

2021年贵阳市中考数学

轨迹问题中的“瓜豆原理”模型

微专题 轨迹问题中的“瓜豆原理”模型

(2019.15)

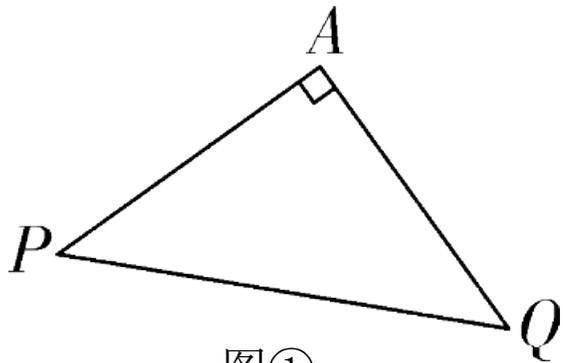
1. 图形变换(平移、翻折、旋转及位似等)的本质是点变换；反之，点变换也可以看作该点所在图形的变换；
2. 分析问题时，要先找定点，再确定从动点如何随主动点的运动而运动，即主动点关于定点经过怎样的变换可以得到从动点；
3. 使用“瓜豆原理”的前提是必须存在定点来充当旋转(位似)中心，使主动点经过相应的变换可以得到从动点，即“无定点，不瓜豆”。

类型一 旋转型

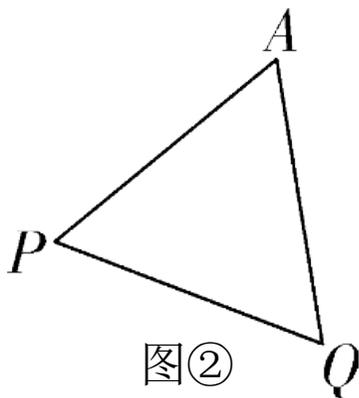
模 型 分 析

问题1 (共顶点, 等线段)根据旋转的性质, 写出在下列三角形中, 点 P 经过怎样的旋转变换可以得到 Q 点.

(1)等腰Rt $\triangle APQ$; (2)等边 $\triangle APQ$; (3)任意等腰 $\triangle APQ$ (顶角为 α).

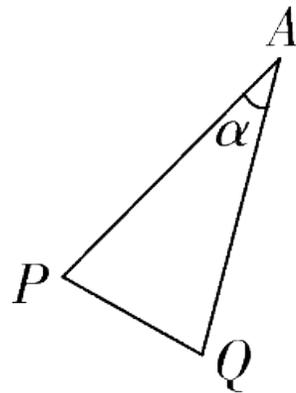


图①



图②

问题1图



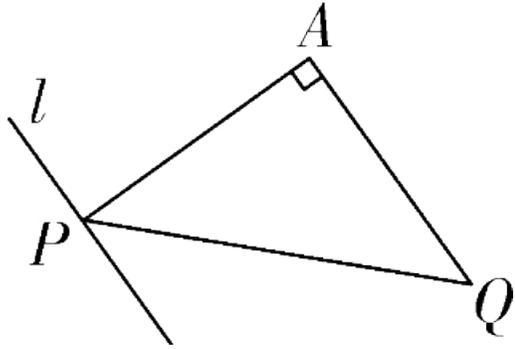
图③

问题1 解: (1)点 Q 可以看作点 P 绕定点 A 按逆时针方向旋转 90° 而来;

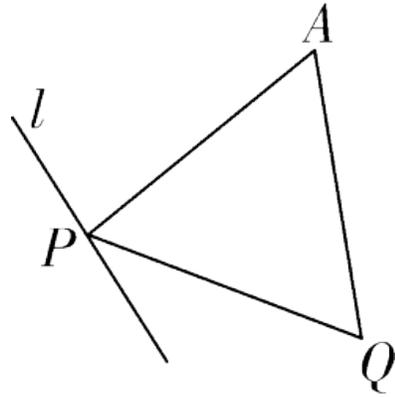
(2)点 Q 可以看作点 P 绕定点 A 按逆时针方向旋转 60° 而来;

(3)点 Q 可以看作点 P 绕定点 A 按逆时针方向旋转角 α 而来.

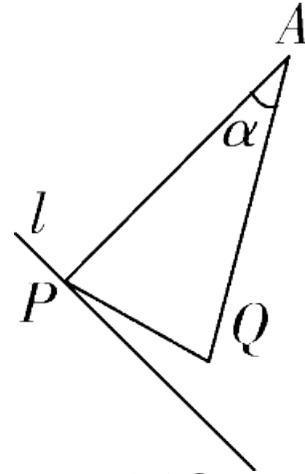
问题2 (直线生直线)在问题1中, 若点 A 是定点, 点 P 在直线 l 上运动, 在运动过程中保持 $\angle A$ 大小不变, 则点 Q 的运动路径是什么? 它可以由点 P 的路径通过怎样的旋转变换得到?



图①



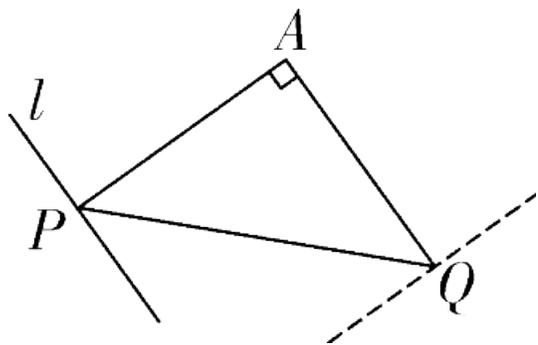
图②



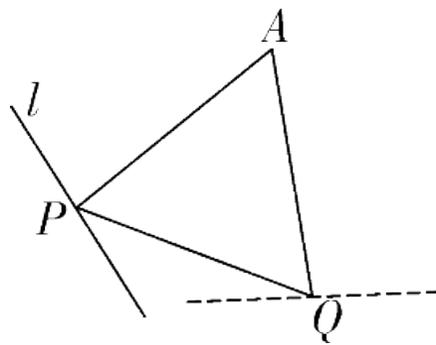
图③

问题2图

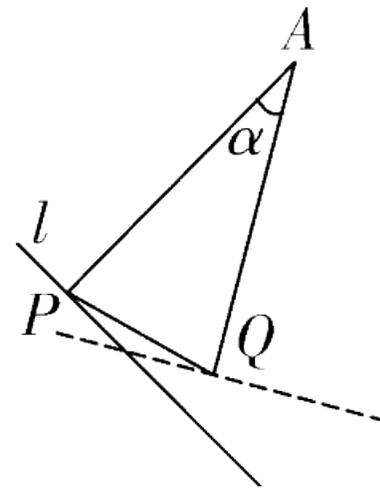
问题2 解：点 Q 可以看作点 P 绕定点 A 经过旋转而来，因此点 Q 的运动轨迹即可由直线 l 通过旋转得到. 把 AP 和直线 l 作为一个整体， AQ 的对应线段是 AP ，点 Q 的运动轨迹即是 l 绕点 A 逆时针旋转方向角 $\angle A$ 得到. 如解图所示：



问题2解图①

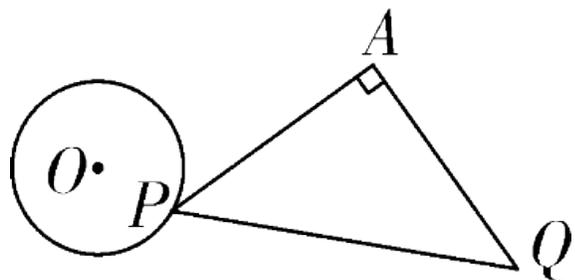


问题2解图②

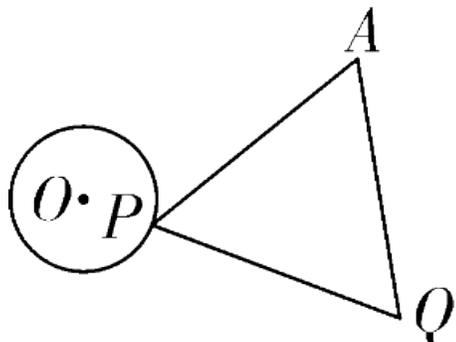


问题2解图③

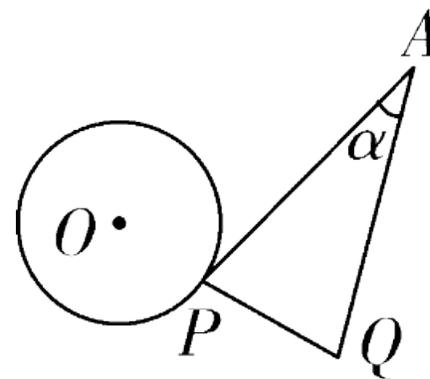
问题3 (圆生圆)在问题2中, 若将“定直线 l ”改为“定 $\odot O$ ”, 其他条件不变, 结果如何?



图①



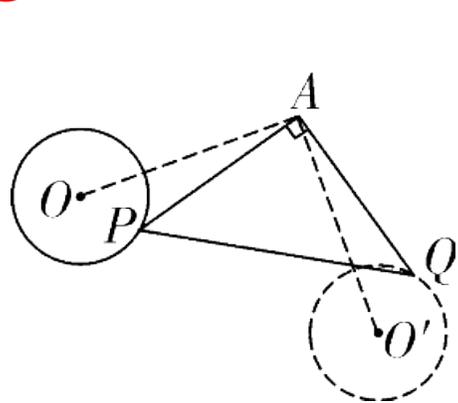
图②



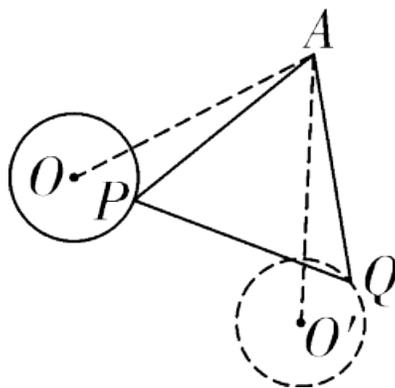
图③

问题3图

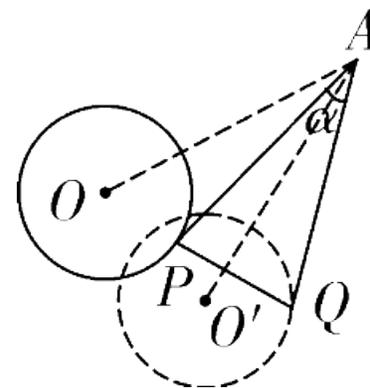
问题3 解: 点 Q 的路径可以由点 P 所在的 $\odot O$ 绕定点 A 经过相应的旋转而来, 如解图所示:



问题3解图①



问题3解图②



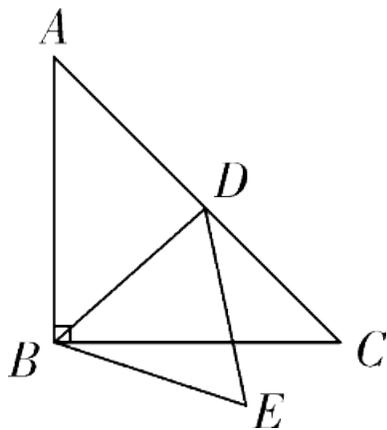
问题3解图③

模 型 总 结

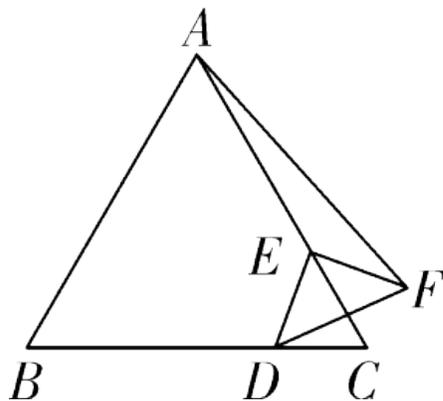
此类轨迹问题可通过“旋转变换”来解决，称 P 为主动点， Q 为从动点，根据旋转不变性，从动点 Q 的路径与主动点 P 的路径是全等图形。“集体行动，步调一致”，每一个点都是经过相同的变换得到，整个路径自然也是经过相同的变换而来，若是圆，其圆心亦然。

针 对 演 练

1. 如图，已知 $AB=2$ ，点 D 是等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AC 上一动点，以 BD 为一边向右下方作等边 $\triangle BDE$ ，当点 D 由点 A 运动到点 C 时，点 E 运动的路径长为 $2\sqrt{2}$ 。



第1题图



第2题图

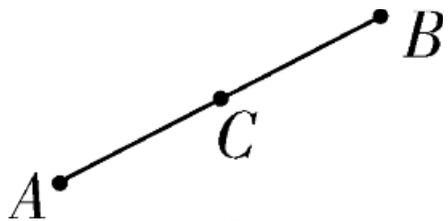
2. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AB=3$ ， E 在 AC 上且 $AE = \frac{2}{3}AC$ ， D 是直线 BC 上一动点，线段 ED 绕点 E 逆时针旋转 90° ，得到线段 EF ，当点 D 运动时，则线段 AF 的最小值是 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

类型二 位似型

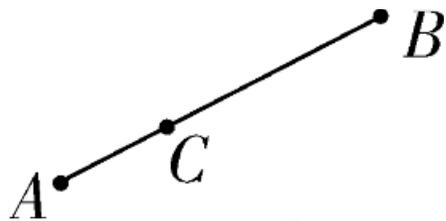
模 型 分 析

问题4 (共顶点, 定比值线段) 已知线段 AB , 其中 A 为定点, C 为 AB 上一点, 在下列条件下, 点 C 可以看作点 B 经过怎样的位似变换得到?

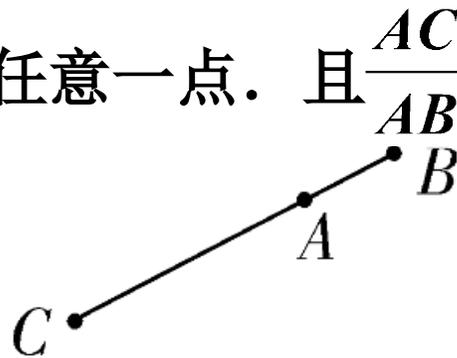
(1) 点 C 是 AB 的中点; (2) $AB=3AC$; (3) C 为直线 AB 上任意一点. 且 $\frac{AC}{AB}=k$ (k 为常数).



图①



图②



图③

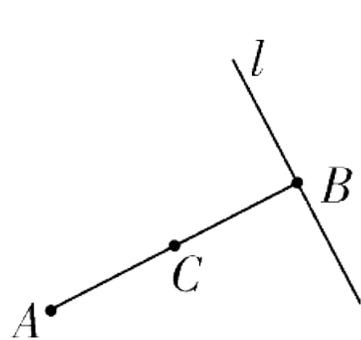
问题4图

问题4 解: (1) 点 C 可以看作点 B 以定点 A 为位似中心, 以 $\frac{1}{2}$ 为位似比同侧缩小而来;

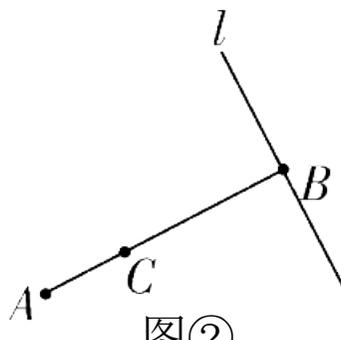
(2) 点 C 可以看作点 B 以定点 A 为位似中心, 以 $\frac{1}{3}$ 为位似比同侧缩小而来;

(3) 点 C 可以看作点 B 以定点 A 为位似中心, 以 k 为位似比放缩而来.

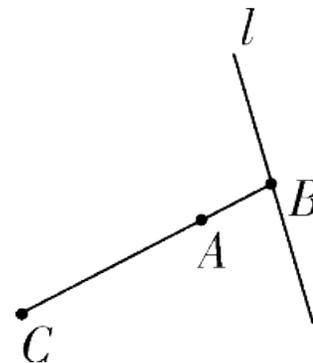
问题5 (直线生直线)在问题4中, 若点 B 在定直线 l 上运动, 其他条件不变, 点 C 的运动路径是什么? 它可以看作点 B 的路径如何变换而来?



图①



图②

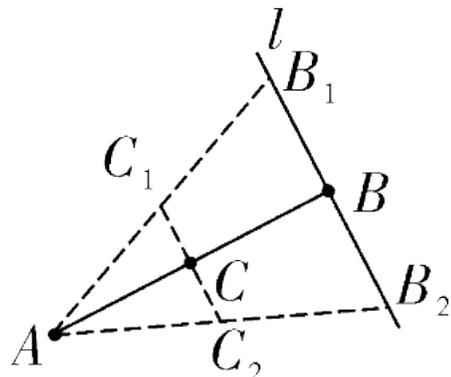


图③

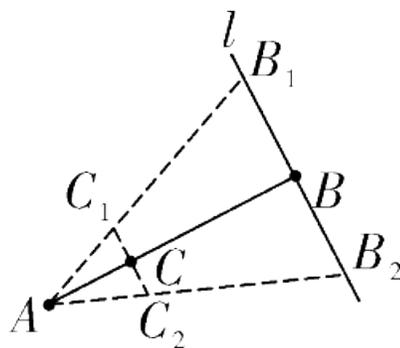
问题5图

问题5 解: 每个点 C 都可以看作点 B 以定点 A 为位似中心, 以相应的位似比放缩而来, 点 C 的路径是点 B 的路径(即直线 l)以定点 A 为位似中心, 以相应的位似比放缩而来,

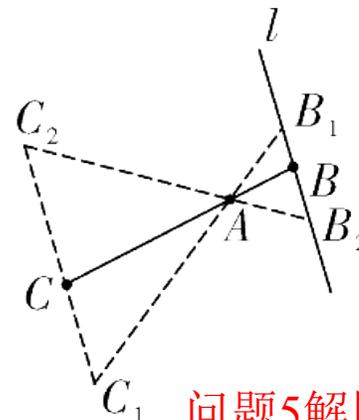
如解图所示:



问题5解图①



问题5解图②



问题5解图③

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/266203031201010125>