

# 浙江省湖州市重点中学 2023-2024 学年高三 4 月第二次高考模拟数学试题理试题

注意事项:

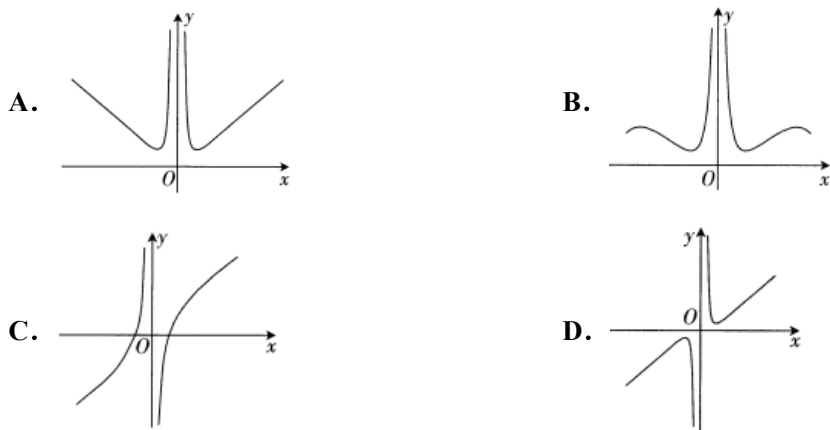
1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数  $f(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + m$ , 当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ , 则  $m =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C. 1                      D.  $\frac{7}{2}$

2. 函数  $f(x) = |x| - \frac{\ln|x|}{x^2}$  的图象大致为 ( )



3. 已知定义在  $[1, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(3x) = 3f(x)$ , 且当  $1 \leq x \leq 3$  时,  $f(x) = 1 - |x - 2|$ , 则方程

$f(x) = f(2019)$  的最小实根的值 ( )

- A. 168                      B. 249                      C. 411                      D. 561

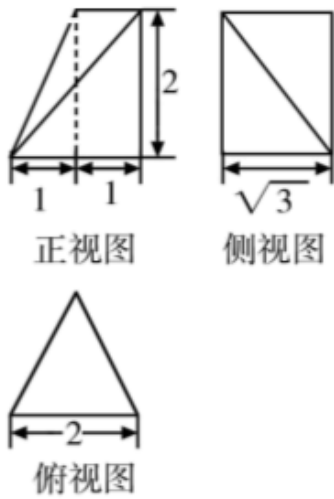
4. 设  $a, b \in (1, +\infty)$ , 则“ $a > b$ ”是“ $\log_a b < 1$ ”的 ( )

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

5. 若函数  $f(x) = x \ln x - ax^2$  有两个极值点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$                       B.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$                       C.  $(1, 2)$                       D.  $(2, e)$

6. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的最长棱的长为 ( )



- A.  $2\sqrt{5}$       B. 4      C. 2      D.  $2\sqrt{2}$

7. 设全集  $U=\mathbf{R}$ , 集合  $M = \{x | x^2 \leq x\}$ ,  $N = \{x | 2^x < 1\}$ , 则  $M \cap \complement_U N = ( \quad )$

- A.  $[0,1]$       B.  $(0,1]$       C.  $[0,1)$       D.  $(-\infty,1]$

8. 若实数  $x, y$  满足的约束条件  $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的取值范围是 ( )

- A.  $[4, +\infty)$       B.  $[0,6]$       C.  $[0,4]$       D.  $[6, +\infty)$

9. 设  $\alpha, \beta \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ , 则 " $\alpha = \beta$ " 是 " $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$ " 的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件      C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

10. 若  $(1+2ai)i = 1-bi$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $|a+bi| = ( \quad )$ .

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\sqrt{5}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       D. 5

11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的方程  $f[f(x)] = 0$  有且只有一个实数根, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$       B.  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$   
 C.  $(-\infty, 0)$       D.  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

12. 已知函数  $f(x) = a(e^2x - 2\ln x)$  ( $a > 0$ ),  $D = \left[\frac{1}{e}, 1\right]$  若所有点  $(s, f(t))$ , ( $s, t \in D$ ) 所构成的平面区域面积为

$e^2 - 1$ , 则  $a = ( \quad )$

- A.  $e$                       B.  $\frac{1}{e-2}$                       C. 1                      D.  $\frac{e}{e-2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n - 1 (n \in N^*)$ ，则  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ . 若存在  $n \in N^*$  使得  $a_n \leq \frac{n+1}{n} \cdot \lambda$  成立，

则实数  $\lambda$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  的右准线与渐近线的交点在抛物线  $y^2 = 2px$  上，则实数  $p$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 已知点  $A(0, -1)$  是抛物线  $x^2 = 2py$  的准线上一点， $F$  为抛物线的焦点， $P$  为抛物线上的点，且  $|PF| = m|PA|$ ，若双曲线  $C$  中心在原点， $F$  是它的一个焦点，且过  $P$  点，当  $m$  取最小值时，双曲线  $C$  的离心率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4x^2 + 8x}, & -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x \leq -2, x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数  $g(x) = a|f(x)| + 1$  有 6 个零点，则实数  $a$  的取值范围

是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设函数  $f(x) = ax(2 + \cos x) - \sin x$ ， $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导数.

(1) 若  $a = 1$ ，证明  $f'(x)$  在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上没有零点；

(2) 在  $x \in (0, +\infty)$  上  $f(x) > 0$  恒成立，求  $a$  的取值范围.

18. (12 分) 语音交互是人工智能的方向之一，现在市场上流行多种可实现语音交互的智能音箱. 主要代表有小米公司的“小爱同学”智能音箱和阿里巴巴的“天猫精灵”智能音箱，它们可以通过语音交互满足人们的部分需求. 某经销商为了了解不同智能音箱与其购买者性别之间的关联程度，从某地区随机抽取了 100 名购买“小爱同学”和 100 名购买“天猫精灵”的人，具体数据如下：

	“小爱同学”智能音箱	“天猫精灵”智能音箱	合计
男	45	60	105
女	55	40	95
合计	100	100	200

(1) 若该地区共有 13000 人购买了“小爱同学”，有 12000 人购买了“天猫精灵”，试估计该地区购买“小爱同学”的女性比购买“天猫精灵”的女性多多少人？

(2) 根据列联表，能否有 95% 的把握认为购买“小爱同学”、“天猫精灵”与性别有关？

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$k$	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,  $(\sin A + \sin B)(a - b) = c(\sin C - \sin B)$ ,

$a = 2\sqrt{7}$ , 且 $V_{ABC}$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ .

(1)求 $A$ ;

(2)求 $V_{ABC}$ 的周长.

20. (12分) 在综合素质评价的某个维度的测评中, 依据评分细则, 学生之间相互打分, 最终将所有的数据合成一个分数, 满分100分, 按照大于或等于80分的为优秀, 小于80分的为合格, 为了解学生的在该维度的测评结果, 在毕业班中随机抽出一个班的数据. 该班共有60名学生, 得到如下的列联表:

	优秀	合格	总计
男生	6		
女生		18	
合计			60

已知在该班随机抽取1人测评结果为优秀的概率为 $\frac{1}{3}$ .

(1)完成上面的列联表;

(2)能否在犯错误的概率不超过0.10的前提下认为性别与测评结果有关系?

(3)现在如果了解全校学生在该维度的表现情况, 采取简单随机抽样方式在全校学生中抽取少数一部分来分析, 请选择一个合适的抽样方法, 并解释理由.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.25	0.10	0.025
$k$	1.323	2.706	5.024

21. (12分) 已知直线 $y = x - 1$ 是曲线 $f(x) = a \ln x$ 的切线.

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式,

(2) 若  $t \leq 3 - 4 \ln 2$ , 证明: 对于任意  $m > 0$ ,  $h(x) = mx - \sqrt{x} + f(x) + t$  有且仅有一个零点.

22. (10分) 已知函数  $f(x) = \frac{\ln x + ax + 1}{x}$ .

(1) 若对任意  $x > 0$ ,  $f(x) < 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若函数  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 证明:  $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} > 2$ .

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

由降幂公式, 两角和的正弦公式化函数为一个角的一个三角函数形式, 然后由正弦函数性质求得参数值.

【详解】

$$f(x) = 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + m = 1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + m = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + m + 1,$$

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}], \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{1}{2}, 1], \therefore f(x) \in [m, m+3],$$

$$\text{由题意 } [m, m+3] = [\frac{1}{2}, \frac{7}{2}], \therefore m = \frac{1}{2}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查二倍角公式, 考查两角和的正弦公式, 考查正弦函数性质, 掌握正弦函数性质是解题关键.

2、A

【解析】

根据函数  $f(x)$  的奇偶性和单调性, 排除错误选项, 从而得出正确选项.

【详解】

因为  $f(-x) = f(x)$ , 所以  $f(x)$  是偶函数, 排除 C 和 D.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{x^3 + 2 \ln x - 1}{x^3},$$

令  $f'(x) < 0$ , 得  $0 < x < 1$ , 即  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上递减; 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > 1$ , 即  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上递增. 所以  $f(x)$

在  $x = 1$  处取得极小值, 排除 B.

故选: A

### 【点睛】

本小题主要考查函数图像的识别, 考查利用导数研究函数的单调区间和极值, 属于中档题.

3、C

### 【解析】

先确定解析式求出  $f(2019)$  的函数值, 然后判断出方程  $f(x) = f(2019)$  的最小实根的范围结合此时的  $f(x) = x - 3^5$ ,

通过计算即可得到答案.

### 【详解】

当  $x \geq 1$  时,  $f(3x) = 3f(x)$ , 所以  $f(x) = 3f\left(\frac{x}{3}\right) = 3^2 f\left(\frac{x}{3^2}\right) = \dots = 3^n f\left(\frac{x}{3^n}\right)$ , 故当

$$3^n \leq x \leq 3^{n+1} \text{ 时, } \frac{x}{3^n} \in [1, 3], \text{ 所以 } f(x) = 3^n \left(1 - \left|\frac{x}{3^n} - 2\right|\right) = \begin{cases} 3^{n+1} - x, & x \geq 2 \cdot 3^n \\ x - 3^n, & x < 2 \cdot 3^n \end{cases}, \text{ 而}$$

$$2019 \in [3^6, 3^7], \text{ 所以 } f(2019) = 3^6 \left(1 - \left|\frac{2019}{3^6} - 2\right|\right) = 3^7 - 2109 = 168, \text{ 又当 } 1 \leq x \leq 3 \text{ 时,}$$

$f(x)$  的极大值为 1, 所以当  $3^n \leq x \leq 3^{n+1}$  时,  $f(x)$  的极大值为  $3^n$ , 设方程  $f(x) = 168$

的最小实根为  $t$ ,  $168 \in [3^4, 3^5]$ , 则  $t \in \left(3^5, \frac{3^5 + 3^6}{2}\right)$ , 即  $t \in (243, 468)$ , 此时  $f(x) = x - 3^5$

令  $f(x) = x - 3^5 = 168$ , 得  $t = 243 + 168 = 411$ , 所以最小实根为 411.

故选: C.

### 【点睛】

本题考查函数与方程的根的最小值问题, 涉及函数极大值、函数解析式的求法等知识, 本题有一定的难度及高度, 是一道有较好区分度的压轴选这题.

4、C

### 【解析】

根据充分条件和必要条件的定义结合对数的运算进行判断即可.

**【详解】**

$\because a, b \in (1, +\infty)$ ,

$\therefore a > b \Rightarrow \log_a b < 1$ ,

$\log_a b < 1 \Rightarrow a > b$ ,

$\therefore a > b$  是  $\log_a b < 1$  的充分必要条件,

故选 C.

**【点睛】**

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 根据不等式的解法是解决本题的关键.

5、A

**【解析】**

试题分析: 由题意得  $f'(x) = \ln x + 1 - 2ax = 0$  有两个不相等的实数根, 所以  $f''(x) = \frac{1}{x} - 2a = 0$  必有解, 则  $a > 0$ ,

且  $f'\left(\frac{1}{2a}\right) > 0$ ,  $\therefore 0 < a < \frac{1}{2}$ .

考点: 利用导数研究函数极值点

**【方法点睛】** 函数极值问题的常见类型及解题策略

(1) 知图判断函数极值的情况. 先找导数为 0 的点, 再判断导数为 0 的点的左、右两侧的导数符号.

(2) 已知函数求极值. 求  $f'(x)$   $\rightarrow$  求方程  $f'(x) = 0$  的根  $\rightarrow$  列表检验  $f'(x)$  在  $f'(x) = 0$  的根的附近两侧的符号  $\rightarrow$  下结论.

(3) 已知极值求参数. 若函数  $f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  处取得极值, 则  $f'(x_0) = 0$ , 且在该点左、右两侧的导数值符号相反.

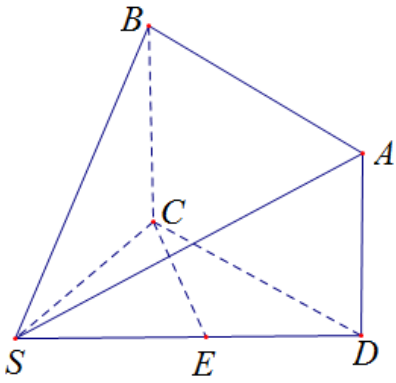
6、D

**【解析】**

先根据三视图还原几何体是一个四棱锥, 根据三视图的数据, 计算各棱的长度.

**【详解】**

根据三视图可知, 几何体是一个四棱锥, 如图所示:



由三视图知： $|AD|=2$ ， $|AE|=\sqrt{3}$ ， $|SD|=2$ ，

所以 $|SC|=|DC|=2$ ，

所以 $|SA|=\sqrt{|SD|^2+|AD|^2}=2\sqrt{2}$ ， $|SB|=\sqrt{|SC|^2+|BC|^2}=2\sqrt{2}$ ，

所以该几何体的最长棱的长为 $2\sqrt{2}$

故选：D

**【点睛】**

本题主要考查三视图的应用，还考查了空间想象和运算求解的能力，属于中档题。

7、A

**【解析】**

求出集合M和集合N，利用集合交集补集的定义进行计算即可。

**【详解】**

$$M = \{x | x^2 \leq x\} = \{x | 0 \leq x \leq 1\}, N = \{x | 2^x < 1\} = \{x | x < 0\},$$

$$\complement_U N = \{x | x \geq 0\},$$

$$\text{则 } M \cap \complement_U N = \{x | 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1],$$

故选：A.

**【点睛】**

本题考查集合的交集和补集的运算，考查指数不等式和二次不等式的解法，属于基础题。

8、B

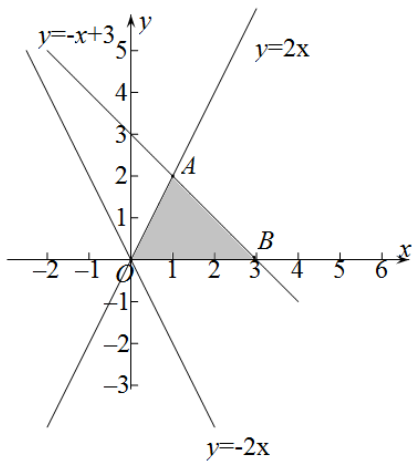
**【解析】**

根据所给不等式组，画出不等式表示的可行域，将目标函数化为直线方程，平移后即可确定取值范围。

**【详解】**



实数  $x, y$  满足的约束条件  $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$ ，画出可行域如下图所示：



将线性目标函数  $z = 2x + y$  化为  $y = -2x + z$ ，

则将  $y = -2x$  平移，平移后结合图像可知，当经过原点  $O(0,0)$  时截距最小， $z_{\min} = 0$ ；

当经过  $B(3,0)$  时，截距最大值， $z_{\max} = 2 \times 3 + 0 = 6$ ，

所以线性目标函数  $z = 2x + y$  的取值范围为  $[0, 6]$ ，

故选：B.

**【点睛】**

本题考查了线性规划的简单应用，线性目标函数取值范围的求法，属于基础题.

9、A

**【解析】**

根据题意得到充分性，验证  $\square = 2, \square = \frac{1}{2}$  得出不必要，得到答案.

**【详解】**

$\square, \square \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ，当  $\square = \square$  时， $\log_{\square} \square = \log_{\square} \square$ ，充分性；

当  $\log_{\square} \square = \log_{\square} \square$ ，取  $\square = 2, \square = \frac{1}{2}$ ，验证成立，故不必要.

故选： $\square$ .

**【点睛】**

本题考查了充分不必要条件，意在考查学生的计算能力和推断能力.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/258076002056007004>