7.2.1　三角函数的定义

学习目标

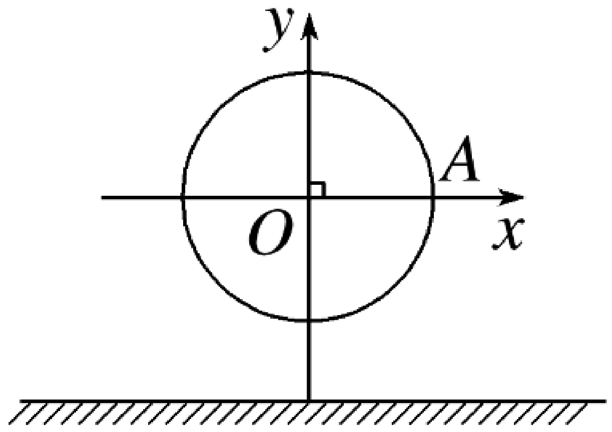
1.理解任意角的三角函数的定义.

2.掌握三角函数值在各个象限的符号.

3.掌握由角或角终边上点的坐标求角的正弦、余弦、正切.

导语

游乐园是人们常去的地方，各种神奇的游乐器械吸引着人们去玩耍，尤其是那高大的摩天轮，带着人们在空中旋转，既好玩又刺激，我们假设一摩天轮的中心离地面h米，它的半径为r米，按逆时针方向匀速转动，转动一周需要360秒，我们建立如图所示的直角坐标系，假设你现在的位置在A处，经过30秒，你离地面有多高？经过210秒呢？经过570秒呢？带着这些问题，开始我们今天的新课.



内容索引

一

任意角的正弦、余弦与正切的定义

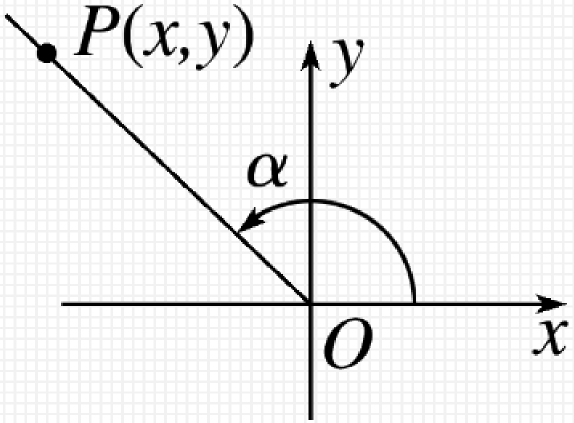
问题1　初中我们学习过锐角的三角函数，正弦、余弦和正切，这三个三角函数分别是怎样定义的？

提示　在初中，我们是在直角三角形中定义的，正弦是对边比斜边，余弦是邻边比斜边，正切是对边比邻边.

问题2　之前学习了任意角，我们也把任意角放到了平面直角坐标系中，那么角的终边和半径为r的圆是否有交点？交点唯一吗？

提示　有交点，交点唯一.

任意角的正弦、余弦与正切的定义

前提	如图，设$P(x，y)$是α终边上异于原点的任意一点，$r=\sqrt{x^2+y^2}$	

知识梳理

定义	正弦	称____$\frac{y}{r}$____为角α的正弦，记作$\sin\alpha$，即$\sin\alpha=$____$\frac{y}{r}$____
	余弦	称____$\frac{x}{r}$____为角α的余弦，记作$\cos\alpha$，即$\cos\alpha=$____$\frac{x}{r}$____
	正切	当角α的终边不在y轴上时，称____$\frac{y}{x}$____为角α的正切，记作$\tan\alpha$，即$\tan\alpha=$____$\frac{y}{x}$____$(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in\mathbf{Z})$
	角α的正弦、余弦、正切都称为α的____三角函数____	

知识梳理

注意点：

(1)三角函数值是比值，是一个实数.

(2)三角函数值的大小与点P的位置无关，只与角α的终边位置有关.

例1 (1)已知θ终边上一点$P(x,3)(x\neq0)$，且$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}x$，求$\sin\theta$，$\tan\theta$.

解

由题意知 $r=OP=\sqrt{x^2+9}$,

由三角函数定义得 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

又∵$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}x$,

∴$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{10}}{10}x$.

∵$x\neq0$，∴$x=\pm1$.

当$x=1$时，$P(1,3)$，

此时 $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\theta=\frac{3}{1}=3$.

解

当$x=-1$时，$P(-1,3)$，

此时 $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{-1}=-3$.

(2)已知角α的终边落在射线$y=3x(x\geqslant 0)$上，求$\sin\alpha$，$\cos\alpha$的值.

解

设射线 $y=3x(x\geqslant 0)$上任一点 $P(x_0, y_0)$(原点除外), 则 $OP=r=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$,

$\because y_0=3x_0$，$\therefore r=\sqrt{10}x_0$,

$\therefore \sin\alpha=\frac{y_0}{r}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{x_0}{r}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

延伸探究

1.若将本例(1)中"$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}x$"改为"$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$"，求 $\sin\theta$，$\tan\theta$.

解

依题意$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，解得 $x=1$，

∴点 $P(1,3)$，$r=\sqrt{10}$，

∴$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}=3$.

2.若将本例(2)中条件“α的终边落在射线$y=3x(x\geqslant 0)$上”换为“α的终边落在直线$y=3x$上”，其结论又如何呢？

解

①若α的终边落在第一象限内，

设点$P(a,3a)(a>0)$是其终边在第一象限内任意一点，

因为 $r=OP=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10}a$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

②若α的终边在第三象限内，

设点$P(a,3a)(a<0)$是其终边在第三象限内任意一点，

因为 $r=OP=\sqrt{a^2+9a^2}=-\sqrt{10}a(a<0)$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3a}{-\sqrt{10}a}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{a}{-\sqrt{10}a}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

反思感悟

利用三角函数的定义求值的策略

(1)已知角α的终边在直线上求α的三角函数值时，应分两种情况来处理，把直线看成两条射线，在两条射线上各任取一点坐标$(a，b)(a\neq 0)$，则对应角的正弦值$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，余弦值$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，正切值$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$.

(2)当角的终边上的点的坐标以参数的形式给出时，要根据问题的实际情况对参数进行分类讨论.

跟踪训练1　(1)已知角α的终边过点$P(-3a,4a)(a\neq 0)$，则$2\sin\alpha+\cos\alpha=$ __1或-1__.

解析

因为 $r=\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}=5|a|$,

①若$a>0$，则$r=5a$，角α的终边在第二象限.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{5a}=-\frac{3}{5}$,

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=1$.

②若$a<0$，则$r=-5a$，角α的终边在第四象限，

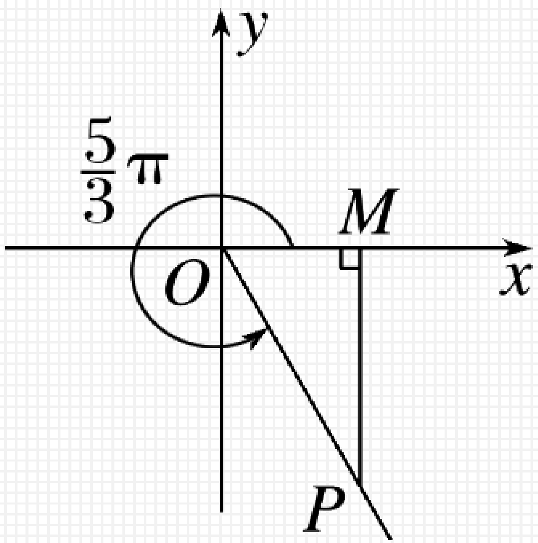
$\sin\alpha=\frac{4a}{-5a}=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-3a}{-5a}=\frac{3}{5}$.

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=-1$.

(2)求$\frac{5\pi}{3}$的正弦、余弦和正切.

解

如图，在$\frac{5\pi}{3}$的终边上取点P，使$OP=2$，作$PM\perp Ox$，



则在Rt△POM中，

$\angle POM=2\pi-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，

所以$\angle OPM=\frac{\pi}{6}$，则$OM=1$，$MP=\sqrt{3}$.

所以点P的坐标为$(1，-\sqrt{3})$，

因此$\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\tan\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

返回

二

正弦、余弦与正切在各象限的符号

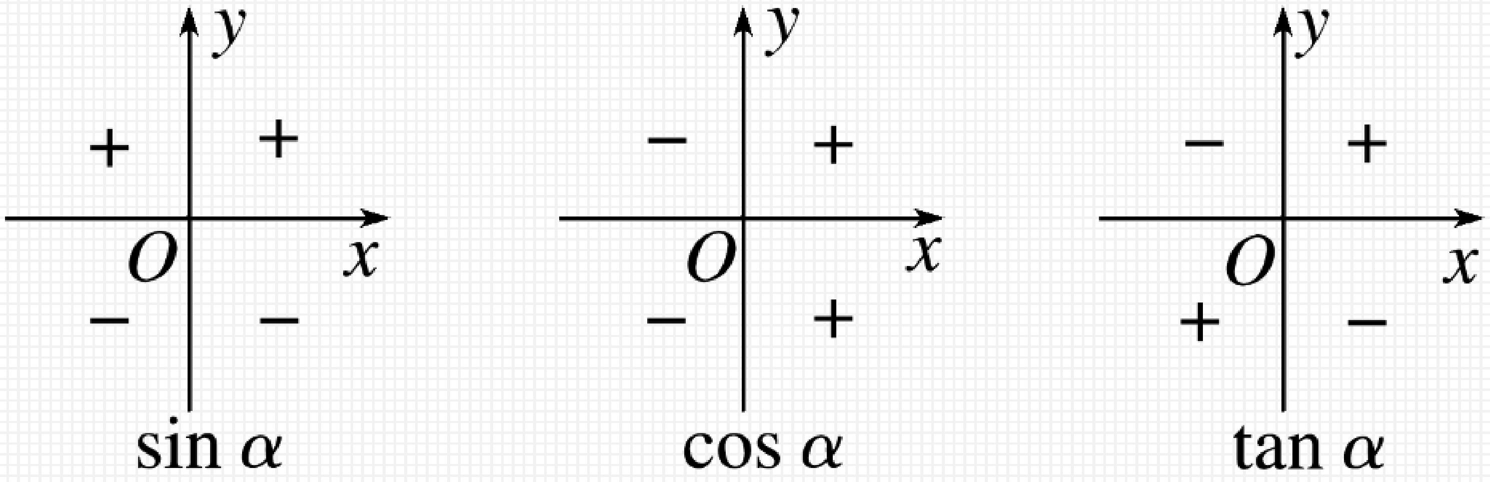
问题3　根据三角函数的定义，大家猜测一下三角函数值在各个象限内的符号.

提示　三角函数值的符号是根据三角函数的定义和各象限内的坐标符号导出的.根据三角函数的定义可知$\left(\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r},\ \tan\alpha=\frac{y}{x}\right)$，正弦的符号取决于纵坐标$y$的符号，余弦的符号取决于横坐标$x$的符号，正切的符号是由纵坐标$y$和横坐标$x$共同决定的，同号为正，异号为负.

知识梳理

正弦、余弦、正切函数值在各象限内的符号

(1)图示：



(2)口诀：“一全正，二正弦，三正切，四余弦”．

例2 (1)若$\sin \alpha \tan \alpha<0$，且$\frac{\cos \alpha}{\tan \alpha}<0$，则角$\alpha$是

A.第一象限角 B.第二象限角

C.第三象限角 D.第四象限角

解析

由$\sin \alpha \tan \alpha<0$可知$\sin \alpha$，$\tan \alpha$异号，从而$\alpha$是第二或第三象限角.

由$\frac{\cos \alpha}{\tan \alpha}<0$可知$\cos \alpha$，$\tan \alpha$异号，从而$\alpha$是第三或第四象限角.

综上可知，α是第三象限角.

(2)(多选)下列选项中，符号为负的是

A.$\sin(-100°)$ B.$\cos(-220°)$

C.$\tan 10$ D.$\cos \pi$

解析

$-100°$是第三象限角，故$\sin(-100°)<0$；

$-220°$是第二象限角，故$\cos(-220°)<0$；

$10\in\left(3\pi, \frac{7\pi}{2}\right)$，是第三象限角，故 $\tan 10>0$；

$\cos \pi=-1<0$.

反思感悟

判断三角函数值符号的两个步骤

(1)定象限：确定角α是第几象限角.

(2)定符号：利用三角函数值的符号规律，即“一全正，二正弦，三正切，四余弦”来判断.