4.3.1 等比数列的概念

情景导入

1. **两河流域发掘的古巴比伦时期的泥板上记录了下面的数列：**

9, 92, 93, ⋯, 910; ①

$100, 100^2, 100^3, \cdots, 10010;$ ②

5, 52, 53, ⋯, 510; ③

情景导入

2.《庄子·天下》中提到：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”如果把“一尺之棰”的长度看成单位“1”，那么从第1天开始，各天得到的“棰”的长度依次是：

设木棰长度为

第一天取半	第二天取半	第三天取半	第四天取半	…	第n天取半
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$

情景导入

3. 在营养和生存空间没有限制的情况下，某种细菌每20 min就通过分裂繁殖一代，那么一个这种细菌从第1次分裂开始，各次分裂产生的后代个数依次是：

分裂次数	—	细菌个数
第一次	00	2
第二次	000	4
第三次		8
	……	
第 n 次	●00	2m

2, 4, 8, 16, 32, 64, …⑤

探究新知

思考： 请同学们仔细观察以下五个数列，类比等差数列的研究，你认为可以通过**怎样的运算**发现以下数列的取值规律?你发现了什么规律?

9, 92, 9^3, ⋯, 910; ①

100, 100^2, 100^3, ⋯, 10010; ②

5, 52, 5, ⋯, 510; ③

2本1632. ⋯ ④

2, 4, 8, 16, 32, 64, ⋯⑤

如果用{a, }表示数列①, 那么有

$$\frac{a_2}{a_1}=9, \frac{a_3}{a_2}=9, \cdots, \frac{a_{10}}{a_9}=9$$

取值规律： 从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于9.

共同特点：从第二项起，每一项与前一项的比都等于同一个常数.

探究新知

探究1：类比等差数列的概念，你能抽象出等比数列的概念吗？

等差数列

定义

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列.

常数叫做等差数列的公差.

公差通常用字母d表示

符号

$a-a_{n-1}=d$ ($n\in N^*$且$n\geq 2$)

等比数列

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比_都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列.

常数叫做等_比_数列的公 比

公比通常用字母q表示($q\neq 0$)

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$ [illegible]

小试牛刀

1. 观察并判断下列数列是否是等比数列，是的话，指出公比，不是的话请说明理由：

$(1)\ 1, 2, 4, 8, \cdots;$

$(2)\ 4, -8, 16, -32, 64, \cdots;$

$(3)\ 5, 5, 5, 5, 5, 5, \cdots$

$(4)\ 0, 1, 2, 4, 8, \cdots$

$(5)\ 2, 0, 2, 0, 2, \cdots$

$(6)\ 1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$

探究新知

思考1：等差数列的项、公差均可以是0吗?等比数列呢?

等差数列的项、公差均可以是0,

但等比数列的项和公比均不可以是0

思考2：常数列是等差数列吗?是等比数列吗?

常数列一定是等差数列，公差为0;

非零常数列是等比数列，公比为1.

思考3:是否存在既是等差数列又是等比数列的数列?

非零常数列既是等差数列又是等比数列,

公差为0,公比为1.

探究新知

探究2:类比等差中项的概念，你能抽象出等比中项的概念吗?

等差中项	等比中项
定义：如果三个数a,A,b 组成等差数列，那么A叫做a和b的等差中项.	如果三个数a, G, b 组成等比数列，那么G叫做a和b的等比中项.
关系：a,A,b 成等差数列 ⟺ A=“2	a,G,b 成等比数列 → $G^2=a\cdot b$ 即G=± √ab

系

注意：若a, b同号，则有两个等比中项；若a, b异号，则无等比中项.

探究新知

探究3：类比等差数列的通项公式，你能根据等比数列的定义推导它的通项公式吗？

等差数列

$\because a_2=a_1+d,$

$a_3=a_2+d=a_1+2d,$

$a_4=a_3+d=a_1+3d,$

…

$\therefore a=a_1+(n-1)d$

等比数列

$\because a_2=a_1 9,$

$a_3=a_2 q=a_1 q^2,$

$a_4=a_3 q=a_1 q^3,$

…

$\therefore a_n=a_1 9^{n-1}$

不完全归纳法

探究新知

等差数列

累加法

$$\left.\begin{array}{l} a_2-a_1=d \\ a_3-a_2=d \\ a_4-a_3=d \\ \cdots \\ a_n-a_{n-1}=d \end{array}\right\}(n-1)\text{个}$$

累加，得$a_n-a_1=(n-1)d$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d$

等比数列

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_2}{a_1}=q \\ \dfrac{a_3}{a_2}=q \\ \cdots \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q \end{array}\right\}(n-1)\text{个}$$

累乘法

累乘，得$\dfrac{a_n}{a_1}=q^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1 q^{n-1}$

探究新知

等比数列的通项公式：　$a=a_1q^{n-1}$

思考：已知等比数列的第m项a_m，　公比为q，　求通项公式a_n

$n-M$

$\therefore a_n = a_m q^{n-m}$

等比数列的任意一项都可以由该数列的某一项和公比表示