# 第1章 博弈论基本模型

- 什么是博弈活动
- 博弈活动具有以下特征：
- 1.有人参加。我们把参加的人称为参与人或局中人。
- 2.在每一步，局中人有明确的、可以选择的行动。
- 3.有明确的行动顺序。
- 4.参与人在选择行动时有明确的信息。
- 5.活动结束时有明确的支付规则。
- 具有上述特征的活动称为博弈活动。
- 合作博弈与非合作博弈
- 如果在一项活动中，参与人具有合作的意向，而且合作的行为又能得到有力的保障，则称这种博弈活动为合作博弈，否则称为非合作博弈。
- 对于非合作博弈，从模型构建的形式上又可分为策略型博弈与扩展型博弈。

# 1.1 有限扩展型博弈模型

- **博弈模型的构建**
- 应用博弈论方法分析研究经济管理或其它领域中的问题，首先要构造出博弈模型来，因而需要从大量的博弈活动中抽象出博弈模型的基本要素，对这些要素进行严格、准确的刻画后，形成博弈模型。
- 将博弈活动构造成博弈模型，需要了解以下6个方面的情况：
- 1.参与人；
- 2.外生事件的概率分布；
- 3.参与人选择行动的次序；
- 4.参与人所能选择的行动；
- 5. 参与人在选择行动时所了解的信息。
- 6.参与人的支付。

- **构造博弈模型所需要的要素**
- 1.局中人集合
- $N=\{0,1,2,\cdots,n\}$，称 N为局中人或参与人集合。N 中元素称为参与人或局中人。参与人不专指人，它泛指参与博弈活动的政府、企业、地区、国家、个人……等决策主体。通常用“0”表示虚拟局中人，它的行为是以确定的概率分布进行随机选择，$i=1,2,\cdots,n$ 表示实际参与人。
- 2.行动集合
- 称参与人$i\in N$在博弈中所有可能选择的行动构成的集合 $A_i$为局中人i的**行动集合**。$A_i$ 中的元素 $a_i$ 称为局中人i的**行动**。
- 局中人的行动集合可能是有限集，也可能是无限集。如果博弈活动中每个局中人的行动集合都是有限集，且每个局中人行动的次数也是有限的，称该博弈为**有限博弈**。
- 3.博弈树
- 对于有限博弈，可用博弈树直观地刻画它，市场进入问题的博弈树如图1-1所示。

I
抵制

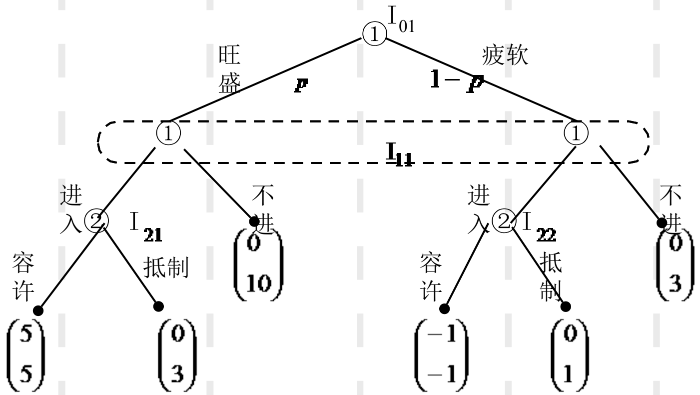


图1-1 市场进入博弈树

- 4. 博弈树中终点z下面的向量 $u=(u_1, u_2,\cdots,u_n)$ 称为**支付向量**，它的第 $i(=1,2,\cdots,n)$ 个分量表示博弈结束于z时,局中人i所得的支付。支付可表示参与人的某种收益或损失。本书中的支付指收益、效用、利润等。正式地，支付向量是终点集合z到$n$维向量集合 $R^n$ 的映射。

$$U:Z\to R^n, U(z)=(u_1(z), u_2(z),\cdots,u_n(z)), z\in Z$$

- **5.信息集与信息集分割**
- 信息集由同一个局中人、在相同的时点上的具有相同信息的决策节点组成。用 $I_{ik}\ (i=0,1,2,\cdots,n,\ k=0,1,2,\cdots,r_i)$表示局中人i的第k个信息集。它满足
- （1）$I_{ik}\neq\Phi$（ $\Phi$ 表示空集）；
- （2）从博弈起始点到任一终点的路径至多与 $I_{ik}$ 交一点（描写同一信息集中的节点处于同一时点上）；
- （3）从 $I_{ik}$ 中的任一节点出发，局中人i可能选择的行动集合都相同（因为局中人在同一信息集的不同节点上具有相同的信息）。
- 在博弈树上，将属于同一信息集的节点用虚线框在一起。
- 称 $I_i=\{I_{i1},I_{i2},\cdots,I_{ir_i}\}$ 为局中人 $i(=0,1,2,\cdots,n)$的**信息集类**（在数学上，称以集合为元素的集合为类）。
- 称 $I=\{I_0,I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 为**信息集分割**。

- **有限扩展型博弈模型的定义**
- **定义1.1 称** $G = \langle N, Y, U, I, q \rangle$ 为**有限扩展型博弈模型。**其中N为参与人集合，Y为博弈树，U为支付向量，I为信息集分割，q为外生事件的概率分布。
- **完全信息博弈与不完全信息博弈**
- 如果所有的局中人对构成G的元素N,Y,U,I,q都完全了解，称G为**完全信息博弈**，否则为**不完全信息博弈**。
- **静态博弈与动态博弈**
- 如果所有的局中人都同时选择行动，称G为**静态博弈**，否则称G为**动态博弈**。**静态博弈**更本质的特征是所有局中人在选择行动时不知道对手选择了什么行动。

- **例1.1** 考虑按以下步骤进行的博弈活动。
- 第1步 局中人1从字母T,H中选一个；
- 第2步 局中人2不知第1步的选择，再从H,T中选一字母；
- 第3步 局中人知道1，2两步的选择，又从T,H中选一字母；
- 第4步 局中人2不知第3步的选择，但知1，2两步的选择，最后从T,H中选一字母，博弈结束。按照每步选择的结果，每个局中人各得一笔报酬（略）。
- 该博弈的局中人集合 $N=\{1,2\}$.
- 该博弈的信息集合分别为 $I=\{I_1,I_2\}$，其中
- 。

$$I_1=\{I_{11},I_{12},I_{13}, I_{14},I_{15}\}, I_2=\{I_{21},I_{22},I_{23}, I_{24},I_{25}\}$$

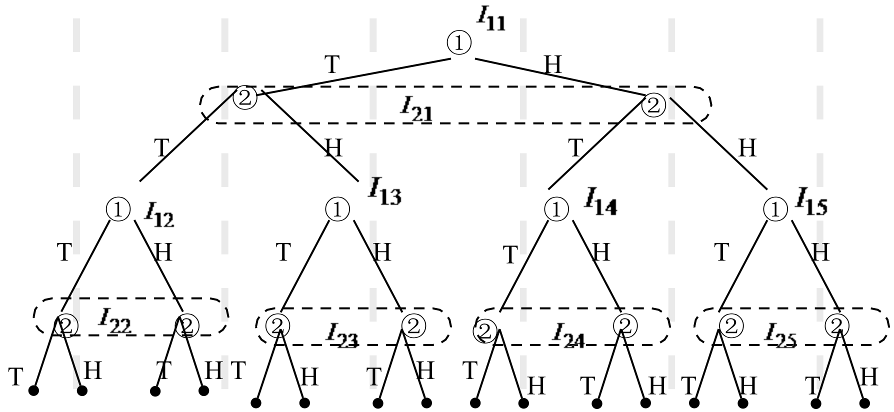


图1-2

- **信息集可以告诉我们以下4点**
- 1.在一个信息集上应由哪个参与人选择行动。
- 2.从一个信息集出发，局中人可能选择哪些行动。
- 3.局中人在一个信息集上选择行动时已知道了哪些信息。
- 4.单点信息集表明相应的局中人完全了解博弈从开始到该信息集的博弈历程。
- **完美信息博弈**
- 如果G的每个信息集都是单点信息集。表明博弈的每个参与人在选择行动时对博弈到现在为止的历程都完全了解，这时称G为**完美信息博弈**。
- **扩展型博弈不仅能刻画动态博弈，也能刻画静态博弈**

## 静态扩展型博弈的例子

**例1.2** 两个参与人同时从字母 T,H中选择一个，博弈结束时两个参与人各得一笔支付，该博弈的博弈树如图1-3所示。

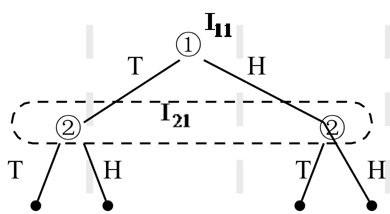

图1-3

- **扩展型博弈的子博弈**
- 扩展型博弈的子博弈大体上说是原博弈的一部分，但它不能破坏原博弈的信息集。
- **定义1.2** 设 $G=\langle N,Y,U,I,P\rangle$为一有限扩展型博弈，从Y的决策节点h出发的**子博弈** $G_h=\langle N_h,Y_h,U_h,I_h,P_h\rangle$ 满足
- （1）h是G的单点信息集；
- （2）$N_h \subseteq N$ ；
- （3）$Y_h$ 是Y的子树，它由h及其后的所有节点与终点构成；
- （4）$G_h$ 不能割裂G的信息集；
- （5）若"自然"仍属于 $N_h$，则 $G_h$ 中"自然"的概率分布
- $P_h=P$；
- （6）设Z为 $P_h$ 的终点，支付向量 $U_h(z)=U(z)$。

# 1.2有限扩展型博弈的策略

- 策略的定义
- **定义1.3** 局中人 $i=1,2,\cdots,n$ 的**策略集合**用 $S_i$ 表示，$S_i$ 中的元素 $s_i$ 称为局中人i的**策略**。它定义为局中人i的信息集类 $I_i$ 到行动集 $A_i$ 的映射：
- $$S_i: I_i \to A_i, S_i(I_{ik}) = a_i, a_i \in A_i, i=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,r_i$$
- **策略是信息集的映射，行动是映射值。两者是不同的概念。**

- **例1.3** 考虑图1-1所示的扩展型博弈的策略。

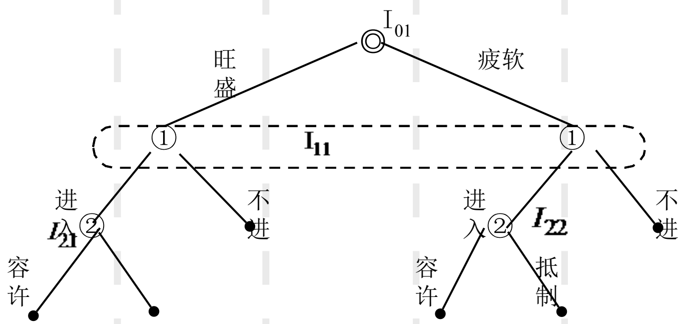


图1-1 市场进入博弈树

$$S_1 = \{a_{11}, a_{12}\}$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = a_{21}, a_{22}, x_2 = a_{21}, a_{22}\}$$

$$= \{(a_{21}, a_{21}), (a_{21}, a_{22}), (a_{22}, a_{21}), (a_{22}, a_{22})\}$$

- 策略 $(a_{22}, a_{21})$ 表明参与人2在第1个信息集 $I_{21}$上 选择行动$a_{22}$，在第2个信息集 $I_{22}$上选择行动$a_{21}$。其余策略可同样理解。

- **例1.4** 考虑例1.1所给出的扩展型博弈的策略。
- $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_k = T, H, \ k = 1,2,3,4,5\}$
- $S_2 = S_1$
- **例1.5** 考虑例1.2给出的扩展型博弈的策略。
- $S_1 = A_1 = \{T, H\}, \ S_2 = A_2 = \{T, H\}$
- **在静态博弈模型中，局中人策略与行动等同。**

# 1.3 一般扩展型博弈模型

- **构成一般扩展型博弈模型的要素**
- （1）一个有限的局中人集合：$N=\{0,1,2,L\ ,N\}$，其中“0”表示虚拟局中人—“自然”，它以确定的概率分布进行随机选择。
- （2）一个满足下列三条性质的行动序列集合H。
- ①H中包含一个空序列，即 $\Phi \in H$ ；
- ②如果局中人的有限行动序列$(a^k)_{k=1}^{K} \in$ H，则对$\forall$ 正整数 $L < K$都有
- $(a^k)_{k=1}^{\infty} \in$ H；
- ③对于局中人的无限行动序列 $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ ，若对任何正整数 $L$ 都
- 有 $(a^k)_{k=1}^{L} \in H$，则$(a^k)_{k=1}^{\infty} \in$ H,否则 $(a^k)_{k=1}^{\infty} \notin$ H。称满足以上三条性质的行
- 动序列集合H为**历史集**。称历史集中的元素 $h \in$H为博弈的**一段历史**。
- 称一段历史 $(a^k)_{k=1}^{k+1} \in$ H为博弈的终点，如果它是无限的（$k=\infty$）或不
- 存在 $a^{k+1}$使 $(a^k)_{k=1}^{K} \in$ H。博弈全体终点构成集合记为 Z 。
- （3）局中人映射 $P: H \setminus Z \to N, P(h)=i, h \in H \setminus Z$，表示历史h之后应由局中人i选择行动。
- （4）定义“自然”的行动集合上的概率分布为q。

- （5）信息集分割。
- 对于每个局中人$i \in N$，称集合$I_i = \{I_{i1}, I_{i2}, \cdots, I_{ir_i}\}$（$r_i$可为无穷）为$\{h \in H | P(h) = i\}$的一个信息集分割，$I_{ik}, k = 1,2,\cdots, r_i$称为局中人$i$的信息集，如果它满足性质
- ① $I_{ik} \neq \Phi, k = 1,2,\cdots, r_i$ ；
- ②只要 $h$与 $h'$同在 $I_{ik}, k = 1,2,\cdots, r_i$ 内，则$A(h) = A(h')$。$A(h)$表示局中人$i$ 在历史 $h$之后的可能选择的行动集合。
- ③对$\forall h \in Z$，$I_{ik}$($k = 1,2,\cdots, r_i$)中至多有一段历史与h相交。
- （6）支付向量
- 支付向量是终点 Z到 $R^n$的映射
- $U : Z \to R^n, U(z) = (u_1(z), u_2(z), \cdots, u_n(z)), z \in Z$ 。
- 其中 $u_i(z)$ 是当博弈结束于$z$，局中人$i (= 1,2,\cdots, n)$的支付值。

- **例1.1的一般扩展型博弈模型**
- 1.局中人集合 $N=\{1,2\}$ .
- 2.历史集合*H*={ $\phi$ , T，H，TT，TH，HT，HH，TTT，TTH，THT，THH，HTT，HTH，HHT，HHH，TTTT，TTTH，TTHT，TTHH，THTT，THTH，THH，THHH，HTTT，HTTH，HTHT，HTHH，HHTT，HHT，HHHT，HHHH}
- 终点集合Z={TTTT，TTTH，TTHT，TTHH，THTT，THTH，THHT，THHH，HTTT，HTTH，HTHT，HTHH，HHTT，HHTH，HHHT，HHHH}
- 3.局中人映射。
- $P(\phi)=1$ , $P(T)=P(H)=2$ , $P(TT)=P(TH)=P(HT)=P(HH)=1$ , $P(TTT)=P(TTH)=P(THT)=P(THH)=P(HTT)=P(HTH)=P(HHT)=P(HHH)=2$
- 4.信息集分割。
- $I_1=\{I_{11},I_{12},I_{13},I_{14},I_{15}\}$
- 其中 $I_{11}=\phi$ , $I_{12}=\{TT\}$ , $I_{13}=\{TH\}$ , $I_{14}=\{HT\}$ , $I_{15}=\{HH\}$ .
- 5.支付向量。
- **一般扩展型博弈模型的策略**
- 和有限扩展型模型一样，**一般扩展型博弈模型的策略**也是定义为信息集类到行动集的映射。
- $s_i: I_i \to A_i$. $s_i(I_{ik})=a\in A_i$ , $i=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,r_i$ , （ $r_i$ 可为 $\infty$ ）。
- **一般扩展型博弈模型的子博弈**
- 一般扩展型博弈模型的**子博弈**是从一个单点信息集引出，由局中人映射所确定的到终点集合的子博弈，子博弈不能割裂原博弈的信息集。