

4.1.2 圆的一般方程

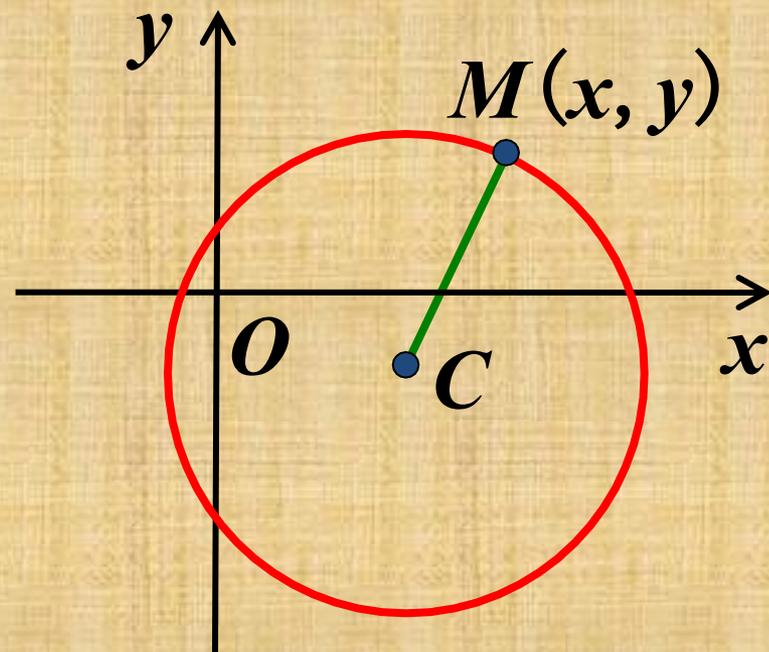
一. 复习引入:

圆心 $C(a, b)$, 半径 r



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

圆的标准方程



特况: 若圆心为 $O(0, 0)$, 则圆的方程为: $x^2 + y^2 = r^2$

一. 圆的一般方程:

思考:下列方程表示什么图形?

圆的标准方程

1、 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

以(1, 2)为圆心,2为半径的圆.

2、 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

以(1, -2)为圆心,2为半径的圆.

3、 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = -1$

不表示任何图形.

探究:

方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 在什么条件下表示圆?

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad \text{①}$$

1) 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 方程①表示以点 $\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ 为圆心, 时, $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 为半径的圆.

2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程①表示点 $\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$.

3) 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程①不表示任何图形.

圆的一般方程:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

圆心: $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

半径: $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

圆的一般方程：

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

圆的一般方程与标准方程的关系：

$$(1) \quad a = -D/2, \quad b = -E/2, \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

(2) 标准方程易于看出圆心与半径

一般方程突出形式上的特点：

① x^2 与 y^2 系数相同并且不等于0；

② 没有 xy 这样的二次项

圆的一般方程与二元二次方程的关系

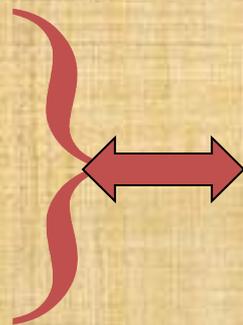
圆的一般方程：

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

与二元二次方程：

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的关系：

1. $A = C \neq 0$
2. $B = 0$
3. $D^2 + E^2 - 4F > 0$



二元二次方程表示圆的一般方程

练习:判别下列方程表示什么图形,如果是圆,就找出圆心和半径.

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

$D = -2, E = 4, F = 1 \quad D^2 + E^2 - 4F = 16$

圆心: $(1, -2)$ 半径: $r = 2$

2) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

$D = -6, E = F = 0 \quad D^2 + E^2 - 4F = 36$

圆心: $(3, 0)$ 半径: $r = 3$

3) $x^2 + y^2 + 2by = 0 \quad (b \neq 0)$

$D = F = 0, E = 2b \quad D^2 + E^2 - 4F = 4b^2$

圆心: $(0, -b)$ 半径: $r = |b|$

练习：将下列圆的一般方程化成标准方程,并找出圆心坐标及半径

$$1) x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$$

$$2) x^2 + y^2 + 2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

$$3) x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$$

例4: 求过三点 $O(0, 0)$, $M_1(1, 1)$, $M_2(4, 2)$ 的方程, 并求出这个圆的半径和圆心坐标.

方法二: 解: 设所求圆的标准方程为:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

因为 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(4,2)$ 都在圆上

待定系数法

$$\begin{cases} (a)^2 + (b)^2 = r^2 \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ (4-a)^2 + (2-b)^2 = r^2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \\ r=5 \end{cases}$$

所求圆的方程为:

$$\text{即 } (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

例4: 求过三点 $O(0, 0)$, $M_1(1, 1)$, $M_2(4, 2)$ 的方程, 并求出这个圆的半径和圆心坐标.

解: 设所求圆的一般方程为:

方法三: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$)

待定系数法

因为 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(4,2)$ 都在圆上, 则

$$\begin{cases} F=0 \\ D+E+F+2=0 \\ 4D+2E+F+20=0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} F=0 \\ D=-8 \\ E=6 \end{cases}$$

所求圆的方程为:

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \quad \text{即} \quad (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

求圆方程的步骤: (待定系数法)

1. 根据题意, 选择标准方程或一般方程.
 - 若已知条件与圆心或半径有关, 通常设为标准方程;
 - 若已知圆经过两点或三点, 通常设为一般方程;
2. 根据条件列出有关 a, b, r , 或 D, E, F 的方程组.
3. 解出 a, b, r 或 D, E, F 代入标准方程或一般方程.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/268112061064006067>