

C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

7. (2021·广陵区校级模拟) 已知 $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=2\cos(\pi+\alpha)$, 且 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$, 则 $\tan \beta$ 的值为()

A. -7

B. 7

C. 1

D. -1

8. (2015·安庆三模) 若定义域为 D 的函数 $f(x)$ 满足:

① $f(x)$ 在 D 内是单调函数;

② 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$, 则称函数 $f(x)$ 为“半值函数”.

已知函数 $h(x)=\log_c(c^x+t)$ ($c>0, c \neq 1$) 是“半值函数” 则实数 t 的取值范围为()

A. $(0, +\infty)$

B. $(-\infty, \frac{1}{4})$

C. $(\frac{1}{4}, +\infty)$

D. $(0, \frac{1}{4})$

9. (2020 秋·静安区校级期末) 已知不等式 $ax^2+2y^2 \geq x^2y$, 若对于任意 $x \in [1, 2], y \in [2, 3]$, 该不等式恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

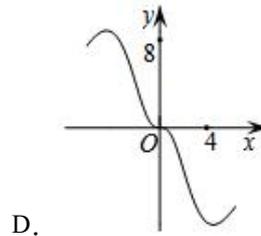
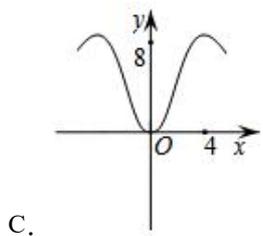
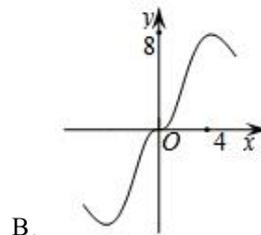
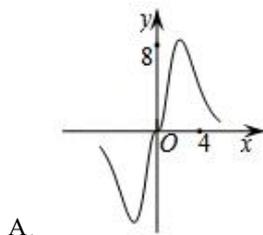
A. $a \geq -3$

B. $a \geq -1$

C. $a \geq \frac{1}{8}$

D. $-1 \leq a \leq \frac{1}{8}$

10. (2021·郑州一模) 函数 $y=\frac{2^{x+1}x^3}{4^x+1}$ 的图象大致为()



二. 多选题 (共 2 小题, 满分 10 分, 每小题 5 分)

11. (2020 秋·禅城区校级期中) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} (\frac{1}{2})^x(x \geq 1) \\ f(x+1)(x < 1) \end{cases}$, 则下列正确的是()

A. $f[f(0)]=\frac{1}{2}$

B. $f[f(1)]=\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $f\left[\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $f(x)$ 的值域为 $(0, \frac{1}{2}]$

12. (2020 秋·蚌埠期末) 已知函数 $f(x) = [x]$, 下列说法正确的是 ()

A. $x-1 < f(x) \cdot x$

B. $f(x)$ 为增函数

C. $f(x)$ 为奇函数

D. $y = x - f(x)$ 的值域为 $[0, 1)$

三. 填空题 (共 4 小题, 满分 20 分, 每小题 5 分)

13. (2019 秋·金山区校级月考) 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 的两个实数根, 那么 $x_1^2 + x_2^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $y = a^{x-1}$ 的图象一定经过 点, 函数 $y = \log_a(x+1)$ 的图象一定经过 点.

15. (2020 秋·杨浦区期末) $f(x)$ 是偶函数, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 .

16. (2021 秋·郑州期中) 若 $(2m+1)^{\frac{1}{4}} > (m^2+m-1)^{\frac{1}{4}}$, 则实数 m 的取值范围是 .

四. 解答题 (共 6 小题, 满分 70 分)

17. (2021 秋·岳阳期中) 已知函数 $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ($a > 0, a \neq 1$), 且 $f(2) = \frac{3}{5}$.

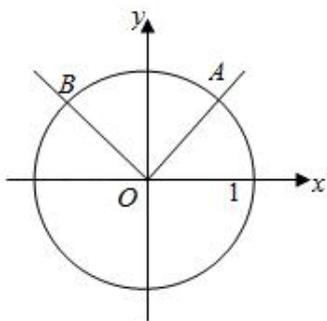
(1) 求 $f(x)$ 解析式;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并说明理由.

18. (2017 春·宁远县校级期中) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 是以 Ox 轴为始边, OA 为终边的角, 把 OA 绕点 O 逆时针旋转 β ($0 < \beta < \pi$) 角到 OB 位置, 已知 A, B 是单位圆上分别位于第一、二象限内的点, 它们的横坐标分别为 $\frac{3}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求 $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ 的值;

(2) 求 $\cos \beta$ 的值.



19. (2021·金安区校级开学)某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时,列表并填入了部分数据,

如表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$	
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	2	0	-2	0

(1) 请将上表数据补充完整,并求出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,得到 $y = g(x)$ 图象,求 $y = g(x)$ 的图象离原点 O 最近的对称中心.

20. (2017秋·宜春期末)设函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 解不等式 $f(2a+6) \cdot f(5a)$;

(2) 已知对任意的实数 m , $f(m^2 + m + 1) \geq f(\frac{3}{4})$ 恒成立,是否存在实数 k ,使得对任意的 $x \in [-1, 0]$, 不等式 $f(4^x + 2^{x+1}) - f(k - 2 \cdot 4^x) > 0$ 恒成立,若存在,求出 k 的范围,若不存在,说明理由.

21. (2021秋·沙坪坝区校级期中)已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: $2f(x) - f(-x) = x^2 + 2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ ($a \in R$) 在区间 $[-1, 2]$ 上最小值为 1, 求实数 a 的值.

22. (2021秋·瑞安市校级月考)已知函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 有如下性质:如果常数 $a > 0$, 那么该函数在 $(0, \sqrt{a}]$ 上是减函数,在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数.

(1) 若函数 $h(x) = x + \frac{4}{x}, x \in [1, 3]$, 求 $h(x)$ 的最值;

(2) 已知 $f(x) = \frac{4x^2 - 12x - 3}{2x + 1}, x \in [0, 1]$, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(3) 对于(2)中的函数 $f(x)$ 和函数 $g(x) = kx - 2$, 若对任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $g(x_2) = f(x_1)$ 成立, 求实数 k 的值.

3. (2021 秋·黑龙江期中) 命题“ $\forall x > 2$, 都有 $x^2 - 3 > 0$ ”的否定是()

- A. $\exists x > 2$, 使得 $x^2 - 3 > 0$ B. $\forall x > 2$, 都有 $x^2 - 3 = 0$
C. $\exists x > 2$, 使得 $x^2 - 3 = 0$ D. $\forall x > 2$, 都有 $x^2 - 3 > 0$

【考点】2J: 命题的否定

【专题】36: 整体思想; 49: 综合法; 5L: 简易逻辑; 62: 逻辑推理

【分析】直接利用全称命题的否定是特称命题写出结果即可.

【解答】解: 命题“ $\forall x > 2$, $x^2 - 3 > 0$ ”是全称命题, 其否定是: $\exists x_0 > 2$, $x_0^2 - 3 = 0$.

故选: C.

【点评】本题考查命题的否定, 全称命题与特称命题的否定关系, 基本知识的考查.

4. 已知 $M = \sin 100^\circ - \cos 100^\circ$, $N = \sqrt{2}(\cos 46^\circ \cdot \cos 78^\circ + \cos 44^\circ \cdot \cos 12^\circ)$, $P = \frac{1 - \tan 10^\circ}{1 + \tan 10^\circ}$,

$Q = \frac{\tan 22^\circ + \tan 23^\circ}{1 - \tan 22^\circ \tan 23^\circ}$, 那么 M, N, P, Q 之间的大小顺序是()

- A. $M < N < P < Q$ B. $P < Q < M < N$ C. $N < M < Q < P$ D. $Q < P < N < M$

【考点】GF: 三角函数的恒等变换及化简求值

【专题】15: 综合题; 33: 函数思想; 49: 综合法; 56: 三角函数的求值

【分析】利用诱导公式、两角差(和)的正弦公式、两角和(差)的正切公式化简四个式子,

由三角函数的性质、以及特殊角的函数值, 判断出四个式子的大小关系.

【解答】解: $M = \sin 100^\circ - \cos 100^\circ = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 100^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 100^\circ)$
 $= \sqrt{2} \sin(100^\circ - 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 55^\circ > \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$,

$N = \sqrt{2}(\cos 46^\circ \cdot \cos 78^\circ + \cos 44^\circ \cdot \cos 12^\circ) = \sqrt{2}(\sin 12^\circ \cdot \cos 46^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 46^\circ)$
 $= \sqrt{2} \sin 58^\circ > \sqrt{2} \sin 55^\circ = M$,

$P = \frac{1 - \tan 10^\circ}{1 + \tan 10^\circ} = \frac{\tan 45^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 10^\circ} = \tan 35^\circ < 1$,

$Q = \frac{\tan 22^\circ + \tan 23^\circ}{1 - \tan 22^\circ \tan 23^\circ} = \tan 45^\circ = 1$,

则 $N > M > Q > P$,

故选: B.

【点评】本题考查诱导公式、两角差(和)的正弦公式、两角和(差)的正切公式, 三角函

数的性质、以及特殊角的函数值, 熟练掌握公式是解题的关键.

5. (2021·湖北模拟) 自主研发大推力运载火箭是我国实现大国战略的重要工程. 2018年12月8日, 由长征三号乙型火箭发射的嫦娥四号探测器已完成探月任务. 这次发射所用火箭燃料质量约2356千克, 火箭(除燃料部分)质量约462000千克, 获得了 10.2 km/s 的最大速度. 2020年7月23日, 使用除燃料外总重约为880000千克的火箭发射了天问一号火星探测器. 据了解, 两次发射在不考虑空气阻力的条件下, 火箭发射的最大速度 $v(\text{ km/s})$ 和燃料质量 m (千克), 火箭(除燃料部分)质量 M (千克)的函数关系为 $v=2000\ln(t+\frac{m}{M})$, 其中 t 为待定常量. 为使发射天问一号的火箭至少获得 12 km/s 的最大速度, 则该火箭大约需加注()千克燃料. (参考数据及公式: $\frac{2356}{462000} \approx 0.00510$, $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \approx x$)

- A. 5280 B. 5380 C. 5480 D. 5580

【答案】A

【考点】根据实际问题选择函数类型

【专题】计算题; 应用题; 函数思想; 方程思想; 定义法; 函数的性质及应用; 数学建模; 数学运算

【分析】先求出 t , 然后再把 $M=880000$, $v=12$ 代入式子求出 m .

【解答】解: 依题意知 $v=2000\ln(t+\frac{m}{M})$,

当 $m=2356$, $M=462000$ 时, $v=10.2$,

所以 $10.2=2000\ln(t+\frac{2356}{462000})$, 所以 $\frac{10.2}{2000}=0.005=\ln(t+0.005) \approx t+0.005 \Rightarrow t \approx 1$

所以 $v=2000\ln(1+\frac{m}{M})$,

当 $M=880000$, $v=12$ 时, 所以 $12=2000\ln(1+\frac{m}{880000}) \approx 2000 \cdot \frac{m}{880000} \Rightarrow m \approx 5280$.

故选: A.

【点评】本题考查函数在实际生活中的应用, 考查了数学运算和数学建模的核心素养, 属于中档题.

6. (2021·怀柔区一模) 要得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象, 只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 B. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

【答案】B

【考点】函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换

【专题】三角函数的图象与性质

【分析】由条件根据函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，可得结论.

【解答】解：由于函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin 2(x + \frac{\pi}{6})$,

\therefore 将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象，

故选：B.

【点评】本题主要考查函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，属于基础题.

7. (2021·广陵区校级模拟) 已知 $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\cos(\pi + \alpha)$ ，且 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ ，则 $\tan \beta$ 的值为()

- A. -7 B. 7 C. 1 D. -1

【答案】B

【考点】两角和与差的三角函数

【专题】转化思想；综合法；三角函数的求值；数学运算

【分析】由题意利用诱导公式求得 $\tan \alpha$ 的值，再利用两角和的正切公式，求得 $\tan \beta$ 的值.

【解答】解： \because 已知 $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\cos(\pi + \alpha)$ ，即 $\sin \alpha = -2\cos \alpha$ ，即 $\tan \alpha = -2$.

又 $\because \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{-2 + \tan \beta}{1 + 2 \tan \beta} = \frac{1}{3}$ ，则 $\tan \beta = 7$ ，

故选：B.

【点评】本题主要考查诱导公式、两角和的正切公式的应用，属于基础题.

8. (2015·安庆三模) 若定义域为 D 的函数 $f(x)$ 满足：

① $f(x)$ 在 D 内是单调函数；

② 存在 $[a, b] \subseteq D$ ，使得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$ ，则称函数 $f(x)$ 为“半值函数”.

已知函数 $h(x) = \log_c(c^x + t)$ ($c > 0$, $c \neq 1$) 是“半值函数”则实数 t 的取值范围为()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{1}{4})$ C. $(\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{4})$

【答案】D

【考点】函数单调性的性质与判断；对数函数的图象与性质

【专题】函数的性质及应用

【分析】根据指数函数和对数函数的图象和性质以及复合函数的单调性可知 $h(x)$ 都是 R 上

的增函数，再根据“半值函数”的定义得到 $\log_c(c^x + t) = \frac{x}{2}$ ，构造关于 m 的方程，根据根与系数的关系，即可得到结论.

【解答】解：∵ $h(x) = \log_c(c^x + t)$ ($c > 0, c \neq 1$)， $c > 1$ 或 $0 < c < 1$ ， $h(x)$ 都是 R 上的增函数，

$$\therefore \begin{cases} h(a) = \frac{a}{2} \\ h(b) = \frac{b}{2} \end{cases}, \text{ 即 } \log_c(c^x + t) = \frac{x}{2}, \text{ 即 } c^x + t = c^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{令 } c^{\frac{x}{2}} = m (m > 0)$$

∴ $t = m - m^2$ 有两不等正根，

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = t > 0 \\ \Delta = 1 - 4t > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 0 < t < \frac{1}{4}.$$

故选：D.

【点评】本题考查了新定义，以及对数函数指数函数的图象和性质，复合函数的单调性，方程根的问题，属于中档题.

9. (2020 秋·静安区校级期末) 已知不等式 $ax^2 + 2y^2 \geq xy$ ，若对于任意 $x \in [1, 2]$ ， $y \in [2, 3]$ ，该不等式恒成立，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \geq -3$ B. $a \geq -1$ C. $a \geq \frac{1}{8}$ D. $-1 \leq a \leq \frac{1}{8}$

【答案】B

【考点】函数恒成立问题

【专题】计算题；数形结合；转化思想；数形结合法；转化法；函数的性质及应用；不等式；数学运算

【分析】由已知不等式分离参数 a ，得到 $a \geq 2(\frac{y}{x} - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8}$ ，在坐标平面内画出不等式组

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \text{ 表示的平面区域，求出 } \frac{y}{x} \text{ 的取值范围，则答案可求.}$$

【解答】解：依题意得，当 $x \in (1, 2)$ 时，且 $y \in [2, 3]$ 时，不等式 $ax^2 + 2y^2 \geq xy$ ，

$$\text{即 } a \geq \frac{xy - 2y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -2\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}.$$

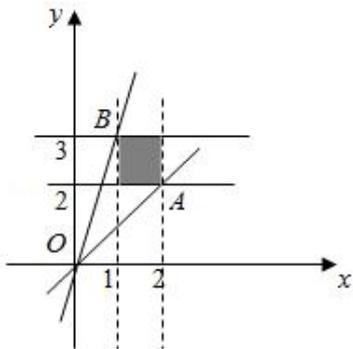
在坐标平面内画出不等式组 $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$ 表示的平面区域，

注意到 $\frac{y}{x}$ 可视为该区域内的点 (x, y) 与原点连线的斜率，结合图形可知， $\frac{y}{x}$ 的取值范围是 $(1, 3)$ ，

此时 $-2(\frac{y}{x} - \frac{1}{4})2 + \frac{1}{8} < -1$ ，

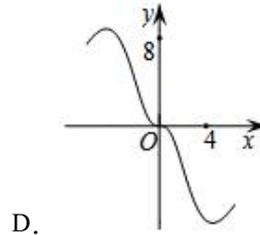
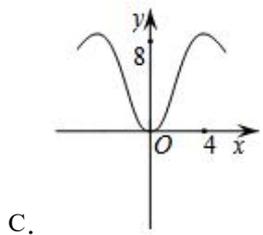
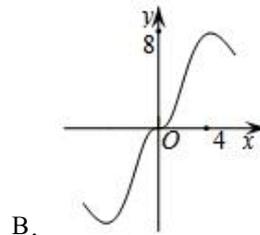
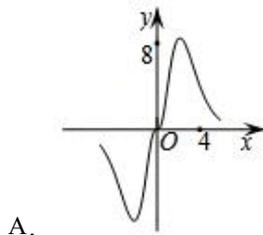
因此满足题意的实数 a 的取值范围是 $a \in (-1, 1)$ 。

故选：B。



【点评】本题考查函数恒成立问题，简单的线性规划，考查数学转化思想方法和数形结合的解题思想方法，属于中档题。

10. (2021·郑州一模) 函数 $y = \frac{2^{x+1} \cdot x^3}{4^x + 1}$ 的图象大致为 ()



【答案】B

【考点】函数的图象与图象的变换

【专题】计算题；函数思想；数形结合法；函数的性质及应用；数学运算

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/276045111105010053>