专题 05 几何压轴题

1．（2021•扬州）在一次数学探究活动中，李老师设计了一份活动单：

> 已知线段 $BC=2$，使用作图工具作 $\angle BAC=30^{\circ}$，尝试操作后思考：
>
> （1）这样的点 A 唯一吗？
>
> （2）点 A 的位置有什么特征？你有什么感悟？

“追梦”学习小组通过操作、观察、讨论后汇报：点 A 的位置不唯一，它在以 BC 为弦的圆弧上（点 B、C 除外），….小华同学画出了符合要求的一条圆弧（如图1）.

（1）小华同学提出了下列问题，请你帮助解决．

①该弧所在圆的半径长为 ______；

② ΔABC 面积的最大值为 ______；

（2）经过比对发现，小明同学所画的角的顶点不在小华所画的圆弧上，而在如图 1 所示的弓形内部，我们记为 A'，请你利用图 1 证明 $\angle BA'C>30^{\circ}$.

（3）请你运用所学知识，结合以上活动经验，解决问题：如图 2，已知矩形 $ABCD$ 的边长 $AB=2$，$BC=3$，点 P 在直线 CD 的左侧，且 $\tan\angle DPC=\dfrac{4}{3}$.

①线段 PB 长的最小值为 ______；

②若 $S_{\Delta PCD}=\dfrac{2}{3}S_{\Delta PAD}$，则线段 PD 长为 ______.

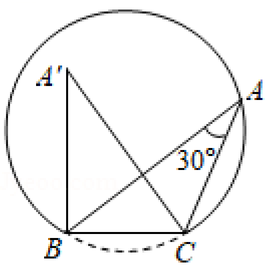


图1

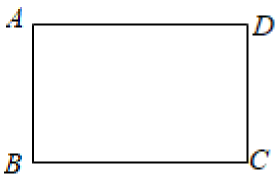


图2

备用图

2．（2020•扬州）如图1，已知点O在四边形$ABCD$的边AB上，且$OA=OB=OC=OD=2$，OC平分$\angle BOD$，与BD交于点G，AC分别与BD、OD交于点E、F．

（1）求证：$OC//AD$；

（2）如图2，若$DE=DF$，求$\dfrac{AE}{AF}$的值；

（3）当四边形$ABCD$的周长取最大值时，求$\dfrac{DE}{DF}$的值．

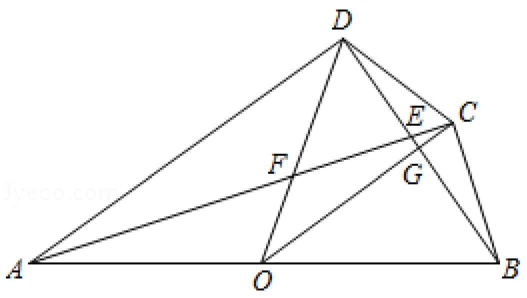


图1

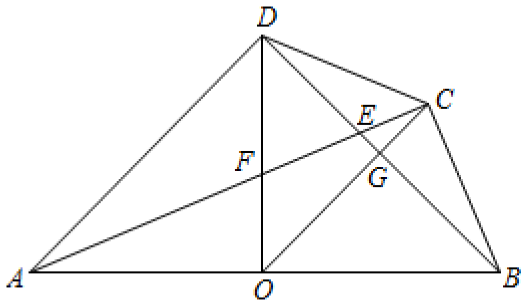


图2

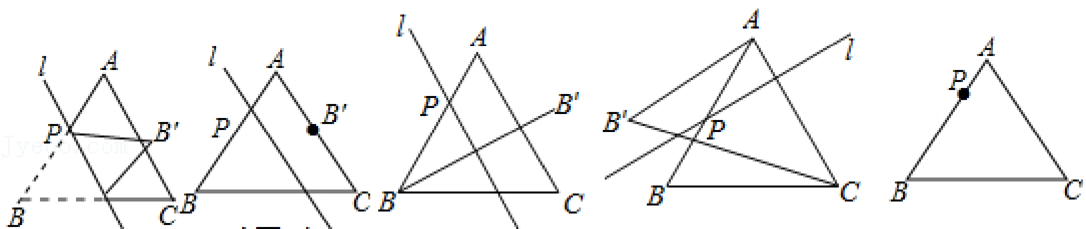
3．（2019•扬州）如图，已知等边ΔABC的边长为8，点P是AB边上的一个动点（与点A、B不重合）．直线l是经过点P的一条直线，把ΔABC沿直线l折叠，点B的对应点是点B'．

（1）如图1，当$PB=4$时，若点B'恰好在AC边上，则AB'的长度为 ______________；

（2）如图2，当$PB=5$时，若直线$l//AC$，则BB'的长度为 ______________；

（3）如图3，点P在AB边上运动过程中，若直线l始终垂直于AC，$\Delta ACB'$的面积是否变化？若变化，说明理由；若不变化，求出面积；

（4）当$PB=6$时，在直线l变化过程中，求$\Delta ACB'$面积的最大值．



（图1）　（图2）　（图3）　（备用图）

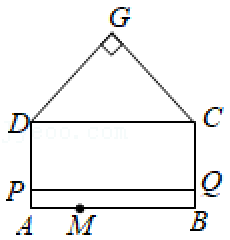
4．（2019•扬州）如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=20$，$BC=10$，以 CD 为一边向矩形外部作等腰直角 ΔGDC，$\angle G=90^{\circ}$．点 M 在线段 AB 上，且 $AM=a$，点 P 沿折线 $AD-DG$ 运动，点 Q 沿折线 $BC-CG$ 运动（与点 G 不重合），在运动过程中始终保持线段 $PQ//AB$．设 PQ 与 AB 之间的距离为 x．

（1）若 $a=12$．

①如图 1，当点 P 在线段 AD 上时，若四边形 $AMQP$ 的面积为 48，则 x 的值为______________；

②在运动过程中，求四边形 $AMQP$ 的最大面积；

（2）如图 2，若点 P 在线段 DG 上时，要使四边形 $AMQP$ 的面积始终不小于 50，求 a 的取值范围．



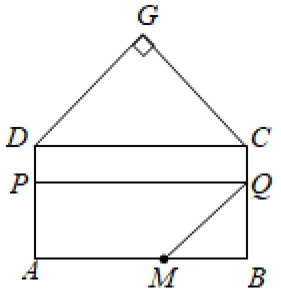
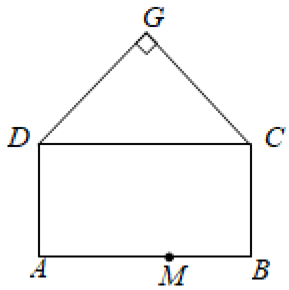


图1



备用图

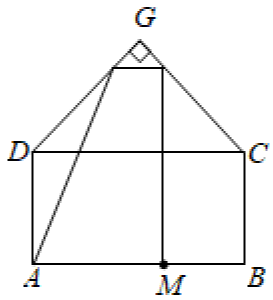


图2

5．（2018•扬州）问题呈现

如图1，在边长为1的正方形网格中，连接格点D，N和E，C，DN和EC相交于点P，求$\tan\angle CPN$的值．

方法归纳

求一个锐角的三角函数值，我们往往需要找出（或构造出）一个直角三角形．观察发现问题中$\angle CPN$不在直角三角形中，我们常常利用网格画平行线等方法解决此类问题，比如连接格点M，N，可得$MN//EC$，则$\angle DNM=\angle CPN$，连接DM，那么$\angle CPN$就变换到RtΔDMN中．

问题解决

（1）直接写出图1中$\tan\angle CPN$的值为__________；

（2）如图2，在边长为1的正方形网格中，AN与CM相交于点P，求$\cos\angle CPN$的值；

思维拓展

（3）如图3，$AB\perp BC$，$AB=4BC$，点M在AB上，且$AM=BC$，延长CB到N，使$BN=2BC$，连接AN交CM的延长线于点P，用上述方法构造网格求$\angle CPN$的度数．

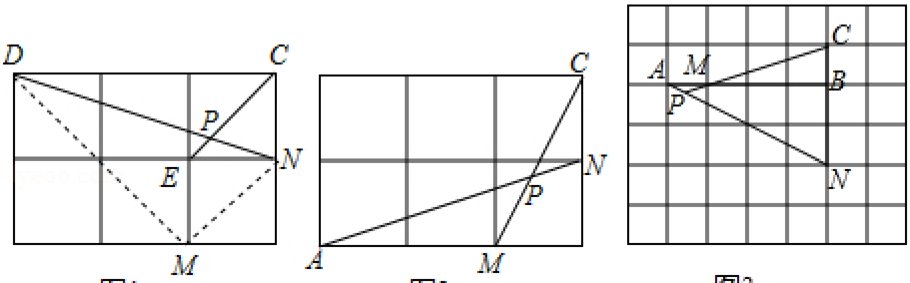


图1　图2　图3

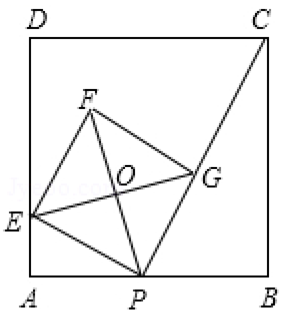
6．（2017•扬州）如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为4，点 P 是 AB 边上的一个动点，连接 CP，过点 P 作 PC 的垂线交 AD 于点 E，以 PE 为边作正方形 $PEFG$，顶点 G 在线段 PC 上，对角线 EG、PF 相交于点 O.

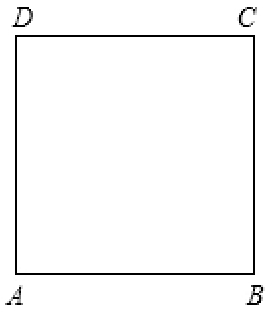
（1）若 $AP=1$，则 $AE=$__________；

（2）①求证：点 O 一定在 ΔAPE 的外接圆上；

②当点 P 从点 A 运动到点 B 时，点 O 也随之运动，求点 O 经过的路径长；

（3）在点 P 从点 A 到点 B 的运动过程中，ΔAPE 的外接圆的圆心也随之运动，求该圆心到 AB 边的距离的最大值.





备用图

7．（2021•广陵区校级二模）如图 1，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，以 A 为圆心，3 为半径的圆弧交边 AB、AD 于点 E，F，交对角线 BD 于点 G、H，点 P 为弧 $\widehat{EF}$ 上的一个动点，过点 P 作 $PM \perp BC$ 于 M，作 $PN \perp CD$ 于 N．设 $PM = m$，$PN = n$．

（1）如图 2，当点 p 运动至 G 位置时，求 $m + n$ 的值；

（2）若四边形 $PMCN$ 的面积为 3.5，求四边形 $PMCN$ 的周长；

（3）求四边形 $PMCN$ 面积的最小值，并说明此时点 P 的位置．

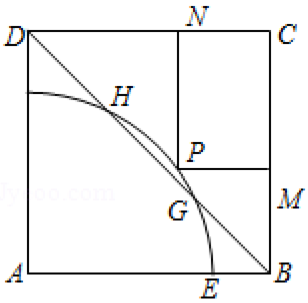


图 1

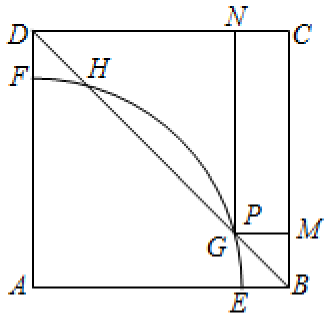


图 2

8．(2021•南平模拟)如图，在矩形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=8$，点E是AD边上的动点，将矩形$ABCD$沿BE折叠，点A落在点A'处，连接$A'C$、BD．

（1）如图1，求证：$\angle DEA'=2\angle ABE$；

（2）如图2，若点A'恰好落在BD上，求$\tan\angle ABE$的值；

（3）若$AE=2$，求$S_{\vartriangle A'CB}$．

（4）点E在AD边上运动的过程中，$\angle A'CB$的度数是否存在最大值，若存在，求出此时线段AE的长；若不存在，请说明理由．

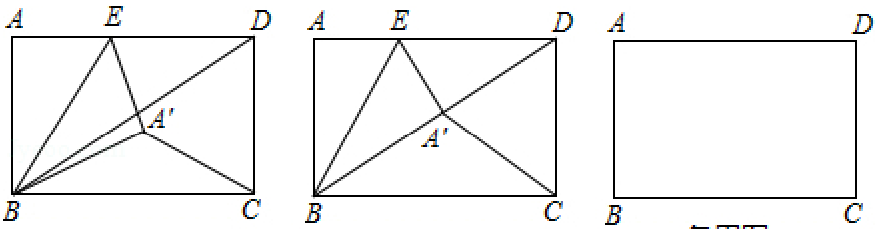


图1　图2　备用图

9．（2021•扬州模拟）如图 1，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 A 在 x 轴的正半轴上，在第一象限内以 OA 为边作平行四边形 $OABC$，点 $C(2,y)$ 和边 AB 的中点 D 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，已知 ΔOCD 的面积为 $\frac{9}{2}$．

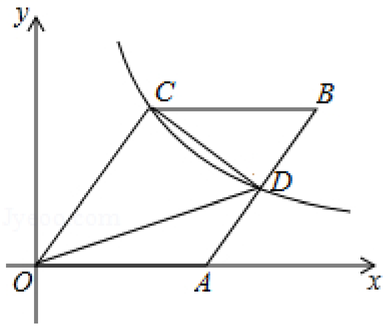


图1

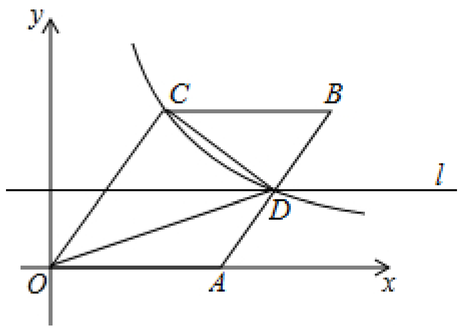


图2

（1）求反比例函数解析式；

（2）点 $P(a,0)$ 是 x 轴上一个动点，求 $|PC-PD|$ 最大时 a 的值；

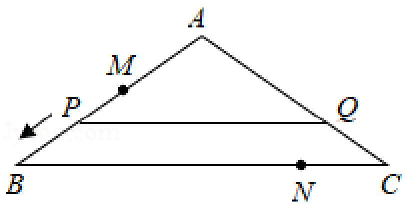
（3）过点 D 作 x 轴的平行线 l（如图 2），在直线 l 上是否存在点 Q，使 ΔCOQ 为直角三角形？若存在，请直接写出所有的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．

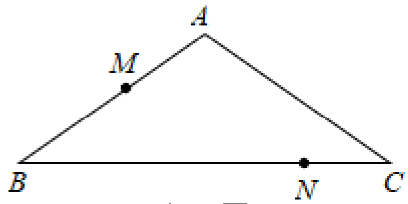
10．（2021•宝应县一模）如图，在ΔABC中，$AB=AC$，$BC=8$，$\tan C=\frac{3}{4}$，点M、N分别在AB、BC上，且$AM=CN=2$．点P从点M出发沿折线$MB-BN$匀速移动，到达点N时停止；而点Q在AC边上随P移动，且始终保持$\angle APQ=\angle B$．

（1）求点P在BN上运动时，点P与点A的最短距离；

（2）若点P在MB上，且PQ将ΔABC的面积分成上下$4:5$两部分时，求MP的长；

（3）求整个运动过程点Q运动的路径长．





备用图

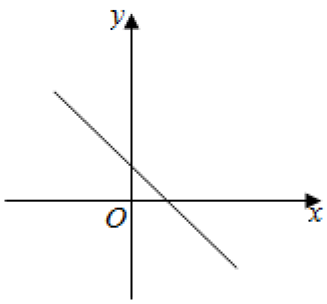
11．（2021•江都区模拟）平面上两点间距离公式是解析几何中重要的公式之一，如图所示，$P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$，则 $P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$．请用所学知道解决问题：

已知道$\odot O$半径为3，

（1）如图1，$P(x,y)$为圆上任意一点，请探究x，y的关系式；

（2）如图2，已知$Q(a,b)$，QA为$\odot O$切线，$B(2,-1)$，且$QA=QB$，求b关于a的函数关系式；

（3）如图3，M点坐标$(-5,0)$，在x轴是否存在点N（不同于点M），满足对于$\odot O$上任意一点P，都有$\dfrac{PN}{PM}$为一常数，若存在求出N点坐标，若不存在请说明理由．



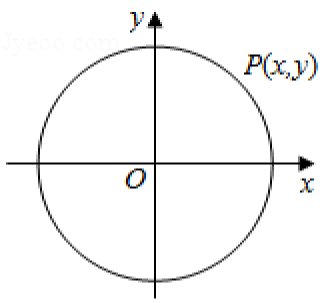


图1

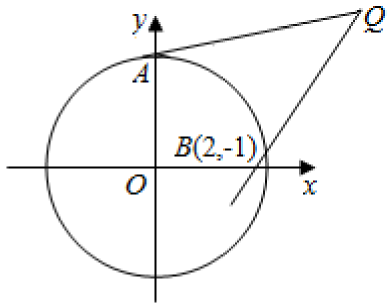


图2

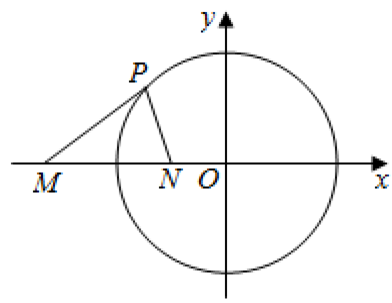


图3

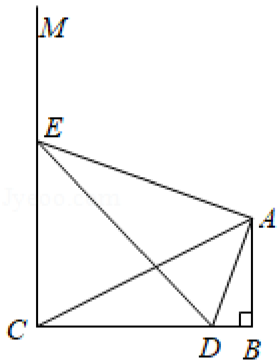
12．（2021•江都区一模）如图，在RtΔABC中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=3$，$BC=6$，射线$CM\perp BC$，点D是边BC上一动点，连接AD，过点A作$AE\perp AD$交射线CM于点E，连接DE．

（1）求证：点A、E、C、D在同一圆上；

（2）若$BD=1$，则$AE=$__________．

（3）①当ΔCDE面积的最大时，求BD的长；

②当点D从点B运动到点C时，直接写出ΔACE的外接圆圆心经过的路径长 __________．

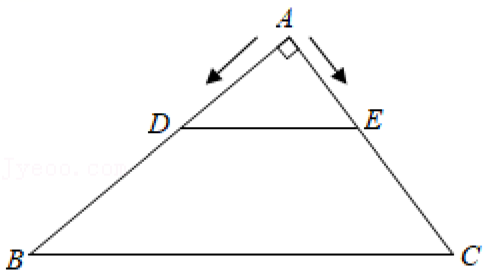


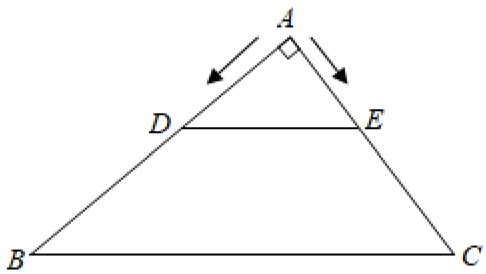
13．（2021•宝应县二模）在ΔABC中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=8cm$，$AC=6cm$，点D、点E同时从点A出发，点D沿边AB以$4cm/s$的速度向点B运动，点E从点A出发，沿边AC以$3cm/s$的速度向点C运动（点D不与A、B重合，点E不与A、C重合），设运动时间为$t\ s$．

（1）求证：$\Delta ADE\backsim\Delta ABC$；

（2）当t为何值时，以DE为直径的$\odot O$与直线BC相切？

（3）把ΔADE沿直线DE折叠得到ΔDEF，若ΔDEF与梯形$BCED$重叠部分的面积为s，试求s关于t的函数表达式，并求t为何值时，s的值最大，最大值是多少？





备用图

14．（2021•德城区二模）直角三角板 ABC 的斜边 AB 的两个端点在 $\odot O$ 上，已知 $\angle BAC=30^{\circ}$，直角边 AC 与 $\odot O$ 相交于点 D，且点 D 是劣弧 AB 的中点．

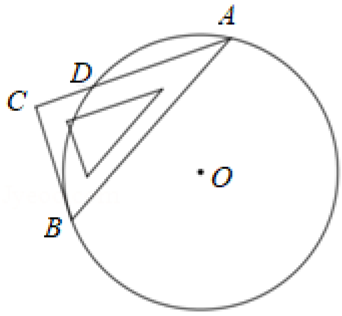


图1

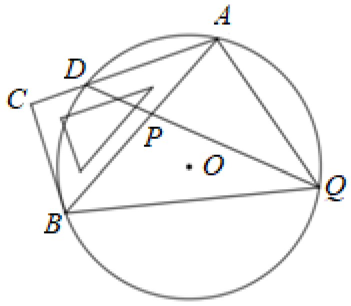


图2

（1）如图 1，判断直角边 BC 所在直线与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

（2）如图2，点 P 是斜边 AB 上的一个动点（与 A 、B 不重合），DP 的延长线交 $\odot O$ 于点 Q，连接 QA 、QB ．

① $AD=6$ ，$PD=4$，则 $AB=$____________；$PQ=$____________；

②当点 P 在斜边 AB 上运动时，求证：$QA+QB=\sqrt{3}QD$ ．

15．（2021•高邮市模拟）如图，已知RtΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$CA=CB=4$，$CD\perp AB$于点D，点M是线段BD上的一个动点．

（1）如图1，若点M恰好在$\angle BCD$的角平分线上，则$AM=$____________；

（2）如图2，若点N在线段AB上，且$\angle MCN=45^{\circ}$，过点M、N分别作$ME\perp CB$于点E、$MF\perp CA$于点F．

①求证：$\Delta ACM\backsim\Delta BNC$；

②求$AM\cdot BN$的值；

③求$CE\cdot CF$的值．

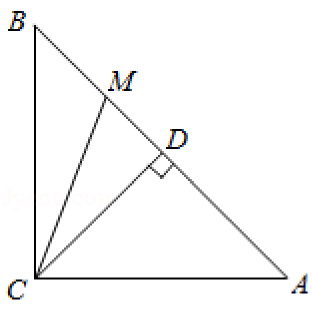


图1

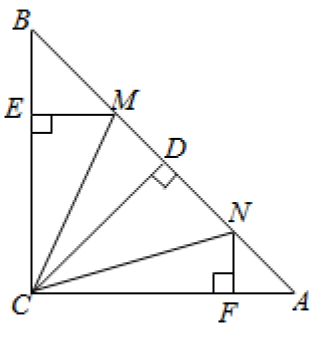


图2