导数结合洛必达法则巧解高考压轴题

——高考专题研究

戴有刚

2023年12月20日

东北师范大学附属中学

第一部分：历届导数高考压轴题

1.2023年全国2理

设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$，若对所有的 $x\geq 0$，都有 $f(x)\geq ax$ 成立，求实数 a 的取值范围.

2.2023全国1理

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}e^{-ax}$

（Ⅰ）设 $a>0$，讨论 $y=f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$，求 a

3.2023全国1理

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$；

（Ⅱ）若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$，求 a

4.2023全国2理

设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）如果对任何 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a

5.2023辽宁理

设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$

(1)求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2)是否存在实数 a ,使得关于 x 的不等式 $f(x)$ □ a 的解集为 $(0,+\infty)$?若存在,求 a 的取值范围;若不存在,试说明理由.

6.2023新课标理

设函数 $f(x)=e^{x}-1-x-ax^{2}$

（Ⅰ）若 $a=0$，求 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）若当 $x\geq 0$ 时 $f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围.

7.2023新课标文

已知函数 $f(x)=x(e^{x}-1)-ax^{2}$

（I）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时有极值，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（II）当 $x\geq 0$ $f(x)\geq 0$ a

8.2023全国纲领理

设函数 $f(x)=1-e^{-x}$

（I）证明：当 $x>-1$ 时，$f(x)\geq \frac{x}{x+1}$；

（II）设当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq \frac{x}{ax+1}$，求 a 值范围.

9.2023新课标理

已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

（Ⅰ）求 a、b 的值；

（Ⅱ）如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$，求 k

10.自编

自编：若不等式 $\sin x > x - ax^3$ 对于 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立，求 a

第二部分：泰勒展开式

泰勒展开式

$$1.\ e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

其中

$$(0<\theta<1)$$

;

2.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n!}+R_{n},$$

其中

$$R_{n}=(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

;

泰勒展开式

$$3.\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \square + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n$$

其中

$$R_n = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x$$

4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \square + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + R_n$$

其中

$$R_n = (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x$$

第三部分：新课标高考命题趋势及措施

1. 新课标高考命题趋势

近年来的高考数学试题逐步做到科学化、规范化，坚持了稳中求改、稳中创新的原则，充分发挥数学作为基础学科的作用，既重视考查中学数学基础知识的掌握程度，又注重考查进入高校继续学习的潜能。为此，高考数学试题常与大学数学知识有机接轨，以高等数学为背景的命题形式成为了热点.

2.分类讨论和假设反证

许多省市的高考试卷的压轴题都是导数应用问题，其中求参数的取值范围就是一类重点考查的题型.这类题目容易让学生想到用分离参数的方法，一部分题用这种方法很凑效，另一部分题在高中范围内用分离参数的方法却不能顺利解决，高中阶段解决它只有华山一条路——分类讨论和假设反证的方法.

3.洛必达法则

虽然这些压轴题可以用分类讨论和假设反证的方法求解，但这种方法往往讨论多样、过于繁杂，学生掌握起来非常困难.研究发现利用分离参数的方法不能解决这部分问题的原因是出现了$\frac{0}{0}$型的式子，而这就解决这类问题的有

第四部分：洛必达法则及其解法

东北师范大学附属中学

1.洛必达法则

洛必达法则：设函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足：

（1）$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$；

（2）在 $U^{\circ}(a)$ 内，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$ （A 可为实数，也可以是 $\pm\infty$），

则 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$