工程力学
Engineering Mechanics

全国高等教育自学考试指导委员会

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

工程力学
Engineering Mechanics

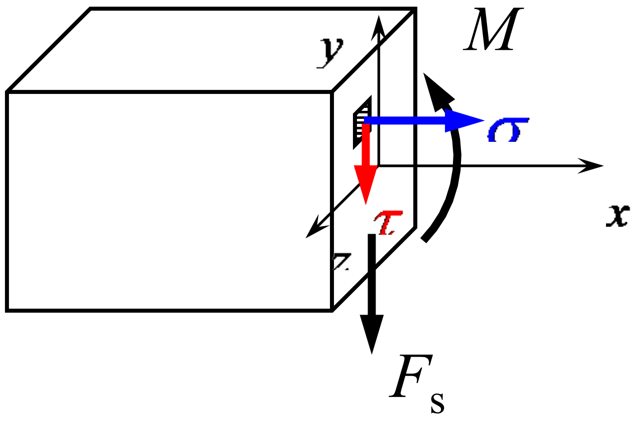
第15章 梁的弯曲应力

15.1 梁的横截面上正应力-1

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

15.1 梁的横截面上正应力

梁的内力：



剪力 F_s $\longleftarrow \int_A \tau \, dA$

弯矩 M $\longleftarrow \int_A y \cdot \sigma \, dA$

正应力只与弯矩有关，切应力只与剪力有关，

可分别进行研究。

一般情况下，$F_s \neq 0, M \neq 0$ ，称为横力弯曲。

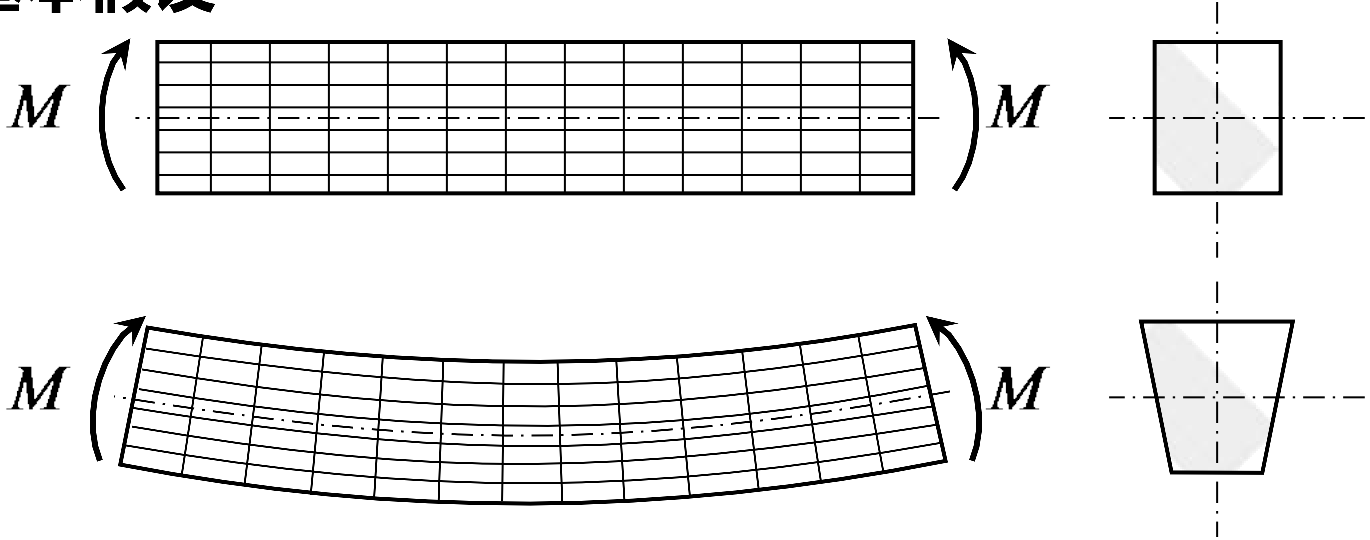
特殊情况下，在梁的某段或整个长度上，$F_s = 0, M = \text{const.}$，称为**纯弯曲**。

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.1 弯曲变形的基本假设

变形前

变形后



纯弯曲

变形现象：

(1) 垂直于梁轴线的横线仍为直线，横线之间有相对转动，仍与变形后的轴线正交。

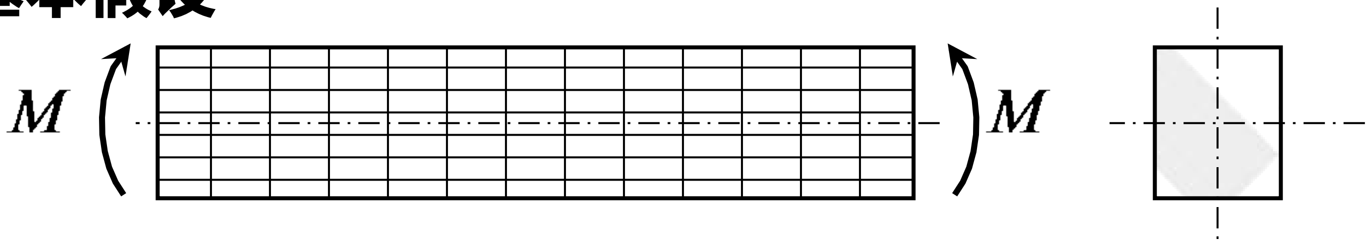
(2) 纵向线变形后变为弧线，且凹面的纵线长度缩短，凸面的纵线长度伸长。

(3) 在纵线伸长区，梁横截面的宽度减小；在纵线缩短区，梁横截面的宽度增大。

15.1 梁的横截面上正应力

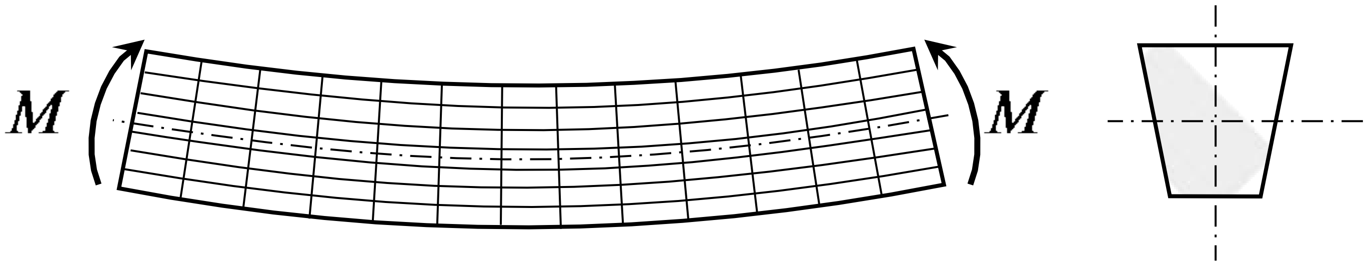
15.1.1 弯曲变形的基本假设

变形前



纯弯曲

变形后



基本假设:

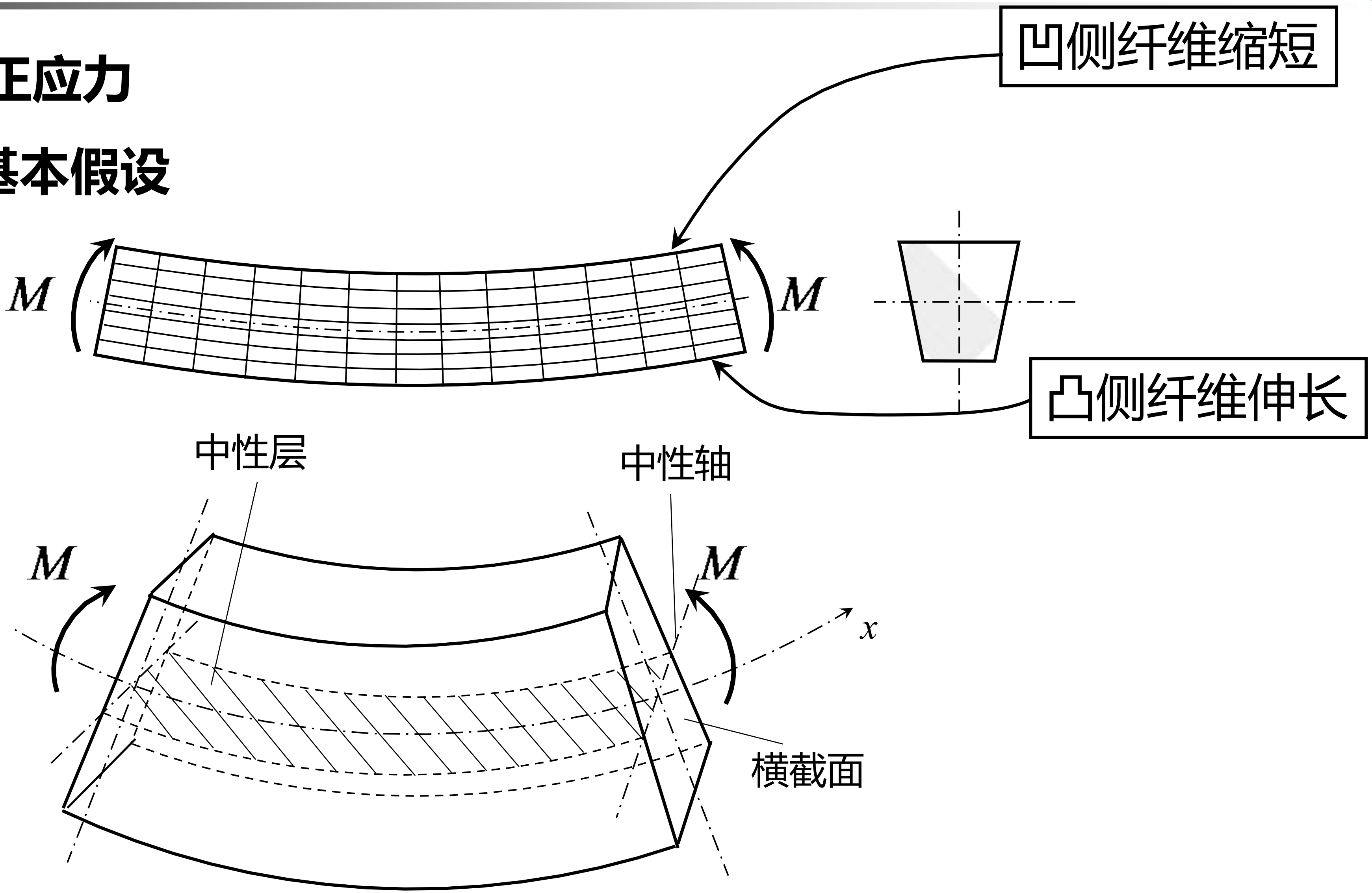
(1) 变形后梁的横截面仍保持平面且与梁轴线正交。 **平面假设**

(2) 梁中与轴线平行的各纵向纤维之间无相互挤压。梁的纵向纤维只发生缩短或伸长变形。 **单向受力假设**

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.1 弯曲变形的基本假设

变形后



变形时，横截面即绕中性轴发生转动

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力

研究梁横截面上的正应力，需要研究：

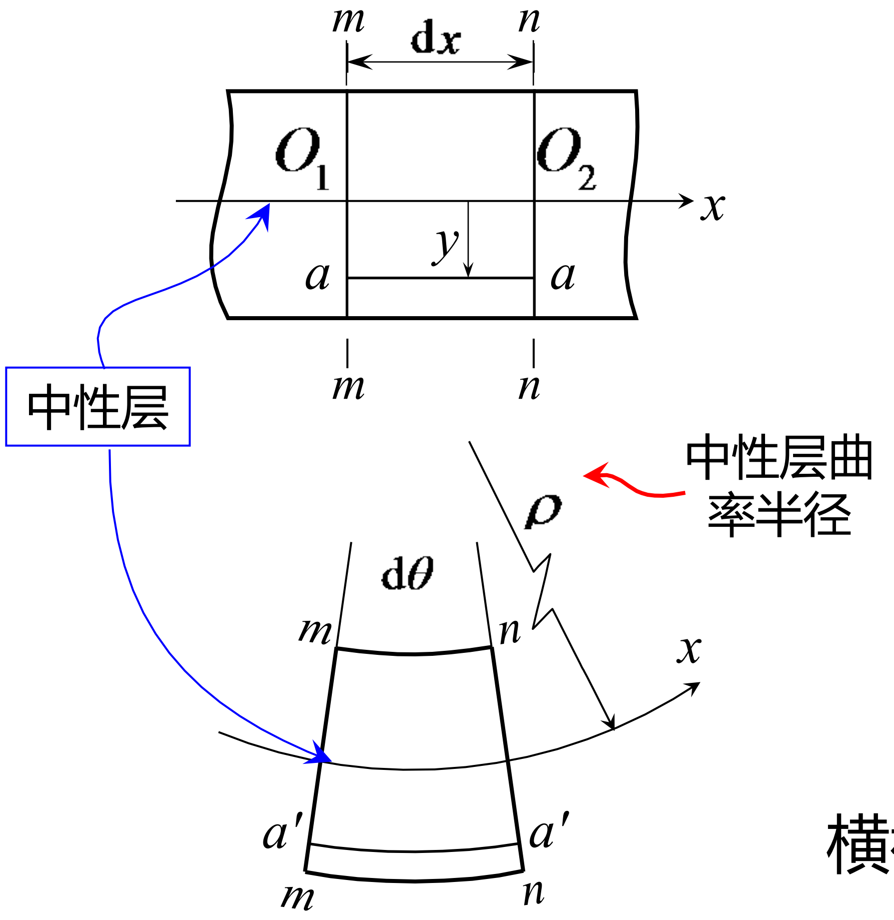
(1) 变形几何关系

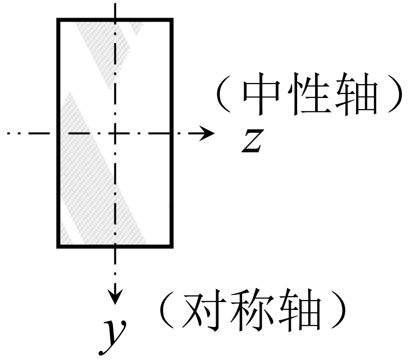
(2) 应变与应力间的物理关系

(3) 力系等效关系

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力 — 变形几何关系





$$dx = \rho d\theta$$

纤维 aa 的线应变

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - dx}{dx}$$

$$= \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

$$= \frac{y}{\rho}$$

横截面上任一点处的线应变与该点到中性轴的距离成正比

15.1 梁的横截面上正应力

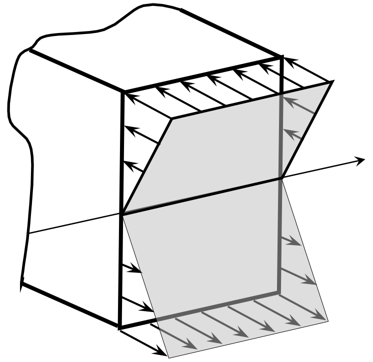
15.1.2 梁横截面上的正应力 — 物理关系

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

由单向受力假设，和胡克定律有

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$

横截面上任一点处的正应力与该点到中性轴的距离成正比。



15.1 梁的横截面上正应力

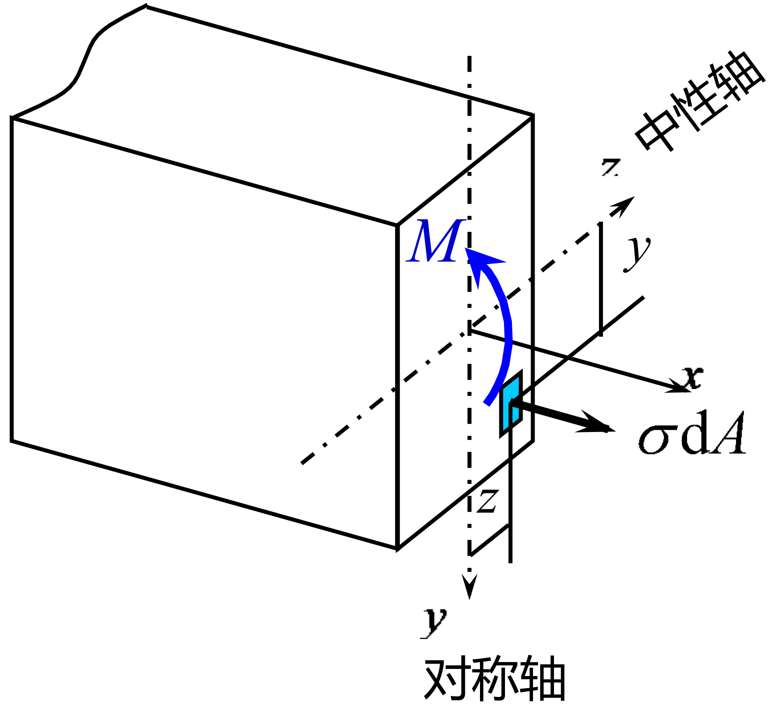
15.1.2 梁横截面上的正应力 — 力系等效关系

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$F_{\mathrm{N}} = \int_A \sigma\,\mathrm{d}A = 0$$

$$M_y = \int_A z\sigma\,\mathrm{d}A = 0$$

$$M_z = -\int_A y\sigma\,\mathrm{d}A = -M$$



15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力 — 力系等效关系

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho}$$

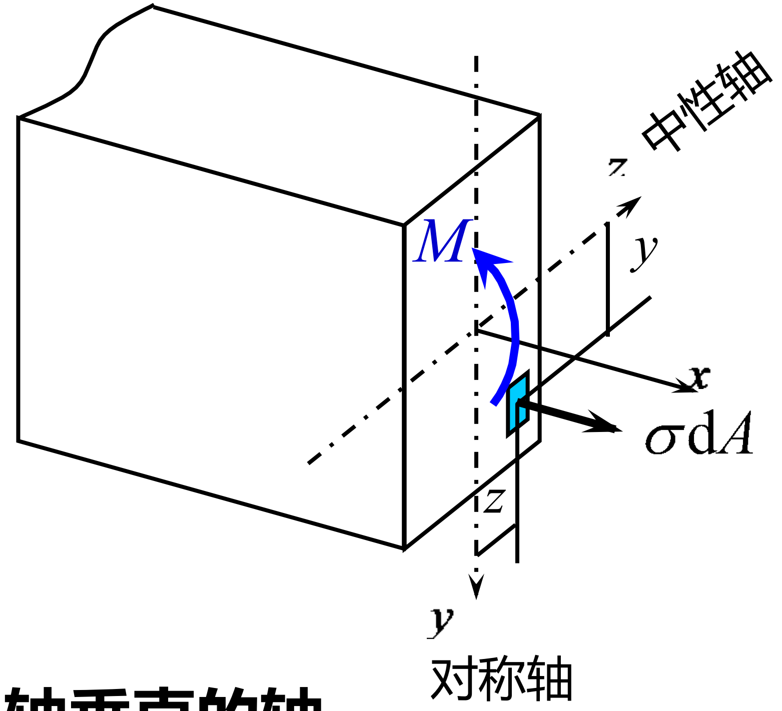
$$F_{\mathrm{N}} = \int_A \sigma \, \mathrm{d}A = 0$$

$$= \int_A E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A$$

$$= \frac{E}{\rho}\underline{\int_A y\,\mathrm{d}A \quad \text{静矩}}$$

$$= \frac{E}{\rho}S_z$$

$$\Rightarrow S_z = 0 \quad \Rightarrow \quad z\text{ 轴过截面的形心}$$



中性轴通过截面形心，且与截面对称轴 y 轴垂直的轴。

中性轴的位置确定

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力 — 力系等效关系

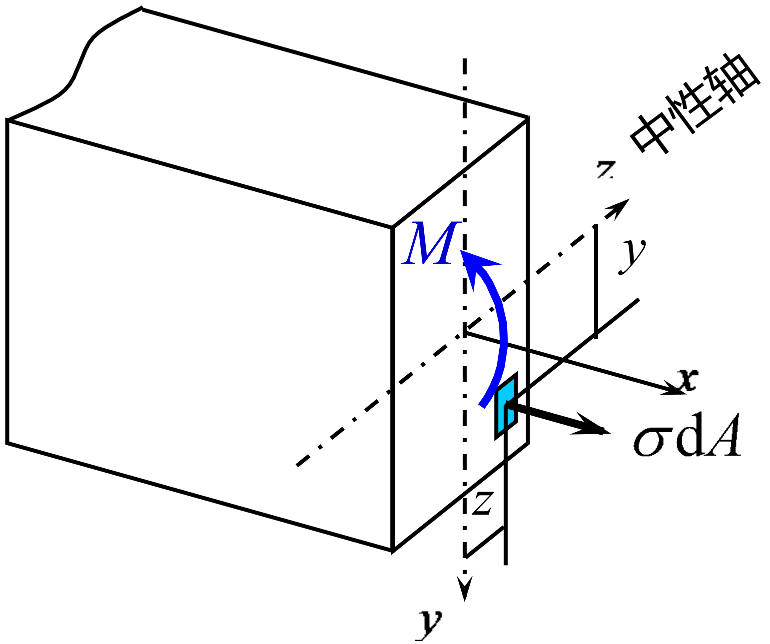
$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$M_y = \int_A z\sigma \, \mathrm{d}A = 0$$

$$= \int_A zE\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A$$

$$= \frac{E}{\rho}\int_A zy\mathrm{d}A \quad \text{惯性积}$$

$$= \frac{E}{\rho} I_{yz}$$



$\Rightarrow I_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \ y$、$z$ 为一对惯性主轴

y 轴是横截面的对称轴，这个条件自然满足

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力 — 力系等效关系

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho}$$

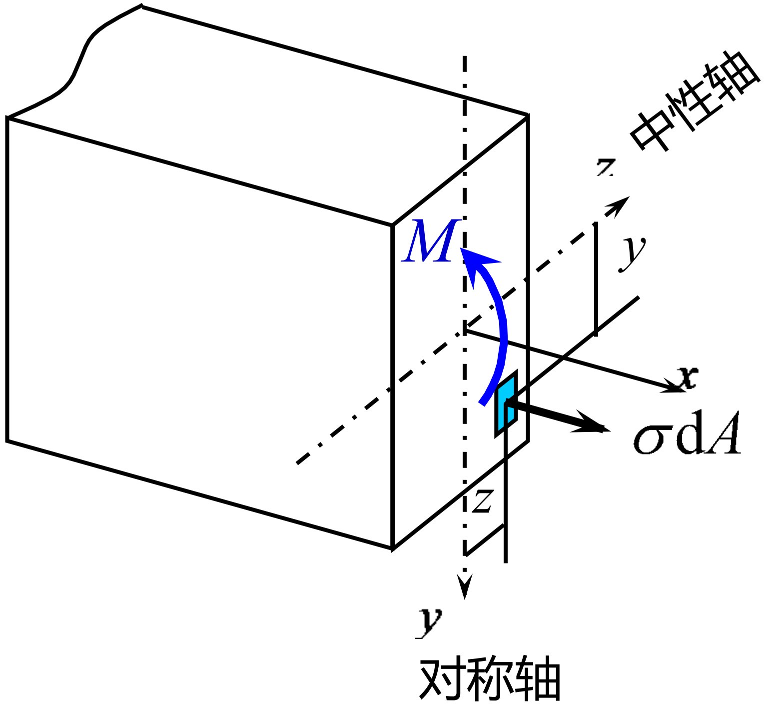
$$M_z = -\int_A y\sigma \, \mathrm{d}A = -M$$

$$= -\int_A yE\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A$$

$$= -\frac{E}{\rho}\underline{\int_A y^2 \, \mathrm{d}A \ \text{惯性矩}}$$

$$= -\frac{E}{\rho}I_z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$



中性层的曲率 $1/\rho$ 与横截面上的弯矩成正比，而与梁截面 EI_z （**弯曲刚度**）成反比。

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

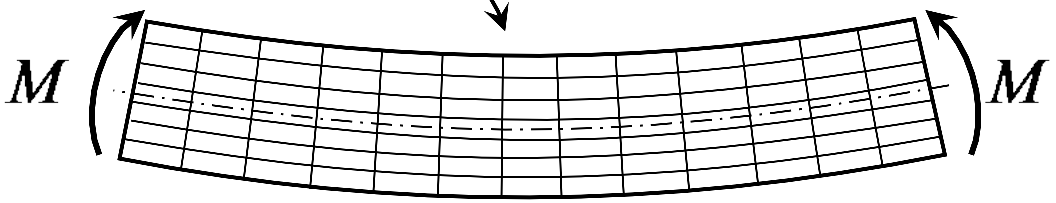
$$\Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$ **梁横截面上任意点的正应力公式**

绝对值代入计算

拉或压由变形判断：

凹的一侧受压

凸的一侧受拉



15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$ **梁横截面上任意点的正应力公式**

适用条件：

1. 平面假设

若有剪力作用 → 存在切应变 → 变形后横截面不再保持为平面，理论上，横力弯曲情况不合用。

但理论分析与实验研究表明，对工程中常见的横力弯曲梁，上式完全能够满足精度要求。

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$ **梁横截面上任意点的正应力公式**

适用条件：

2. 平面弯曲

推导用的是矩形截面梁，但非必要条件。

上式对于平面弯曲都成立 （全部外力均作用在梁的同一纵向对称面内）

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$ **梁横截面上任意点的正应力公式**

适用条件：

3. 胡克定律

应力不超过材料的比例极限。

- 这节课就讲到这里。
- 同学们根据这次课学习到的内容和阅读教材，完成教材上的习题。

工程力学
Engineering Mechanics

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

工程力学
Engineering Mechanics

第15章 梁的弯曲应力

15.1 梁的横截面上正应力-2
15.2 梁的横截面上的切应力
15.3 梁的弯曲强度计算

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

15.1 梁的横截面上正应力

15.1.2 梁横截面上的正应力

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$ **梁横截面上任意点的正应力公式**

截面上距中性轴最远处 $y = y_{\max}$ ，正应力达到最大值 $\sigma_{\max} = \dfrac{My_{\max}}{I_z}$

令 $W_z = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$ $\quad \Rightarrow \sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{W_z}$

$$W_z \uparrow \Rightarrow \sigma_{\max} \downarrow$$

$$W_z \downarrow \Rightarrow \sigma_{\max} \uparrow$$

称为**弯曲截面系数**

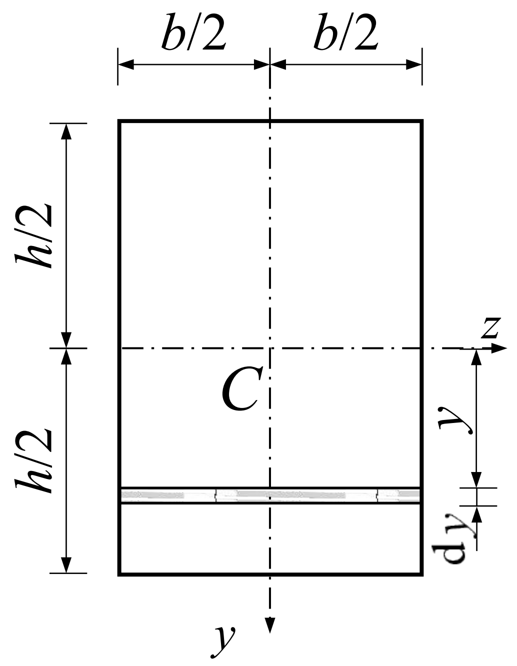
截面的几何性质　单位：mm^3 或者 m^3

梁的弯曲应力

矩形截面

对 z 轴的惯性矩为：

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b \mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}$$



弯曲截面系数为：

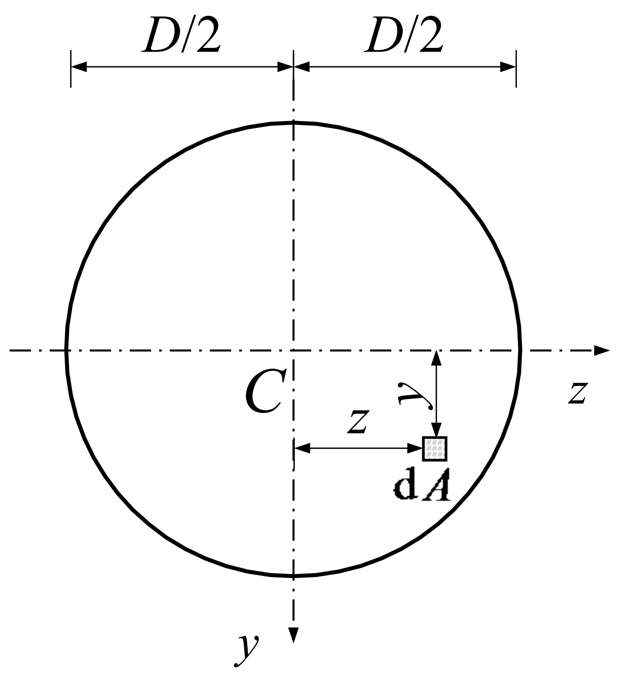
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

梁的弯曲应力

圆形截面

$$I_{\mathrm{p}} = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A (y^2 + z^2)\mathrm{d}A$$

$$= \int_A y^2 \mathrm{d}A + \int_A z^2 \mathrm{d}A = I_z + I_y = \frac{\pi D^4}{32}$$



对直径的惯性矩为：

$$I_z = I_y = \frac{1}{2} I_{\mathrm{p}} = \frac{\pi D^4}{64}$$

弯曲截面系数为： $$W_z = \frac{I_z}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}$$