2.4.2

平面向量数量积的坐标表示、模、夹角

教师专用 学习目标

1. 掌握平面向量数量积的坐标表示，会用向量的坐标形式求数量积、向量的模及两个向量的夹角
2. 会用两个向量的数量积判断它们的垂直关系

★**重点难点**

1. 重点是平面向量的数量积的坐标表示及运算
2. 难点是利用向量的坐标来解决与向量的模、夹角、垂直有关的问题

教师专用 学法指导

1. 通过对平面向量数量积的坐标表示，用不同的数学语言描述数量积，进而认识数量积的本质
2. 结合例题掌握数量积、模、夹角的坐标表示的应用

课前自主预习

【自主预习】

主题1:平面向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2). 据此回答下列问题:

(1)若i, j是两个互相垂直且分别与x轴, y轴的正向同向的单位向量, 则a, b如何用i, j表示?

提示:a=x_1i+y_1j, b=x_2i+y_2j.

(2)在问题(1)的基础上,计算a·b,你能得到什么结论?

用文字语言描述:________两个平面向量的数量积等于它们对应

________坐标的乘积的和.

⇓

用坐标表示:若a=(x_1, y_1),b=(x_2, y_2),则a·b=________.

$x_1x_2+y_1y_2$

主题2:平面向量模的坐标表示

1. 若$a=(x,y)$,怎样利用平面向量数量积的坐标表示$|a|$?

提示:由数量积的定义及性质即可.

2. 若已知向量a的起点和终点的坐标,则$|a|$如何表示?

提示:可先求出a的坐标然后再求$|a|$.

总结以上探究,试着写出向量模的坐标表示:

1. 若a=(x, y),则|a|= $\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 若向量a的起点与终点坐标分别为(x_1, y_1),(x_2, y_2),

则|a|=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

主题3:平面向量垂直与夹角余弦值的坐标表示

1. 设**a**=(x_1, y_1), **b**=(x_2, y_2), 若**a**⊥**b**, 则如何寻找x_1, y_1, x_2, y_2之间的关系?

提示:由**a**⊥**b**得**a**·**b**=0. 从而得到关系.

2. 设a・b都是非零向量, $a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$, θ 是a与b的夹角, 那么cos θ 如何用坐标表示?

提示: 由 $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$, 再将模及数量积分别用坐标表示即可.

结合以上探究,试着写出向量垂直与向量夹角的余弦的坐标表示

向量垂直的坐标表示:设$a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$, 则$a\perp b$

$\Leftrightarrow$ ____________.

$x_1x_2+y_1y_2=0$

$\Downarrow$

两向量夹角的坐标表示：设a, b都是非零向量, a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2), θ 是a与b的夹角, 则cos θ =________

$$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

【深度思考】

结合教材P107例6你认为应怎样求向量a与b的夹角?

第一步:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿; 用坐标计算 $a\cdot b=x_1x_2+y_1y_2$

第二步:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿; 计算$|a|$与$|b|$,即$|a|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$,$|b|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

第三步:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿. 代入公式$\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$求出$\cos\theta$,再求$\theta$

【预习小测】

1. 若a=(3, 4), b=(5, 12), 则a与b夹角的余弦值为(　　)

A. $\frac{63}{65}$　　B. $\frac{33}{65}$　　C. $-\frac{33}{65}$　　D. $-\frac{63}{65}$

【解析】选A. 设a与b的夹角为θ,

则cos θ =

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{15+48}{5\times 13}=\frac{63}{65}.$$

2. 已知$\mathbf{a}=(x,1)$, $\mathbf{b}=(1,-2)$, 若$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, 则$x=$　(　　)

A. 2　　B. 1　　C. 3　　D. −2

【解析】选A. 因为$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, 所以$x+1\times(-2)=0$, 即$x=2$.

3. 若$a=(1,1)$, $b=(-3,4)$. 则$a \cdot b=$________.

【解析】$a \cdot b=1\times(-3)+1\times 4=1$.

答案:1

4. 已知$a=(3, 2)$, $b=(5, -7)$, 则$(a+b)\cdot(a-b)=$________.

【解析】$a+b=(8, -5)$, $a-b=(-2, 9)$,

所以$(a+b)\cdot(a-b)=8\times(-2)+(-5)\times 9=-61$.

答案:-61

5. 若A(4,-4),B(1,3),则$|\overrightarrow{AB}|$=________.

【解析】$\overrightarrow{AB}$=(-3,7),则$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+7^2}=\sqrt{58}.$

答案:$\sqrt{58}$

【备选训练】已知a=(4,3),b=(-1,2).求a与b的夹角θ的余弦值.(仿照教材P107例6的解析过程)

【解析】因为a·b=4×(-1)+3×2=2,

所以$|\mathbf{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$,

cos θ = $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

课堂合作探究

【互动探究】

1. 向量数量积的坐标公式适用于任何两个向量吗?

提示:适用. 无论是零向量,还是非零向量,均可使用向量数量积的坐标公式.

2. 向量有几种表示方法?由于表示方法的不同,计算数量积的方法有什么不同?

提示:向量有几何表示法、代数表示法和坐标表示法三种方法. 几何表示法、代数表示法表示向量时,用数量积的定义计算数量积,坐标表示法表示向量时,用数量积的坐标运算求数量积.

3. 已知$a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$, 求$|a+b|$时可用哪些方法?

提示:方法一:可先求$a+b$的坐标, 再求$|a+b|$;方法二:可利用$|a+b|^2=a^2+2a\cdot b+b^2$求解.

4. 对任意的向量a与b, 向量夹角的坐标公式及垂直的坐标公式都成立吗?

提示: 不一定. 当a=(0, 0)时, |a|=0, 此时, $\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$无意义, 但夹角为0°; 同时, a·b=$x_1x_2+y_1y_2=0$, 但向量a与b不垂直, 而是a∥b.

故向量夹角的坐标公式及垂直的坐标公式都成立的前提条件是$a \neq 0$且$b \neq 0$.

5. 如何利用向量数量积的坐标形式的运算,确定两个非零向量夹角的范围?

提示:设a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2), a与b的夹角为 θ ,

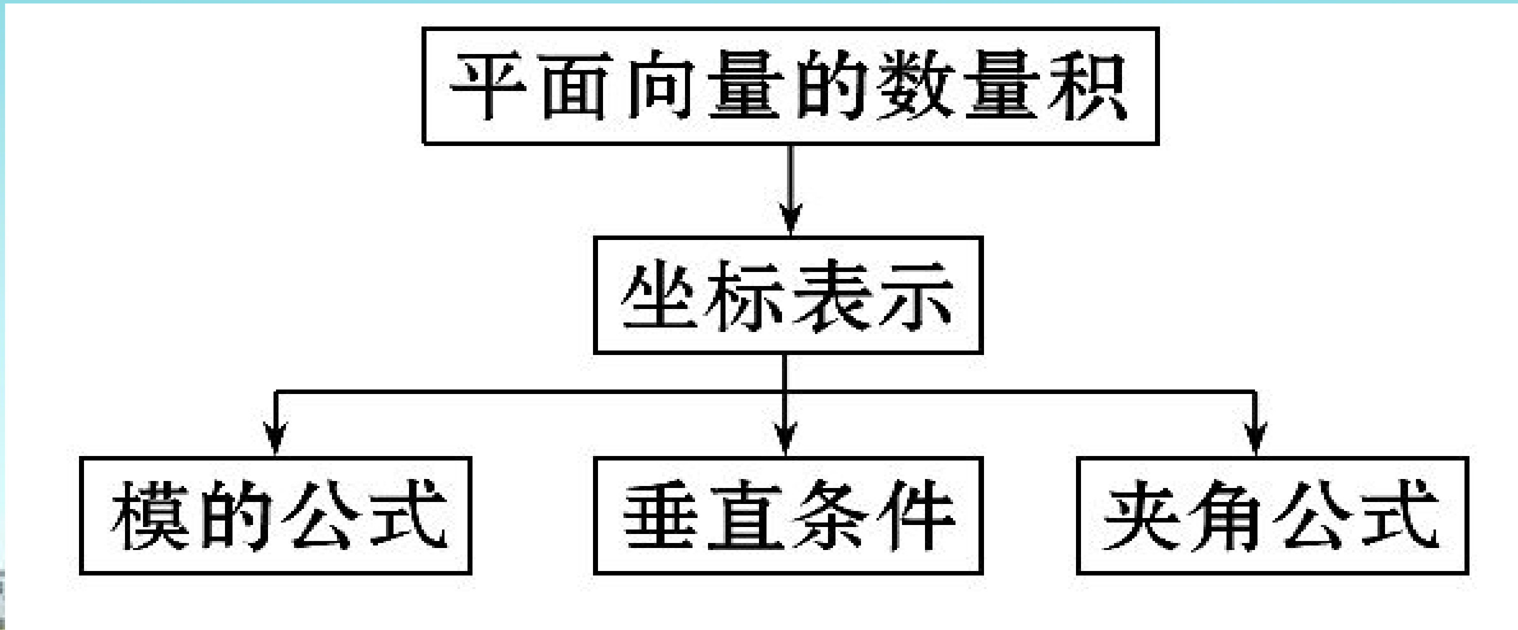
则:(1)当$x_1x_2+y_1y_2>0$时,$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$.

(2)当$x_1x_2+y_1y_2=0$时,$\theta=\frac{\pi}{2}$.

(3)当$x_1x_2+y_1y_2<0$时,$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$.

【探究总结】

知识归纳:



方法总结:解决向量夹角问题的方法及注意事项

(1)先利用平面向量的坐标表示求出这两个向量的数量积$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$以及$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$,再由$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$求出$\cos\theta$,也可以由坐标表示$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$直接求出$\cos\theta$.

由三角函数值$\cos\theta$求角θ时,应注意角θ的取值范围是$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(2)由于$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,利用$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$来判断角$\theta$时,要注意$\cos\theta<0$有两种情况:一是$\theta$是钝角,二是$\theta=\pi$;

$\cos\theta>0$也有两种情况:一是θ为锐角,二是$\theta=0$.

【题型探究】

类型一:平面向量数量积与模的坐标运算

【典例1】(1)(2016·石家庄高一检测)设$x\in R$,向量$a=(x,1)$,$b=(1,-2)$,且$a/\!/b$,则$|a+b|=$　(　　)

A.　　　　B.　　　　C.2　　　　D.5

$\sqrt{5}$　$\frac{\sqrt{5}}{2}$　$\sqrt{5}$

(2)已知正方形ABCD的边长为2,E为CD的中点,则

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$ =__________.

【解题指南】(1)由a∥b利用向量共线的坐标表示求x的值.再利用向量模的坐标公式求|a+b|的模.

(2)方法一:用 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD},$ 用数量积的定义计算 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}.$ 方法二:坐标运算.首先要建立坐标系,确定各关键点的坐标,再求得数量积 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}.$

【解析】(1)选B. 因为a=(x, 1), b=(1, -2), 且a∥b,

所以-2x-1×1=0, 解得x=$-\frac{1}{2}$.

所以a+b=$\left(-\frac{1}{2},1\right)+\left(1,-2\right)=\left(\frac{1}{2},-1\right)$,

|a+b|=$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-1\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.