学科背景

十七世纪末，力学、天文学、物理学及工程技术提出大量需要寻求函数关系的问题。在这些问题中，函数关系不能直接写出来，而要根据具体问题的条件和某些物理定律，首先得到一个或几个含有未知函数的导数的关系式，即微分方程，然后由微分方程和某些已知条件把未知函数求出来。

问题的提出：

A.求曲线方程

例 1 一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$，求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y=y(x)$

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad y=\int 2x\,dx \quad \text{即 } y=x^2+C,$$

其中 $x=1$ 时，$y=2$ 求得 $C=1$，

所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

B. 质点自由下落

一质点在重力作用下自由下落（不计空气阻力），试求质点下落距离S与时间t的函数关系。

解：将质点的初始位置取为原点，沿质点运动方向取正向。已知自由落体的加速度为g, 即：

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = g,$$

将上式改写成 $d(\frac{dS}{dt}) = g dt$, 两边积分得: $\frac{dS}{dt} = gt + C_1,$

再积一次分得: $S = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$, 其中 C_1，C_2 为任意常数

5.1 微分方程的基本概念

定义1：含有未知函数的导数的方程称为微分方程.

未知函数是一元函数,含有未知函数的导数的微分方程称为常微分方程.

例如 $\frac{dy}{dx}=2x,$ $\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=g,$

注意：微分方程中，未知函数及自变量可以不出现，但未知函数的导数必须出现.

未知函数是多元函数,含有未知函数的偏导数的微分方程称为偏微分方程.

定义2:（ 微分方程的阶 ）未知函数的导数的**最高阶数**称为**微分方程的阶.**

例如 $\frac{dy}{dx}=4x^2,\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0$

一阶

二阶

二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程.

定义3:（微分方程的解）

如果把函数 $y = y(x)$ 代入微分方程后使方程成为恒等式则称函数 $y = y(x)$ 是微分方程的一个解

微分方程的通解:

n 阶常微分方程的包含 n 个独立的任意常数，且常数个数与微分方程的阶数相同的解

$$y = f(x, C_1, \cdots, C_n)$$

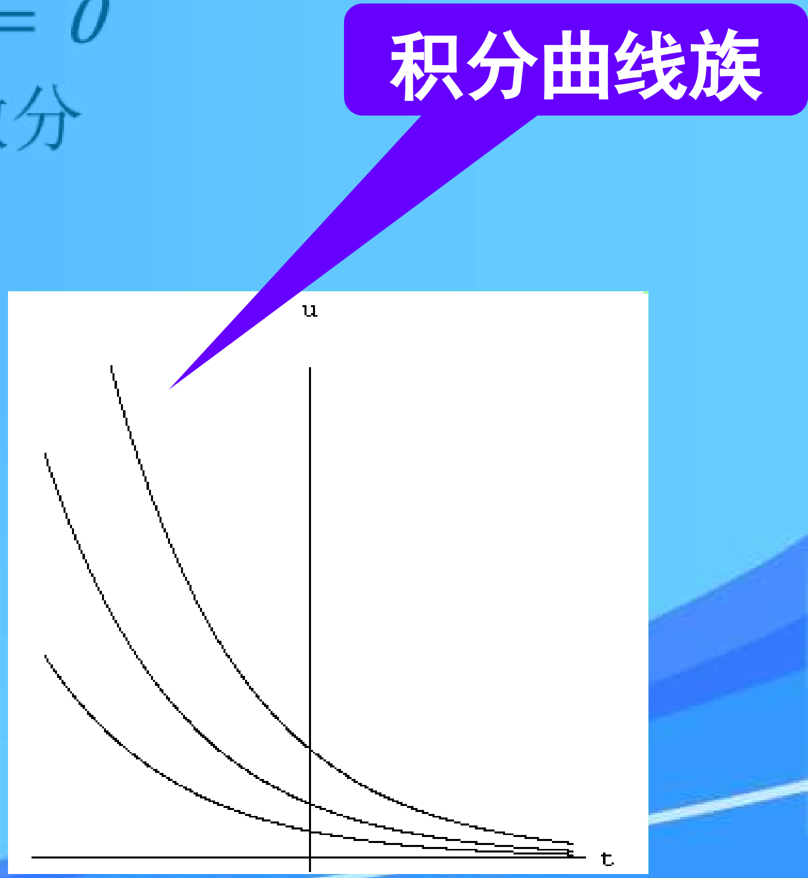
称为微分方程的通解.

通解中各任意常数取特定值时所得到的解称为特解.

定义5：(积分曲线 与积分曲线族)

常微分方程的每一个特解都是一个一元函数 $y = f(x)$ 或是 $F(x, y) = 0$ ($隐式解$), 它的图形称为该常微分方程的一条积分曲线.

通解 $y = f(x, C)$ 对应于 xy 平面上的一族曲线，称为积分曲线族



例验证函数$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$($k$是非零常数)

是微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y = 0$的通解并求满足初始条件

$y\big|_{x=0} = A, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{x=0} = 0$特解

1. 微分方程的通解和特解有何区别和联系?

2. 判断下列函数是否是微分方程 $y' + 2y = 0$ 的解，是通解还是特解?

(1) $y = Ce^{2x}$　(2) $y = Ce^{-2x}$

(3) $y = -2e^{-2x}$　(4) $y = 2e^{2x}$

§5.2 一阶常微分方程

主要类型

1. 变量可分离型 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

或 $f(x)dx=g(y)dy$

2. 可化为可分离变量

3. 一阶线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

5.2.1可分离变量的微分方程

如果一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

右端的$f(x,y)$可以表示为x的函数$g(x)$和y的函数$h(y)$的乘积，

即$f(x,y)=g(x)h(y)$,则形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y)$的方程，称为

可分离变变量的微分程

这类方程的解法，通常是先将变量分离，再两边积分即可

.

[例1] 解方程

(1) $\frac{dy}{dx}=2xy$

(2) $\sqrt{1-y^2}=3x^2y\frac{dy}{dx}$

这两个方程的共同特点是变量可分离型

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\phi(y)$$

分离变量

$$g(y)dy=f(x)dx$$

两边积分 $\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C$ 通解

(1) [解] 分离变量 $\frac{1}{y}dy = 2x\,dx$

两边积分 $\int \frac{1}{y}dy = \int 2x\,dx$

$\ln|y| = x^2 + C_1$ 即 $|y| = e^{x^2+C_1} = e^{x^2}e^{C_1}$

当$y>0$时， $y = e^{C_1}e^{x^2}$ 当$y<0$时， $y = -e^{C_1}e^{x^2}$

记 $C = \pm e^{C_1}$, 则有 $y = Ce^{x^2}$ $(C \neq 0)$

注意：$y \equiv 0$ 也是方程的解!

故C也可以等于零

于是得到方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$

通解 $y = Ce^{x^2}$ $(C \in R)$

(2) [解] $\sqrt{1-y^2}=3x^2y\dfrac{dy}{dx}$

分离变量 $\dfrac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{dx}{3x^2}$

两端积分, 得 $-\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-y^2}=-\dfrac{1}{3x}+C$

通解 $\sqrt{1-y^2}=\dfrac{1}{3x}+C$

注意： $y^2=1$,即$y=\pm 1$也是方程的解! 奇异解

例 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$) 速度为0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解: 根据牛顿第二定律列方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$

初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$

对方程分离变量, 然后积分 : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C$ (此处 $mg-kv>0$)

利用初始条件, 得 $C=-\dfrac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

t 足够大时

$v\approx\dfrac{mg}{k}$

5.2.2 可化为可分离变量的方程

形如$y' = f(\frac{y}{x})$的微分方程称为齐次微分方程

解齐次方程时,通常用变量替换法,即 设$u = \frac{y}{x}$,

将齐次方程化为可变量分离的方程.

由$y = ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入原方程得$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u)$

分离变量得: $\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$,　　两边积分得$\int \frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \ln|x| + C$,

求出积分后,再用$\frac{y}{x}$代替u,即得原方程的通解

[例1] $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

[例2] $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

这两个方程的共同特点是什麼？

可化为 $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ 齐次型方程

求解方法 令 $u=\frac{y}{x}$ 即 $y=xu$ $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

代入得到 $\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$

这是什麼方程？

可分离变量方程！

[例1]的解：令 $u=\dfrac{y}{x}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入得到

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u$$

分离变量 $\cot u\,du=\dfrac{dx}{x}$

两端积分 $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$

$$\sin u=\pm e^{C_1}x=Cx \quad (C\neq 0)$$

由此又得到 $y=x\arcsin(Cx) \quad (C\neq 0)$

注意：$y\equiv 0$ 也是原方程的一个解，

所以可以有 $C=0$

通解 $y=x\arcsin(Cx) \quad (C\in \mathrm{R})$