结构不良题-数列（四）

一、解答题（本大题共25小题）

1. 设等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，前n项和为S_n，已知$\left\{a_n\right\}$同时满足下列四个条件中的三个条件：①$d^2=9$；②$\left\{a_n\right\}$单调递减；③S_n有最小值；④$5\left(a_2+a_4\right)=a_3^2+25$.

(1)直接写出可能的三个条件，并求出$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)在（1）的条件下，设$b_n=a_{2n}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和T_n.

2. 从①$b_1+b_2=5a_2$，②$a_3=b_2-1$，③$S_3=4$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

问题：设数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$S_n-S_{n-1}-(S_{n-1}-S_{n-2})=2$，$b_1=1$，

$b_n=(a_{n+1}-a_n)^2$，且_________，求数列$\left\{a_nb_n\right\}$的前n项和T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

3. 在①$a_1+a_6+a_{10}=0$，②$-2a_2=a_{13}$，③$a_3a_5=a_7^2$这三个条件中任选一个，补充在下面问题的题设条件中.

问题：已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为$d,(d\neq 0)$，满足$a_2+a_3+a_7=-15$，__________？

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)若数列$\left\{a_n\right\}$的前k项和$S_k=-40$，求k的值.

4. 从条件①$\{n+b_n\}$，②$\{\frac{n+1}{b_n}\}$，③$\{\frac{4}{\log_2 b_n\cdot\log_2 b_{n+1}}\}$中任选一个，补充到下面的问题中并给出解答，已知数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}=a_n+1$，$a_1=\frac{5}{4}$，$b_n=a_n-1$

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等比数列；

(2)求数列__________的前n项和T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分

5. 已知正项数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，给出以下三个条件：①$a_1=1$，$na_{n+1}=\left(n+1\right)a_n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；②$S_n^2-\left(n^2-1\right)S_n-n^2=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；③$a_1=1$，$a_n^2+2a_n=4S_n-1\left(n\in N^*\right)$. 从这三个条件中任选一个解答下面的问题.

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{4S_n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和$T_n$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分

6. 在①$a_5=b_3+b_5$，②$S_3=87$，③$a_9-a_{10}=b_1+b_2$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答.

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，___，$a_1=b_6$，若对于任意$n\in N^*$都有$T_n=2b_n-1$，且$S_n\leqslant S_k$(k为常数)，求正整数k的值.

7．已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_n>0$，$S_3=15$，公差$d>1$，且__________．从①a_2-1为a_1-1与a_3+1等比中项，②等比数列$\{b_n\}$的公比为$q=3$，$b_1=a_1,b_2=a_4$这两个条件中，选择一个补充在上面问题的横线上，使得符合条件的数列$\{a_n\}$存在并作答．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{1}{6}$．

8．在①$S_n=\frac{1}{2}(a_n-1)(n+2)$，②$S_n{}^2-(n^2+2n-1)S_n-(n^2+2n)=0$，$a_n>0$这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答．

问题：已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足__________．记数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的前n项和为T_n．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求证：$\frac{1}{3}\le T_n<\frac{3}{4}$．

注：如果两个条件都选择作答，则按照第一个解答评分．

9．在①$3a_2+b_2+b_4=0$，②$a_4=b_4$，③$S_3=-27$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的λ存在，求实数λ的取值范围；若问题中的λ不存在，请说明理由．

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，__________，$a_5=b_1$，$4T_n=3b_n-1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，是否存在实数$\lambda$，对任意$n\in\mathbf{N}^*$都有$\lambda\le S_n$？

10．①$\{a_n\}$公比为2，且a_4是a_3与a_5-8的等差中项；②$a_2=4,S_3=14$且$\{a_n\}$为递增数列，在①②中任选一个，补充在下列横线上并解答．

已知等比数列$\{a_n\}$中，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若__________．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=(n+1)\log_2 a_n$，记数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$，求证：$\frac{1}{2}\le T_n<1$．

11．给出以下三个条件：①$S_5=15$；②a_1，a_3，a_9成等比数列；③$a_6=3a_2$．请从这三个条件中任选一个，补充到下面问题中，并完成作答．若选择多个条件分别作答，以第一个作答计分．

已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_1=1$，_____．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=3^n$，令$c_n=a_nb_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

12．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为正实数，满足$a_1=4$，且a_1,a_3,a_5+4成等比数列．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，若$b_1=1$，且__________，求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前项和为T_n，以下有三个条件：①$S_n=2^n-1,n\in\mathrm{N}^*$；②$S_n=2b_n-1,n\in\mathrm{N}^*$；③$S_{n+1}=2S_n-1,n\in\mathrm{N}^*$从中选一个合适的条件，填入上面横线处，使得数列$\{b_n\}$为等比数列，并根据题意解决问题.

13. 在①$a_1=1$，②$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{a_n}(n\geq 2)$，③点$(a_n,a_{n+1})$在直线$y=x+1$上；这三个条件中任选两个，补充到下面问题中，并解答.若数列$\{a_n\}$的前n项和为Sn，满足_________.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)是否存在正整数k，使a_k,S_{2k},a_{4k}成等比数列？若存在，求k的值；若不存在，说明理由.

14. 已知向量$\vec{m}=\left(\sqrt{3}\sin\frac{x}{2},1\right)$，$\vec{n}=\left(\cos\frac{x}{2},\sin^2\frac{x}{2}\right)$，设函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$.

(1)求函数$f(x)$的单调递增区间；

(2)设$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且____，求$f(B)$的取值范围.

从下面三个条件中任选一个，补充在上面的问题中作答.

①$\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}+\tan A+\tan B=0$；②$(2c+b)\cos A+a\cos B=0$；③$a$，$b$，$c$成等比数列.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一解答计分.

15. 已知$\{a_n\}$为无穷数列，给出以下二个定义：

I.若对任意的$n\geq 3(n\in\mathbf{N}^*)$，总存在$i$，$j\in\mathbf{N}^*$且$i<j<n$，使$a_n=a_i+a_j$成立，则称$\{a_n\}$为“$H$数列”；

II.若$\{a_n\}$为“H数列”，且对任意的$n\geq 3(n\in\mathbf{N}^*)$，总存在唯一的有序数对$(i,j)(i,j\in N^*,i<j)$使$a_n=a_i+a_j$成立，则称$\{a_n\}$为“强$H$数列”；

(1)若$a_n=2n-1$，判断数列$\{a_n\}$是否为“H数列”，说明理由；

(2)从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得数列$\{a_n\}$存在且不为常数列，求同时满足所选两个条件的所有数列$\{a_n\}$的通项公式

条件①：$\{a_n\}$为等差数列；

条件②：$\{a_n\}$为等比数列；

条件③：$\{a_n\}$为“强H数列”.

16. 在① $3S_{n+1}=S_n+1$，② $a_2=\frac{1}{9}$，③ $2S_n=1-3a_{n+1}$这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，并给出解答.

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n满足__________，__________；正项等差数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，且b_1，b_2-1，b_3成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $c_n = a_n b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

17. 从① $\frac{S_{n+3}}{n+3} - \frac{S_n}{n} = 3$；② $a_2 a_5 = 27$，③ $S_6 = 36$，这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中并作答：

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差大于零，且前 n 项和为 $S_n\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$，若 $a_4 = 7$，________，

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$，求数列 b_n 的前 n 项和 T_n．

注：如果选择多个条件分别解答，那么按照第一个解答计分

18. 在① $S_3 = 9$，$S_5 = 20$；②公差为 2，且 S_1、S_2、S_4 成等比数列；③ $S_n = 3n^2 + 8n$；三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答．

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列，其前项和为 S_n，_____．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $c_n = \left[\log_2 a_n\right]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求 $c_1 + c_2 + \cdots + c_{20}$ 的值．

19. 在① $6Sn = an^2 + 3an - 4$；② $an = 2an_{-1} - 3n + 5$，两个条件中选择一个，补充在下面的问题中，并解答该问题．已知正项等差数列 $\{an\}$ 和等比数列 $\{bn\}$，数列 $\{an\}$ 前 n 项和为 Sn，满足 $a_2 = 2b_2 - 1$，$a_3 = b_3 + 2$，___．

(1) 求 $\{an\}$ 和 $\{bn\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\{an\}$ 和 $\{bn\}$ 中的所有项分别构成集合 A，B，将 $A \cup B$ 的所有元素按从小到大依次排列构成一个新数列 $\{cn\}$，求数列 $\{cn\}$ 的前70项和．

20. 已知① $2a_3 = b_3 + b_4$；② $S_2 = 3$；③ $a_4 = a_3 + 2a_2$，在这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答．

设正项等比数列 $\{an\}$ 的前 n 项和为 Sn，数列 $\{bn\}$ 的前 n 项和为 Tn，_____，$a_1 = b_2$，对 $\forall n \in N_+$ 都有 $Tn = n^2 + 2b_1 n$ 成立．

(1) 求数列 $\{an\}$、$\{bn\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{an \cdot bn\}$ 的前 n 项和 Hn．

21. 在① $a_1 + a_3 = 6$，$a_5 = 9$，② $a_1 = 1$，$4Sn = an^2 + 4n - 1$，③ $a_1 = 1$，$a_2 a_3 = a_8$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的 m，t 存在，求 m，t 的值；若问题中的 m，t 不存在，说明理由．

问题：已知等差数列 $\{an\}$ 为递增数列，其前 n 项和为 Sn，且___．在数列 $\{an\}$ 的前20项中，是否存在两项 am，at（m，$t \in \mathrm{N}*$ 且 $m < t$），使得 $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{a_t}$ 成等比数列．

22. 在① $a_3 = 5$，$a_5 + a_7 = 22$；② $a_1 = 1$，$S_5 = 25$；③ $S_n = n^2$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，然后解答补充完整的题目．

已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若___________．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $c_n = 2^{a_n} + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

23．在① $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n$，② $2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n} = 2^{n+1} - 2$ 这两个条件中任选一个，补充在下面的问题中并作答

问题：在数列$\{a_n\}$中，已知__________.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式

(2) 若 $b_n = \frac{2a_n - 1}{3^{a_n}}$ 求数列$\{b_n\}$的前n项和 S_n

注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分

24．在① $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(n+2)a_n}{n}$，② $S_n = \frac{n+2}{3}a_n$ 这两个条件中任选一个外充在下面问题中，并解答下列题目.

设首项为2的数列$\{a_n\}$的前n项和为 S_n，前n项积为 T_n，且____.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{c_n\}$的前n项和为 a_n，令 $d_n = c_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$，求数列$\{d_n\}$的前$n$项和 M_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

25．已知递增的等差数列$\{a_n\}$，其前n项和为 S_n，$b_n = \frac{a_n}{2^n}$，从① $a_4 + a_5 = 8$，② $a_3 a_6 = \frac{55}{4}$，③ S_{10}=50中选出两个作为条件，求数列$\{b_n\}$的最大项.

注：如果选择多种方案分别解答，则按第一个解答计分.

参考答案

1.【答案】(1)答案见解析

(2) $T_n=3n^2-n$

【分析】

选①②④时：(1)直接利用等差数列的性质求出数列的首项和公差，进一步求出数列的通项公式；(2)利用求和公式的应用求出结果.

选①③④时：(1)直接利用等差数列的性质求出数列的首项和公差，进一步求出数列的通项公式；(2)利用求和公式的应用求出结果.

【详解】

(1)

选①②④时：设数列的首项为a_1，公差为d，

由于①$d^2=9$；②$\{a_n\}$单调递减，

故$d=-3$，

由于④$5\left(a_2+a_4\right)=a_3^2+25$，

整理得：$10a_3=a_3^2+25$，

所以：$10\times\left(a_1+2d\right)=25+(a_1+2d)^2$，

解得：$a_1=11$，

故：$a_n=11-3\left(n-1\right)=14-3n$；

选①③④时：

①$d^2=9$；③S_n有最小值；④$5\left(a_2+a_4\right)=a_3^2+25$.

由于等差数列S_n有最小值，故$d>0$，

所以$d=3$，

设数列的首项为a_1，公差为d，

由于④$5\left(a_2+a_4\right)=a_3^2+25$，

整理得：$10a_3=a_3^2+25$，

所以：$10\times\left(a_1+2d\right)=25+(a_1+2d)^2$，

解得：$a_1=-1$，

所以：$a_n=-1+3\left(n-1\right)=3n-4$.

(2)

选①②④时：

因为$b_n=a_{2n}=14-6n$，

所以$T_n=\dfrac{n\left(8+14-6n\right)}{2}=11n-3n^2$.

选①③④时：

因为$b_n=a_{2n}=6n-4$；

所以$T_n=\dfrac{n\left(2+6n-4\right)}{2}=3n^2-n$.

2.【答案】$T_n=\begin{cases}(2n-5)\cdot 2^{n+1}+12, n\geq 2,\\ 0, n=1.\end{cases}$

【分析】

根据题目所给的条件推出$\{a_n\}$ 的通项，再计算出$\{b_n\}$ 的通项，将所选择的条件加入，利用错位相减法即可求解.

【详解】

解：因为$S_n-S_{n-1}-(S_{n-1}-S_{n-2})=2$，

所以当$n\geq 3$时，$a_n-a_{n-1}=2$，

所以$b_n=\left(a_{n+1}-a_n\right)^2=\begin{cases}2^n, n\geq 2\\ 1, n=1\end{cases}$，

若选择①，

由$b_1+b_2=5=5a_2$，得$a_2=1$，

又$b_1=1=a_2-a_1$，所以$a_1=0$，

所以$a_n=\begin{cases}2n-3, n\geq 2\\ 0, n=1\end{cases}$ ，

所以当$n\geq 2$时，$T_n=0\times 1+1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n$，

$2T_n=0\times 2^1+1\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n+1}$，

以上两式相减得

$-T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+2\times 2^4+\cdots+2\times 2^n-(2n-3)\cdot 2^{n+1}=-(2n-5)\cdot 2^{n+1}-12$，

所以当$n\geq 2$时，$T_n=(2n-5)\cdot 2^{n+1}+12$，

所以$T_n=\begin{cases}\left(2n-5\right)\cdot 2^{n+1}+12, n\geq 2\\ 0, n=1\end{cases}$；

若选择②，

因为$a_3=b_2-1=3$，所以$a_2=a_3-2=1$.

又$b_1=1=a_2-a_1$，所以$a_1=0$.

所以$a_n=\begin{cases}2n-3, n\geq 2\\ 0, n=1\end{cases}$，

所以当$n\geq 2$时，$T_n=0\times 1+1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n$，

$2T_n=0\times 2^1+1\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n+1}$，

以上两式相减得

$-T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+2\times 2^4+\cdots+2\times 2^n-(2n-3)\cdot 2^{n+1}=-(2n-5)\cdot 2^{n+1}-12$，

所以当$n\geq 2$时，$T_n=(2n-5)\cdot 2^{n+1}+12$，

所以$T_n=\begin{cases}\left(2n-5\right)\cdot 2^{n+1}+12, n\geq 2\\ 0, n=1\end{cases}$；

若选择③，

因为$S_3=4$，所以$a_1+a_2+a_3=a_1+2a_2+2=4$，

又 $b_1=1=a_2-a_1$，所以 $a_1=0$， $a_2=1$.

所以 $a_n=\begin{cases}2n-3, n\geq 2\\ 0, n=1\end{cases}$

所以当 $n\geq 2$ 时， $T_n=0\times 1+1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n$，

$2T_n=0\times 2^1+1\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n+1}$，

以上两式相减得

$-T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+2\times 2^4+\cdots+2\times 2^n-(2n-3)\cdot 2^{n+1}=-(2n-5)\cdot 2^{n+1}-12$，

所以当 $n\geq 2$ 时， $T_n=(2n-5)\cdot 2^{n+1}+12$，

所以 $T_n=\begin{cases}(2n-5)\cdot 2^{n+1}+12, n\geq 2\\ 0, n=1\end{cases}$；

综上， $T_n=\begin{cases}(2n-5)\cdot 2^{n+1}+12, n\geq 2\\ 0, n=1\end{cases}$.

3.【答案】(1) $a_n=3n-17$

(2) 5

【分析】

（1）由题意可知 $a_1=-5-3d$，若选①、②、③，利用等差数列的通项公式将①、②、③中等式化简成 a_1,d 的表达式，再分别与 $a_1=-5-3d$ 联立，可求出 a_1,d，进而求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）由（1），求出数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项和 S_k，再令 $S_k=-40$，求出 k 的值即可.

【详解】

(1)

解：因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$，

又 $a_2+a_3+a_7=-15$，所以 $a_1=-5-3d$，

选①，则 $a_1+a_6+a_{10}=3a_1+14d=-15+5d=0$，得 $d=3$，

故 $a_1=-14$，

$\therefore a_n=3n-17$.

选②，则 $-2a_2=-2a_1-2d=a_1+12d=a_{13}$，

得 $3a_1=-15-9d=-14$，得 $d=3$，

故 $a_1=-14$，

$\therefore a_n=3n-17$.

选③，则 $a_3a_5=(a_1+2d)(a_1+4d)=(a_1+6d)^2=a_7^2$，

$(-5-d)(-5+d)=(-5+3d)^2$，得 $d=3$，

故 $a_1=-14$，

$\therefore a_n=3n-17$；

(2)

解：由（1）得 $a_n=3n-17$，则 $S_k=\dfrac{(-14+3k-17)k}{2}=-40$，

解得 $k=5$ 或 $k=\frac{16}{3}$（舍去），所以 k 的值为5.

4.【答案】(1)证明见解析；

(2)答案见解析.

【分析】

（1）由题可得 $2a_{n+1}-2=a_n-1$，$2b_{n+1}=b_n$，即证；

（2）选①利用分组求和法即得；选②利用错位相减法即得；选③利用裂项相消法即求.

【详解】

(1)

因为 $2a_{n+1}=a_n+1$，

所以 $2a_{n+1}-2=a_n-1$，

因为 $b_n=a_n-1$，

所以 $2b_{n+1}=b_n,\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}$，

因为 $b_1=a_1-1=\frac{1}{4}$，

所以数列$\{b_n\}$是以 $\frac{1}{4}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列；

(2)

由上可得 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

选①：因为 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

所以 $n+b_n=n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

则 $T_n=\left(1+\frac{1}{4}\right)+\left(2+\frac{1}{8}\right)+\left(3+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$=(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$，

故 $T_n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$；

选②：因为 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

所以 $\frac{n+1}{b_n}=(n+1)\cdot 2^{n+1}$

则 $T_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^{n+1}$，

$2T_n=2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n+1)\times 2^{n+2}$，

$T_n=-2\times 2^2-2^3-2^4-\cdots-2^{n+1}+(n+1)\times 2^{n+2}$

$=(n+1)\times 2^{n+2}-\dfrac{2^3\left(1-2^{n-1}\right)}{1-2}-2\times 2^2=(n+1)\times 2^{n+2}+8-2^{n+2}-8=n\times 2^{n+2}$，

故 $T_n=n\cdot 2^{n+2}$；

选③：因为 $b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，

所以 $\dfrac{4}{\log_2 b_n\cdot\log_2 b_{n+1}}=4\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

则 $T_n=4\left[\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right]$

$=4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{2n}{n+2}$，

故 $T_n=\dfrac{2n}{n+2}$.

5.【答案】(1) $a_n=2n-1\left(n\in N^*\right)$

(2) $T_n=\dfrac{2n(n+1)}{2n+1}$

【分析】

（1）根据所选条件构造数列或利用 S_n 与 a_n 关系求解

（2）根据题意求和，使用裂项相消法

【详解】

(1)

若选①：由 $na_{n+1}=(n+1)a_n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

令，$c_n=\dfrac{a_n}{n}$，可得 $c_{n+1}-c_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

当 $n\geq 2$ 时，$c_n-c_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，$c_{n-1}-c_{n-2}=\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}$，…，$c_2-c_1=1-\dfrac{1}{2}$，

累加得 $c_n-c_1=1-\dfrac{1}{n}$.

又 $c_1=\dfrac{a_1}{1}=1$，则 $c_n=2-\dfrac{1}{n}(n\geq 2)$，则 $a_n=nc_n=2n-1(n\geq 2)$.

又 $a_1=1$ 也适合上式，所以 $a_n=2n-1\left(n\in N^*\right)$.

若选②：由 $S_n^2-\left(n^2-1\right)S_n-n^2=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，可得 $\left(S_n+1\right)\left(S_n-n^2\right)=0$.

又 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $S_n+1>0$，所以 $S_n=n^2$，则 $a_1=S_1=1^2=1$.

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

又 $a_1=1$ 也适合上式，所以 $a_n=2n-1\left(n\in N^*\right)$.

若选③：由 $a_n^2+2a_n=4S_n-1$ 得，当 $n\geq 2$ 时，$a_{n-1}^2+2a_{n-1}=4S_{n-1}-1$，两式作差得

$4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}$，整理得 $2(a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})$.

由于 $a_n > 0$，故 $a_n - a_{n-1} = 2$，即 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为2的等差数列，所以 $a_n = 2n-1(n \in N^*)$.

(2)

由（1）得 $a_n = 2n-1$，$S_n = \dfrac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$，

则 $b_n = \dfrac{4S_n}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = = n + \dfrac{1}{2} \times \left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)\right] =$

$n + \dfrac{1}{2} \times \left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{2n(n+1)}{2n+1}$.

6.【答案】条件选择见解析，11

【分析】

由 $Tn=2bn-1$，求出 $b_1=1$ 和 $bn=2bn_{-1}$，可以判断出数列 $\{bn\}$ 是首项为1，公比为2的等比数列，求出 $b_n=2^{n-1}$. 分别选择条件①②③时，利用基本量代换，均可以求出 $an=35-3n$，判断出当 $n\leqslant 11$ 时，$an>0$，当 $n>11$ 时，$an<0$，即可求出 Sn 取得最大值时正整数 k 的值为11.

【详解】

由 $Tn=2bn-1$，$n\in N^*$ 得，

当 $n=1$ 时，$b_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$Tn_{-1}=2bn_{-1}-1$，

从而 $bn=Tn-Tn_{-1}=2bn-2bn_{-1}$，即 $bn=2bn_{-1}$，

由此可知，数列 $\{bn\}$ 是首项为1，公比为2的等比数列，

故 $b_n=2^{n-1}$.

选条件①：当 $a_5=b_3+b_5$ 时，$a_1=32$，$a_5=20$，

设数列 $\{an\}$ 的公差为 d，则 $a_5=a_1+4d$，

即 $20=32+4d$，解得 $d=-3$，

所以 $an=32-3(n-1)=35-3n$，

因为当 $n\leqslant 11$ 时，$an>0$，当 $n>11$ 时，$an<0$，

所以当 $n=11$ 时，Sn 取得最大值.

因此，正整数 k 的值为11.

选条件②：当 $S_3=87$ 时，$a_1=32$，$3a_2=87$，

设数列 $\{an\}$ 的公差为 d，则 $3(32+d)=87$，

解得 $d=-3$，

所以 $an=32-3(n-1)=35-3n$，

因为当 $n\leqslant 11$ 时，$an>0$，当 $n>11$ 时，$an<0$，

所以当 $n=11$ 时，Sn 取得最大值，

因此，正整数 k 的值为11.

选条件③：当$a_9-a_{10}=b_1+b_2$时，$a_1=32$，$a_9-a_{10}=3$，

设数列$\{an\}$的公差为d，则$-d=3$，解得$d=-3$，

所以$an=32-3(n-1)=35-3n$，

因为当$n\leqslant 11$时，$an>0$，当$n>11$时，$an<0$，

所以当$n=11$时，Sn取得最大值，

因此，正整数k的值为11.

7.【答案】(1)选择条件见解析，$a_n=2n+1$

(2)证明见解析

【分析】

（1）根据选择条件求解

（2）数列求和后证明，使用裂项相消法

【详解】

(1)

若选①，a_2-1为a_1-1与a_3+1的等比中项，

则$\left(a_1-1\right)\left(a_3+1\right)=\left(a_2-1\right)^2$，由$\left\{a_n\right\}$为等差数列，$S_3=15$，得$3a_2=15$，$\therefore a_2=5$，

把$a_2=5$代入上式，可得$\left(4-d\right)\left(6+d\right)=16$，解得$d=2$或$d=-4$（舍）

$\therefore a_1=3$，$a_n=2n+1$；

若选②，$q=3$为等比数列$\left\{b_n\right\}$的公比，且$b_1=a_1,b_2=a_4$，

可得$b_2=3b_1$，即$a_4=3a_1$，即有$(a_1+3d)=3a_1$，即$2a_1=3d$；

又$S_3=15$，可得$3a_1+\frac{1}{2}\times 3\times 2d=15$，即$a_1+d=5$，解得$d=2,a_1=3$，

此时$a_n=2n+1$；

(2)

$\because \frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{\left(2n+1\right)\left(2n+3\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，

$\therefore T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$；

$\therefore T_n<\frac{1}{6}$，得证

8.【答案】(1) $a_n=2n+1$

(2)证明见解析

【分析】

（1）选择①则利用退位相减法求a_n，选择②则先求S_n，再求a_n（2）利用裂项相消法先求T_n，所要证明的不等式右端可以通过放缩证明，左端利用T_n的单调性可证.

【详解】

(1)

选择①

由$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n-1\right)\left(n+2\right)$有

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1}{2}\left(a_1-1\right)\left(1+2\right)$，解得 $a_1=3$

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-1\right)\left(n+1\right)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}\left(a_n-1\right)\left(n+2\right)-\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-1\right)\left(n+1\right)$，

即 $na_n=\left(n+1\right)a_{n-1}+1$，两边各项同除以 $n(n+1)$ 得

$\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_{n-1}}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$（$n\geq 2$），

当 $n\geq 2$ 时

$$\frac{a_n}{n+1}=\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_{n-1}}{n}\right)+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-2}}{n-1}\right)+\left(\frac{a_{n-2}}{n-1}-\frac{a_{n-3}}{n-2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_1}{2}\right)+\frac{a_1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}$$

$\therefore a_n=2n+1$

经检验当 $n=1$ 时，$a_n=2n+1$ 也成立，故 $a_n=2n+1$

选择②

由 $S_n^2-\left(n^2+2n-1\right)S_n-\left(n^2+2n\right)=0$

$\Rightarrow\left[S_n-\left(n^2+2n\right)\right]\left(S_n+1\right)=0$

所以 $S_n=n^2+2n$ 或 $S_n=-1$

$\because a_n>0$，所以 $S_n=-1$ 舍去

$\therefore S_n=n^2+2n$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2+2\times 1=3$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-(n-1)^2-2(n-1)=2n+1$，

当 $n=1$ 时，符合上式，$\therefore a_n=2n+1$

(2)

选择①

由（1）知 $a_n=2n+1$，已知 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n-1\right)\left(n+2\right)$

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\left(a_n-1\right)\left(n+2\right)=\frac{1}{2}\left(2n+1-1\right)\left(n+2\right)=n\left(n+2\right)$

$\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

$\therefore T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$

$\therefore T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}<\frac{3}{4}$

另一方面，T_n是关于n的增函数，

$\therefore T_n \geqslant T_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(1+1)}-\frac{1}{2(1+2)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

综上有：$\frac{1}{3}\le T_n<\frac{3}{4}$

选择②

由（1）知$S_n=n^2+2n$

$\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$

$\therefore T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}<\frac{3}{4}$

另一方面，T_n是关于n的增函数，

$\therefore T_n \geqslant T_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(1+1)}-\frac{1}{2(1+2)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

综上有：$\frac{1}{3}\le T_n<\frac{3}{4}$.

9.【答案】答案见解析

【分析】

由已知条件可得$b_n=-(-3)^{n-1}$，假设$n=k$时，S_n取最小值，则$\begin{cases}S_{k-1}\ge S_k\\ S_k\le S_{k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_k\le 0\\ a_{k+1}\ge 0\end{cases}$，

若补充条件是①，则可求得$a_n=3n-16$，代入化简可求出k的取值范围，从而可求得答案，若补充条件是②，则可得$a_n=-28n+139$，该数列$\{a_n\}$是递减数列，所以不存在k，使得S_n取最小值，若补充条件是③，则可得$a_n=\frac{8}{3}n-\frac{43}{3}$，代入化简可求出$k$的取值范围，从而可求得答案，

【详解】

解：等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

当$n=1$时，$4T_1=3b_1-1$，得$b_1=-1$，从而$a_5=-1$，

当$n\ge 2$时，$4b_n=4T_n-4T_{n-1}=(3b_n-1)-(3b_{n-1}-1)=3b_n-3b_{n-1}$

得$b_n=-3b_{n-1}$，所以数列$\{b_n\}$是首项为-1，公比为-3的等比数列，

所以$b_n=-(-3)^{n-1}$，

由对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$\lambda\le S_n$，

当等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n存在最小值时，

假设$n=k$时，S_n取最小值，所以$\begin{cases}S_{k-1}\ge S_k\\S_k\le S_{k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_k\le 0\\a_{k+1}\ge 0\end{cases}$；

若补充条件是①$3a_2+b_2+b_4=0$，因为$b_2=3$，$b_4=27$，

从而$a_2=-\frac{1}{3}\left(b_2+b_4\right)=-10$，由$a_5=a_2+3d$得$d=3$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=a_2+(n-2)d=-10+3(n-2)=3n-16$，

由等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n存在最小值，则$\begin{cases}3k-16\le 0\\3\left(k+1\right)-16\ge 0\end{cases}$，得$\frac{13}{3}\le k\le\frac{16}{3}$，

又$k\in\mathbf{N}^*$，所以$k=5$.

所以$\lambda\le S_5=-35$，故实数λ的取值范围为$(-\infty,-35]$.

若补充条件是②$a_4=b_4$，

由$b_4=27$，即$a_4=27$，又$a_5=b_1=-1$，

所以$d=a_5-a_4=-1-27=-28$.

所以$a_n=a_1+(n-1)d=a_5+(n-5)d=-1-28(n-5)=-28n+139$，

由于该数列$\{a_n\}$是递减数列，所以不存在k，使得S_n取最小值，故实数λ不存在

以下为严格的证明：

由等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n存在最小值，

则$\begin{cases}-28k+139\le 0\\-28\left(k+1\right)+139\ge 0\end{cases}$，得$\begin{cases}k\ge\frac{139}{28}\\k\le\frac{111}{28}\end{cases}$，

所以$k\in\varnothing$，所以不存在k，使得S_n取最小值，故实数λ不存在.

若补充条件是③$S_3=-27$，

由$S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=-27$，得$a_2=-9$，

又$a_5=b_1=-1=a_2+3d$，所以$d=\frac{a_5-a_2}{3}=\frac{8}{3}$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=a_2+(n-2)d=-9+\frac{8}{3}(n-2)=\frac{8}{3}n-\frac{43}{3}$

由等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n存在最小值，则$\begin{cases}\frac{8}{3}k-\frac{43}{3}\le 0\\\frac{8}{3}\left(k+1\right)-\frac{43}{3}\ge 0\end{cases}$，

得$\frac{35}{8}\le k\le\frac{43}{8}$，又$k\in\mathbf{N}^*$，所以$k=5$.

所以存在$k=5$，使得S_n取最小值，

所以$\lambda \leq S_5 = -\dfrac{95}{3}$，故实数$\lambda$的取值范围为$\left(-\infty, -\dfrac{95}{3}\right]$.