第三节　三角函数的图象与性质

[备考方向要明了]

考什么
1.能画出 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性.
2.理解正弦函数、余弦函数在区间[0,2π]上的性质(如单调性、最大值和最小值以及与 x 轴的交点等)，理解正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的单调性.

怎 么 考

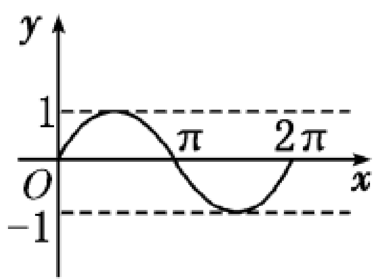
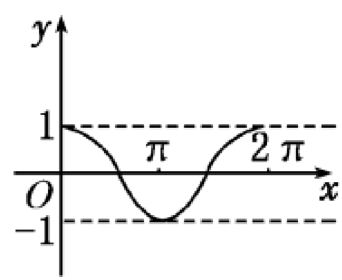
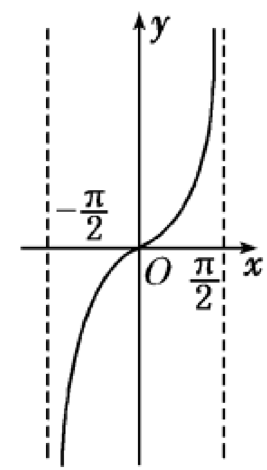
1.以选择题或填空题形式考查三角函数单调性、周期性及对称性．如年新课标全国T9等.

2.以选择题或填空题形式考查三角函数值域或最值问题．如年湖南T6等.

3.与三角恒等变换相结合出现在解答题中．如年北京T15等.

[归纳·知识整合]

正弦函数、余弦函数、正切函数图象和性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
定义域	R	R	$\left\{x \middle| x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
单调性	递增区间：$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 递 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$	间：$[2k\pi-\pi,\ 2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 递减区间：$[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$	递增区间：$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
最　值	$x=$ $2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，$y_{max}=1$ $x=$ $2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，$y_{min}=-1$	$x=$ $2k\pi(k\in Z)$ 时，$y_{max}=1$ $x=$ $2k\pi+\pi(k\in Z)$ 时，$y_{min}=-1$	无最值
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
对称性	对称中心 $(k\pi, 0)$，$k\in Z$	对称中心 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$k\in Z$	对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)(k\in Z)$
	对称轴 l：$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$	对称轴 l：$x=k\pi$，$k\in Z$	无对称轴
周期	2π	2π	π

[探究]　1.正切函数$y=\tan x$在定义域内是增函数吗？

提示：不是．正切函数 $y=\tan x$ 在每一个区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$上都是增函数，但在定义域内不是单调函数，故不是增函数．

2．当函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$分别为奇函数和偶函数时，$\varphi$取值是什么？对于函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)$呢？

提示：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$时是奇函数，当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时是偶函数；函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$时是偶函数，当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时是奇函数．

[自测·牛刀小试]

1．(教材习题改编)设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$是 (　　)

A．最小正周期为 π 的奇函数

B．最小正周期为 π 的偶函数

C．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数

D．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

解析：$\because f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$,

$\therefore f(x)$是最小正周期为 π 的偶函数.

答案：B

2．(教材习题改编)函数 $y=4\sin x$，$x\in[-\pi,\ \pi]$的单调性是(　　)

A．在$[-\pi,\ 0]$上是增函数，在$[0,\ \pi]$上是减函数

B．在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，在$\left[-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$上都是减函数

C．在$[0,\ \pi]$上是增函数，在$[-\pi,\ 0]$上是减函数

D．在$\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]\cup\left[-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是减函数

解析：由函数 $y=4\sin x$，$x\in[-\pi,\ \pi]$的图象可知，该函数在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，在$\left[-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$上是减函数．

3．函数 $y=\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}$的定义域为 ( )

A. $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

B. $\left[k\pi-\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$, $k\in Z$

C. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{3}, 2k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$, $k\in Z$

D．R

解析：$\because \cos x-\frac{1}{2}\geqslant 0$，得 $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore 2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$.

答案：C

4．(教材习题改编)函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的最小正周期为________．

解析：函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为

$$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi.$$

5．函数 $y=3-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为________，此时 $x=$________.

解析： 函数 $y=3-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为 $3+2=5$，此时 $x+\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi$，即 $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

答案：5　$\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

考点一 三角函数定义域和值域

[例 1] (1)求函数 $y=\lg(2\sin x-1)+\sqrt{1-2\cos x}$的定义域;

(2)求函数 $y=2\cos^2x+5\sin x-4$ 的值域.

[自主解答] (1)要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases}2\sin x-1>0,\\1-2\cos x\geq 0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}\sin x>\dfrac{1}{2},\\\cos x\leq\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$$解得\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}+2k\pi<x<\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\\\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\quad(k\in Z),$$

即$\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leq x<\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$.

故所求函数的定义域为$\left[\dfrac{\pi}{3}+2k\pi，\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in Z)$.

(2) $y=2\cos^2 x+5\sin x-4$

$=2(1-\sin^2 x)+5\sin x-4$

$=-2\sin^2 x+5\sin x-2$

$=-2\left(\sin x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$.

故当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=1$，

当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\min}=-9$，

故 $y=2\cos^2 x+5\sin x-4$ 的值域为 $[-9,1]$.

[方法·规律]

1．三角函数定义域的求法

求三角函数的定义域实际上是解简单的三角不等式，常借助三角函数线或三角函数图象来求解.

2．三角函数值域的求法

求解三角函数的值域(最值)常见到以下几种类型的题目：(1)形如$y=a\sin x+b\cos x+c$的三角函数化为$y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$的形式，再求最值(值域)；(2)形如$y=a\sin^2x+b\sin x+c$的三角函数，可先设$\sin x=t$，化为关于$t$的二次函数求值域(最值)；(3)形如$y=a\sin x\cos x+b(\sin x\pm\cos x)+c$的三角函数，可先设$t=\sin x\pm\cos x$，化为关于$t$的二次函数求值域(最值).

变式训练

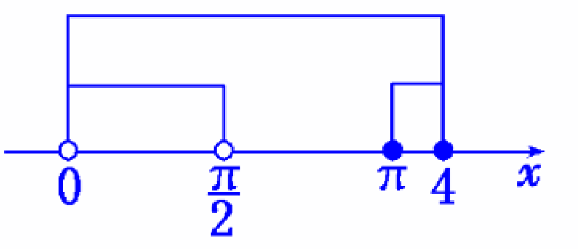
1．(1)求函数 $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}}$ $x+\sqrt{\tan}$

(2)设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=\cos x(a\sin x-\cos x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$满足 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f(0)$，求函数 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{11\pi}{24}\right]$上的最大值和最小值.

解：(1)要使函数有意义

则 $\begin{cases} 2+\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0, \\ x>0, \\ \tan x \geq 0, \\ x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k \in Z), \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 0<x \leq 4, \\ k\pi \leq x<k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k \in Z). \end{cases}$

利用数轴可得：



所以函数的定义域是 $\left\{x \mid 0<x<\frac{\pi}{2} \text{或} \pi \leq x \leq 4\right\}$.

(2)$f(x)=\cos x(a\sin x-\cos x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$=a\sin x\cos x-\cos^2x+\sin^2x=\frac{a}{2}\sin 2x-\cos 2x.$

由于$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f(0)$，

所以$\frac{a}{2}\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-1$，

即$-\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{1}{2}=-1$，得 $a=2\sqrt{3}$.

于是$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

由于 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{11\pi}{24}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4}\right]$，

因此当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$，

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$ 即 $x=\frac{11\pi}{24}$ 时 $f(x)$ 取得最小值 $f\left(\frac{11\pi}{24}\right)=\sqrt{2}$.

考点二　三角函数单调性

[例 2]　求下列函数的单调递减区间：

(1)$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(2)$y=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$.

[自主解答]　(1)由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

故函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的单调减区间为

$\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)把函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$变为 $y=-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{6}<2x<k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

故函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 的单调减区间为

$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

互动探究

若将本例(1)改为“$y=2\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$”，如何求解？

解：画出函数 $y=2\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 的图象，易知其单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

[方法·规律]

1．三角函数单调区间的求法

求形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$(其中 $A\neq 0$，$\omega>0$)的函数的单调区间，可以通过解不等式的方法去解答．列不等式的原则是：①把“$\omega x+\varphi(\omega>0)$”视为一个“整体”；②$A>0(A<0)$时，所列不等式的方向与 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$，$y=\cos x(x\in\mathbf{R})$的单调区间对应的不等式方向相同(反)．对于 $y=A\tan(\omega x+\varphi)(A$、$\omega$、$\varphi$ 为常数)，其周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$，单调区间利用 $\omega x+\varphi\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，解出 x 的取值范围，即为其单调区间．

[方法·规律]

2．复合函数单调区间的求法

对于复合函数$y=f(v)$，$v=\varphi(x)$，其单调性判定方法是：若$y=f(v)$和$v=\varphi(x)$同为增(减)函数时，$y=f(\varphi(x))$为增函数；若$y=f(v)$和$v=\varphi(x)$一增一减时，$y=f(\varphi(x))$为减函数.

3.含绝对值的三角函数单调区间的求法

求含有绝对值的三角函数的单调性及周期时，通常要画出图象，结合图象判定.