mx-3)(2x+n)$的展开式中不含 x 的一次项，常数项是－6，则 mn 的值为______．

【答案】6

【分析】根据多项式乘多项式运算法则进行化简，然后令含 x 的一次项的系数为零以及常数项为-6 即可求出答案．

【详解】解：$(x^2+mx-3)(2x+n)$

$=2x^3+nx^2+2mx^2+mnx-6x-3n$

$=2x^3+(n+2m)x^2+(mn-6)x-3n$，

∵$(x^2+mx-3)(2x+n)$的展开式中不含 x 的一次项，常数项是－6，

∴$\begin{cases} mn-6=0 \\ -3n=-6 \end{cases}$，

∴$mn=6$．

故答案为：6．

【点睛】本题考查多项式乘多项式，解题的关键是熟练运用多项式乘多项式的运算法则，本题属于基础题型．

【变式 2-3】（2023 秋·福建泉州·八年级福建省泉州市培元中学校考期中）已知关于x、y的代数式$(2x+5y^3)(2x-5y^3)-(mx-3)^2+nx$的值与$x$的取值无关，求实数$m$、$n$的值．

【答案】$m=2$，$n=-12$或$m=-2$，$n=12$．

【分析】先对原式进行化简，然后根据代数式的值与x的取值无关令含 x 的项的系数为 0，分情况求出m、n的值即可．

【详解】解：原式$=4x^2-25y^6-(m^2x^2-6mx+9)+nx$

$=4x^2-25y^6-m^2x^2+6mx-9+nx$

$=(4-m^2)x^2-25y^6+(6m+n)x-9$，

∵代数式$(2x+5y^3)(2x-5y^3)-(mx-3)^2+nx$的值与$x$的取值无关，

∴$4-m^2=0$，$6m+n=0$，

∴$m=\pm 2$，

当$m=2$ 时，由 $6m+n=0$ 可得 $12+n=0$，

解得：$n=-12$，

当$m=-2$时，由$6m+n=0$可得$-12+n=0$，

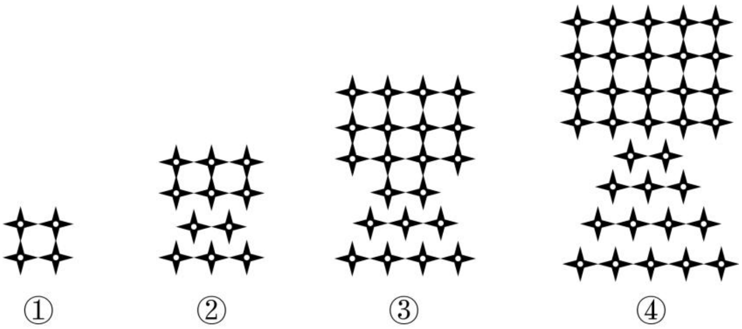
解得：$n=12$，

∴$m=2$，$n=-12$或$m=-2$，$n=12$．

【点睛】本题考查了整式的混合运算，求一个数的平方根，熟练掌握平方差公式和完全平方公式是解题的关键．

【题型 3 多项式乘法中的规律性问题】

【例 3】（2023 春·甘肃张掖·八年级校考期末）下列图像都是由相同大小的星星按一定规律组成的，其中第①个图形中一共有 4 颗星星，第②个图形中一共有 11 颗星星，第③个图形中一共有 21 颗星星，……按此规律排列下去，第⑨个图形中星星的颗数为______．



【答案】144

【分析】根据题意将每个图形都看作两部分，一部分是上面的构成规则的矩形，另一部分是构成下面的近似金字塔的形状，然后根据递增关系即可得到答案．

【详解】第①个图形中星星的颗数$4=2+1\times2$；

第②个图形中星星的颗数$11=2+3+2\times3$；

第③个图形中星星的颗数$21=2+3+4+3\times4$；

第④个图形中星星的颗数$34=2+3+4+5+4\times5$；

……

∴第n个图形中星星的颗数

$=2+3+4+5+\cdots+n+(n+1)+n(n+1)$

$=\frac{(2+n+1)n}{2}+n(n+1)$

$=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n$

∴当$n=9$时，$\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n=\frac{3}{2}\times9^2+\frac{5}{2}\times9=144$，

∴第⑨个图形中的星星颗数为 144 颗，

故答案为：144

【点睛】本题考查了图形变化规律，正确地得到每个图形中小星星的数字变化情况是解题的关键．

【变式 3-1】（2023 春·重庆·八年级校考期中）我国古代数学的许多发现都曾位居世界前列，其中“杨辉三角”就是一例．如图，这个三角形的构造法则：两腰上的数都是 1，其余每个数均为其上方左右两数之和，它给出了（$a+b$）n（n 为正整数）的展开式（按 a 的次数由大到小的顺序排列）的系数规律．例如，在三角形中第三行的三个数 1，2，1，恰好对应（$a+b$）^{2}＝a^2+2ab+b^2 展开式中的系数；第四行的四个数 1，3，3，1，恰好对应着（$a+b$）^{3}＝a^3+3a^2b+3ab^2+b^2 展开式中的系数等等．

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

…… ……

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

（1）根据上面的规律，则（$a+b$）^{5} 的展开式＝_____．

（2）$(a+b)^n$的展开式共有______项，系数和为_______．

（3）利用上面的规律计算：$2^5-5\times2^4+10\times2^3-10\times2^2+5\times2-1$．

（4）运用：若今天是星期二，经过 8^{100} 天后是星期_．

【答案】（1）a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5；（2）$n+1,2^n$；（3）1；（4）三

【分析】（1）根据得出的系数规律，将原式展开即可；

（2）直接根据得出的规律即可求解；

（3）利用规律计算原式即可得到结果；

（4）由 $8^{100}=(7+1)^{100}$，根据得出的规律即可求解．

【详解】解：（1）（a+b）^{5}=$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$；

（2）∵$(a+b)^n$的展开式是按照 a 的指数从 n 到 0 进行降幂排列，

∴$(a+b)^n$的展开式共有$n+1$ 项，从规律可发现系数和为2^n；

（3）令（1）中 a=2，b=-1，得：$2^5-5\times2^4+10\times2^3-10\times2^2+5\times2-1$=（2-1）^{5}=1；

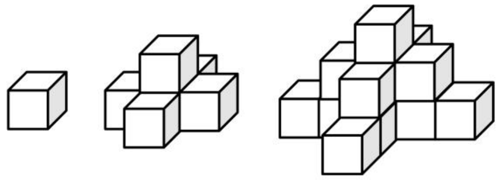
（4）$8^{100}=(7+1)^{100}$

根据规律可知，$(7+1)^{100}$除以 7 余数为 1，

∴若今天是星期二，经过 8^{100} 天后是星期三．

【点睛】此题考查了完全平方公式，找出题中的规律是解本题的关键．

【变式 3-2】（2023 春·广东深圳·八年级深圳中学校考开学考试）图（1）是一个水平摆放的小正方体木块，图（2）、（3）是由这样的小正方体木块叠放而成，按照这样的规律继续叠放下去，至第n个叠放的图形中，小正方体木块总数应是______.



(1)　　(2)　　(3)

【答案】$2n^2-n$

【分析】图（1）中只有一层，有$(4\times0+1)$一个正方体，图（2）中有两层，在图（1）的基础上增加了一层，第二层有$(4\times1+1)$个．图（3）中有三层，在图（2）的基础长增加了一层，第三层有$(4\times2+1)$，依此类推出第 n 层正方体的个数，即可推出当有 n 层时总的正方体个数.

【详解】解：经分析，可知：第一层的正方体个数为$(4\times0+1)$，

第二层的正方体个数为$(4\times1+1)$，

第三层的正方体个数为$(4\times2+1)$，

……

第 n 层的个数为：$[4(n-1)+1]$，

第 n 个叠放的图形中，小正方体木块总数为：

$1+(4\times1+1)+(4\times2+1)+\cdots+[4(n-2)+1]+[4(n-1)+1]$

$=n+4(1+2+3+\cdots+n-2+n-1)$

$=n+4\times\dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2}$

$=n+2n(n-1)$

$=2n^2-n$.

故答案为：$2n^2-n$

【点睛】本题解题关键是根据图形的变换总结规律，由图形变换得规律：每次都比上一次增加一层，增加第 n 层时小正方体共增加了$[4(n-1)+1]$个，将 n 层的小正方体个数相加即可得到总的小正方体个数.

【变式 3-3】（2023 春·北京昌平·八年级北京市昌平区第二中学校考期中）阅读以下材料：

$(x-1)(x+1)=x^2-1$；

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$；

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$……

（1）根据以上规律，$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$=________ ；

（2）利用（1）的结论，求 $1+5+5^2+5^3+5^4+5^5+\cdots+5^{2018}+5^{2019}+5^{2000}$的值

【答案】（1）x^n-1；（2）$\frac{5^{2001}-1}{4}$

【分析】（1）仔细观察上式就可以发现得数中 x 的指数是式子中 x 的最高指数减 1，根据此规律就可求出本题.

（2）不难看出所求式子是材料中等号左边式子的一个因式，将所求式子转化成 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$形式，即可利用（1）的结论进行求解.

【详解】（1）$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$中最高次项为$x\bullet x^{n-1}=x^n$，

所以$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$=$x^n$-1；

（2）$1+5+5^2+5^3+5^4+5^5+\cdots+5^{2018}+5^{2019}+5^{2000}$

=$\frac{1}{4}$（5-1）（$1+5+5^2+5^3+5^4+5^5+\cdots+5^{2018}+5^{2019}+5^{2000}$）

=$\frac{5^{2001}-1}{4}$

【点睛】仔细观察式子，总结出运算规律，是解决此类题的关键.

【题型 4　巧用乘法公式求值】

【例 4】（2023 春·湖南益阳·八年级统考期中）使用整式乘法法则与公式可以使计算简便，请利用法则或公式计算下列各题

(1)已知$a+\frac{1}{a}=5$，求$a^2+\frac{1}{a^2}$的值

(2)计算：$2-2^2-2^3-\cdots-2^{18}-2^{19}+2^{20}$（写计算过程）

(3)设 a，b，c，d 都是正整数，并且$a^5=b^4$，$c^3=d^2$，$c-a=19$ 求$d-b$的值.

【答案】(1)$a^2+\frac{1}{a^2}=23$

(2)6

(3)$d-b=757$

【分析】（1）利用完全平方公式变形计算即可；

（2）将原式变形为$2^{20}-2^{19}-2^{18}-\cdots-2^3-2^2+2$，然后依次进行运算即可；

（3）根据已知条件得出$a=\frac{b^4}{a^4}=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2$，$c=\frac{d^2}{c^2}=\left(\frac{d}{c}\right)^2$，根据$c-a=19$，得出$\left(\frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}\right)=19$，根据 a，b，c，d 都是正整数，$\frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}>\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}$，得出$\frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}=19$，$\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}=1$，求出$d=10c$，$b=3a$，根据$d=10c$，

$b=3a$，$a^5=b^4$，$c^3=d^2$，得出$c=100$，$d=10c=1000$，根据$c-a=19$，得出$a=c-19=100-19=81$，求出$b=3a=243$，即可得出答案.

【详解】（1）解：$\because\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$，

$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=5^2-2=23$.

（2）解：$2-2^2-2^3-\cdots-2^{18}-2^{19}+2^{20}$

$=2^{20}-2^{19}-2^{18}-\cdots-2^3-2^2+2$

$=2^{19}(2-1)-2^{18}-\cdots-2^3-2^2+2$

$=2^{19}-2^{18}-\cdots-2^3-2^2+2$

$=2^{18}(2-1)-2^{17}-\cdots-2^3-2^2+2$

$=2^{18}-2^{17}-\cdots-2^3-2^2+2$

$=\cdots$

$=2^2+2$

$=4+2$

$=6$.

（3）解：$\because a^5=b^4$，

$\therefore a=\frac{b^4}{a^4}=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2$，

$\because c^3=d^2$，

$\therefore c=\frac{d^2}{c^2}=\left(\frac{d}{c}\right)^2$，

$\because c-a=19$，

$\therefore\left(\frac{d}{c}\right)^2-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2=19$，

即$\left(\frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}\right)=19$，

$\because a$，b，c，d都是正整数，

又$\because a=\frac{b^4}{a^4}=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2$，$c=\frac{d^2}{c^2}=\left(\frac{d}{c}\right)^2$，

$\therefore\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2$，$\left(\frac{d}{c}\right)^2$为正整数，

$\therefore\frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}$为正整数，

$\because\left(\frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}\right)=19$，

$\therefore \frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}$为正整数，

$\because \frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}>\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}$，

$\therefore \frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}=19$，$\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}=1$，

$\therefore \frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}+\left(\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{2d}{c}=19+1=20$，

$\therefore \frac{d}{c}=10$，

即$d=10c$，

$\because \frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{d}{c}-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{2b^2}{a^2}=19-1=18$，

$\therefore \frac{b^2}{a^2}=9$，

即$b^2=9a^2$，

$\because a$，b，c，d都是正整数，

$\therefore b=3a$，

$\because d=10c$，$b=3a$，$a^5=b^4$，$c^3=d^2$，

$\therefore c^3=d^2=(10c)^2=100c^2$，

解得：$c=100$，

则$d=10c=1000$，

$\because c-a=19$，

$\therefore a=c-19=100-19=81$，

$\therefore b=3a=243$，

$\therefore d-b=1000-243=757$．

【点睛】本题主要考查了完全平方公式的变形应用，数字规律计算，解题的关键是熟练掌握完全平方公式，准确计算．

【变式4-1】（2023春·四川内江·八年级四川省内江市第六中学校考开学考试）已知x满足（x﹣2020）^{2}+（2023﹣x）^{2}＝10，则（x﹣2021）^{2}的值是_____．

【答案】4

【分析】根据题意原式可化为[（x﹣2021）+1]^2+[（x﹣2021）﹣1]^2＝10，再应用完全平方公式可化为（x﹣2021）^{2}+2（x﹣2021）+1+（x﹣2021）^{2}﹣2（x﹣2021）+1＝10，应用整体思想合并同类项，即可得出答案．

【详解】解：∵（x﹣2020）^{2}+（x﹣2022）^{2}＝10

∴[（x - 2021）+1]^2+[（x - 2021） - 1]^2＝10，

∴（x - 2021）^{2}+2（x - 2021）+1+（x - 2021）^{2} - 2（x - 2021）+1＝10，

∴2（x - 2021）^{2}+2＝10，

∴（x - 2021）^{2}＝4．

故答案为：4．

【点睛】本题考查了完全平方公式：（a±b）^{2}＝a^2±$2ab$＋b^2，熟练掌握完全平方公式的结构特征是解题的关键．

【变式 4-2】（2023 春·浙江杭州·八年级校考期中）已知：$x^2+xy=10$，$y^2+xy=6$，$x-y=-1$，则：（1）$x+y=$________．（2）求 x，y 的值分别为________．

【答案】　-4　　$x=-\frac{5}{2}$，$y=\frac{3}{2}$

【分析】由$(x^2+xy)-(y^2+xy)$可得$(x+y)(x-y)=4$，再根据$x-y=-1$，可得$x+y=-4$，可得$\begin{cases}x+y=-4\\x-y=-1\end{cases}$，进而可得 x，y 的值．

【详解】解：∵$x^2+xy=10$，$y^2+xy=6$，

∴$(x^2+xy)-(y^2+xy)=10-6=4$，即：$x^2-y^2=4$，

∴$(x+y)(x-y)=4$，

∵$x-y=-1$，

∴$x+y=-4$，

可得$\begin{cases}x+y=-4\\x-y=-1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=-\frac{5}{2}\\y=-\frac{3}{2}\end{cases}$

即：x，y 的值分别为$x=-\frac{5}{2}$，$y=\frac{3}{2}$；

故答案为：-4；$x=-\frac{5}{2}$，$y=\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查平方差公式及其变形，由$(x^2+xy)-(y^2+xy)$得到$(x+y)(x-y)=4$是解决问题的关键．

【变式 4-3】（2023 春·湖南张家界·八年级统考期中）已知$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$．

(1)$(2-1)(2+1)(2^2+1)=$______；

(2)求$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$的值；

(3)求 $2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$结果的个位数字．

【答案】(1)15

(2)$2^{32}-1$

(3)0

【分析】（1）根据平方差公式求出即可；

（2）添加上$(2-1)$，重复根据平方差公式依次求出，即可得出答案；

（3）根据（2）的规律，多次利用平方差公式即可得出答案．

【详解】（1）解：$(2-1)(2+1)(2^2+1)=(2^2-1)(2^2+1)=2^4-1=15$；

故答案为：15；

（2）$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$；

（3）$2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\ldots(3^{32}+1)$

$=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$=(3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$=(3^{16}-1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$=(3^{32}-1)(3^{32}+1)$

$=3^{64}-1$；

$\because 3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，$3^5=243$，$\ldots$，

可知3^n的个位数呈 3、9、7、1…循环，

$64\div4=16$，

$\therefore 3^{64}$的个位数是 1，

$\therefore 3^{64}-1$ 的个位数是 0．

即 $2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\ldots(3^{32}+1)$结果的个位数字是 0．

【点睛】本题考查了平方差公式的应用，解此题的关键是重复运用平方差公式，根据结果得出规律，题目比

较好，有一定的难度．

【题型 5　乘法公式的几何背景】

【例 5】（2023 秋·江苏淮安·八年级淮安市浦东实验中学校考开学考试）【知识生成】

【知识生成】我们已经知道，通过计算几何图形的面积可以表示一些代数恒等式．例如图 1 可以得到$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，基于此，请解答下列问题：

【直接应用】（1）若$x+y=3$，$x^2+y^2=5$，求xy的值；

【类比应用】（2）填空：①若$x(3-x)=1$，则$x^2+(x-3)^2=$______；

②若$(x-3)(x-4)=1$，则$(x-3)^2+(x-4)^2=$______；

【知识迁移】（3）两块全等的特制直角三角板($\angle AOB=\angle COD=90°$)如图 2 所示放置，其中$A$，$O$，$D$在一直线上，连接$AC$，$BD$．若$AD=16$，$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOD}=68$，求一块直角三角板的面积．

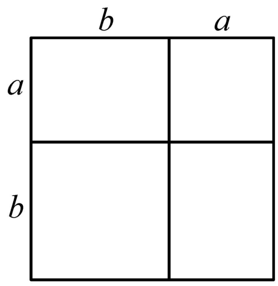


图1

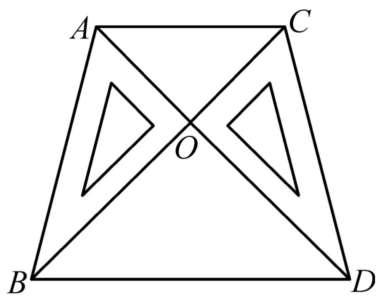


图2

【答案】（1）$xy=2$；（2）①7；②3；（3）30．

【分析】（1）根据完全平方公式的变形可得答案；

（2）①设$x=m$，$3-x=n$，则$mn=1$，$m+n=3$，由$x^2+(x-3)^2=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$进行计算即可；

②设$x-3=a$，$x-4=b$，则$ab=(x-3)(x-4)=1$，$a-b=1$，由$(x-3)^2+(x-4)^2=a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$进行计算即可；

（3）设$AO=p$，$DO=q$，由题意可得，$p+q=16$，$p^2+q^2=136$，由 $2pq=(p+q)^2-(p^2+q^2)$求出$\frac{1}{2}pq$的值即可．

【详解】解：（1）$\because x+y=3$，

$\therefore (x+y)^2=9$，

$\therefore x^2+2xy+y^2=9$，

$\because x^2+y^2=5$，

$\therefore xy=\frac{9-5}{2}=2$，

答：$xy=2$；

（2）①设$x=m$，$3-x=n$，则$mn=1$，$m+n=3$，

$\therefore x^2+(x-3)^2=m^2+n^2$

$=(m+n)^2-2mn$

$=9-2$

$=7$，

故答案为：7；

②设$x-3=a$，$x-4=b$，则$ab=(x-3)(x-4)=1$，$a-b=1$，

$\therefore (x-3)^2+(x-4)^2=a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=1+2$

$=3$，

故答案为：3；

（3）设$AO=p$，$DO=q$，

$\because AD=16$，$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOD}=68$，

$\therefore p+q=16$，$\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2=68$，

即$p+q=16$，$p^2+q^2=136$，

$\therefore 2pq=(p+q)^2-(p^2+q^2)$

$=16^2-136$，

即$pq=60$，

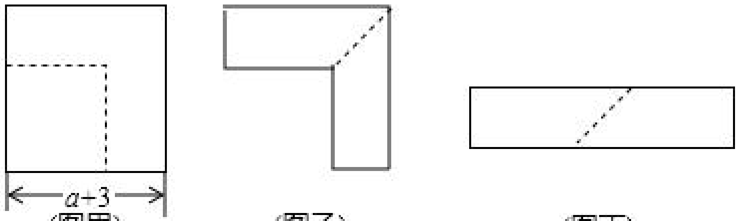
$\therefore S_{直角三角板}=\frac{1}{2}pq=30$，

答：一块直角三角板的面积为 30．

【点睛】本题考查完全平方公式的几何背景，多项式乘多项式，掌握完全平方公式的结构特征是正确解答的前提，掌握完全平方公式的变形是正确解答的关键．

【变式 5-1】（2023 春·全国·八年级期末）工厂接到订单，需要边长为（a+3）和 3 的两种正方形卡纸．

（1）仓库只有边长为（a+3）的正方形卡纸，现决定将部分边长为（a+3）的正方形纸片，按图甲所示裁剪得边长为 3 的正方形．



(图甲)　　(图乙)　　(图丙)

①如图乙，求裁剪正方形后剩余部分的面积（用含 a 代数式来表示）；

②剩余部分沿虚线又剪拼成一个如图丙所示长方形（不重叠无缝隙），则拼成的长方形的边长多少？（用含 a 代数式来表示）；

（2）若将裁得正方形与原有正方形卡纸放入长方体盒子底部，按图 1，图 2 两种方式放置（图 1，图 2 中两张正方形纸片均有部分重叠），盒子底部中未被这两张正方形纸片覆盖的部分用阴影表示，设图 1 中阴影部分的面积为 S_1，图 2 中阴影部分的面积为 S_2 测得盒子底部长方形长比宽多 3，则 S_2-S_1 的值为_____.

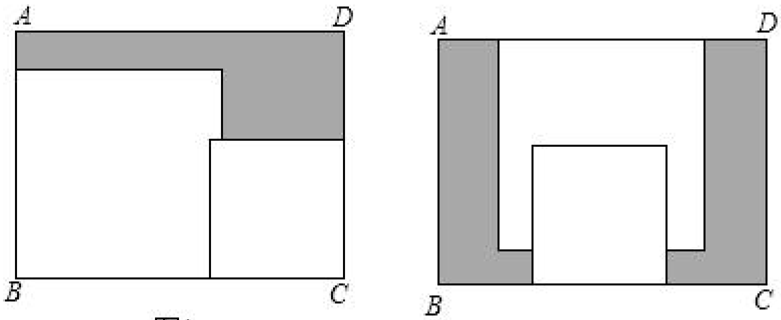


图1　　图2

【答案】（1）①裁剪正方形后剩余部分的面积＝a^2+6a；②拼成的长方形的边长分别为 a 和 a+6；（2）9.

【分析】（1）①根据面积差可得结论；

②根据图形可以直接得结论；

（2）分别计算 S_2 和 S_1 的值，相减可得结论．

【详解】（1）①裁剪正方形后剩余部分的面积=（$a+3$）$^2-3^2$=（$a+3-3$）（$a+3+3$）=a（$a+6$）=a^2+6a；

②拼成的长方形的宽是：$a+3-3=a$，∴长为 $a+6$，则拼成的长方形的边长分别为 a 和 $a+6$；

（2）设 $AB=x$，则 $BC=x+3$，∴图 1 中阴影部分的面积为 $S_1=x(x+3)-(a+3)^2-3^2+3(a+6-x-3)$，图 2 中阴影部分的面积为 $S_2=x(x+3)-(a+3)^2-3^2+3(a+6-x)$，∴$S_2-S_1$ 的值=$3(a+6-x)-3(a+6-x-3)=3\times3=9$.