期末专题01 导数及其应用小题综合（精选40题）

一、单选题

1.（22-23高二下·江西·期末）已知函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处可导，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-4\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=1$，则 $f'\left(x_0\right)=$（　）

A．1　　B．-4　　C．$-\dfrac{1}{4}$　　D．-1

【答案】C

【分析】根据导数的定义进行求解即可.

【详解】由已知得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-4\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=-4\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-4\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{-4\Delta x}=-4f'(x_0)=1$，

所以 $f'\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{4}$.

故选：C

2.（22-23高二下·安徽合肥·期末）曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为（　）

A．$y=\dfrac{1}{2}x$　　B．$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$　　C．$y=\dfrac{3}{4}x$　　D．$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$

【答案】B

【分析】利用导数的计算及几何意义，求解切线的斜率，然后求出切线方程即可.

【详解】求导得 $y'=\dfrac{\dfrac{x^2+1}{x}-2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}-2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}$，则 $y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，

所以曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

故选：B.

3.（22-23高二下·辽宁·期末）已知过点 $A\left(0,b\right)$ 作的曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的切线有且仅有两条，则 b 的取值范围为（　）

A．$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　B．$\left(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$　　C．$\left(0,\mathrm{e}\right)$　　D．$\left(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}\right)$

【答案】D

【分析】先根据导数求出切线斜率，再构造函数把有两条切线转化为函数有两个交点解决问题即可.

【详解】设切点为 $\left(x_0,y_0\right)$，由题意得 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $k=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}=\dfrac{y_0-b}{x_0}=\dfrac{\dfrac{\ln x_0}{x_0}-b}{x_0}$，

整理得$b=\dfrac{2\ln x_0-1}{x_0}$，此方程有两个不等的实根.

令函数$f\left(x\right)=\dfrac{2\ln x-1}{x}$，则$f'\left(x\right)=\dfrac{3-2\ln x}{x^2}$.

当$0<x<e^{\frac{3}{2}}$时，$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$上单调递增;

当$x>e^{\frac{3}{2}}$时，$f'\left(x\right)<0$，所以$f\left(x\right)$在$\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$上单调递减,且$f\left(x\right)>0$.

$f(x)_{极大值}=f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$，方程有两个不等的实根,故$b\in\left(0,\dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

故选：D.

4.（22-23高二下·湖南湘潭·期末）已知函数$f\left(x\right)=ax^2+\dfrac{2}{x}$在$\left(1,+\infty\right)$上不单调，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(0,1\right)$　　C．$\left(1,+\infty\right)$　　D．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

【答案】B

【分析】

先求得$f'\left(x\right)$，根据$f\left(x\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上不单调列不等式，由此求得a的取值范围.

【详解】$f'\left(x\right)=2ax-\dfrac{2}{x^2}=2\cdot\dfrac{ax^3-1}{x^2}$，

当$a=0$时，$f'\left(x\right)=-\dfrac{2}{x^2}<0,f\left(x\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上单调递减，不符合题意.

当$a<0$，$x>1$时，$f'\left(x\right)=2\cdot\dfrac{ax^3-1}{x^2}<0$，

$f\left(x\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上单调递减，不符合题意.

当$a>0,x>1$时，令$f'\left(x\right)=2\cdot\dfrac{ax^3-1}{x^2}=0$，解得$x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$，

要使$f\left(x\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上不单调，则$x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}>1$，

即$\dfrac{1}{a}>1$，解得$0<a<1$，

此时$f\left(x\right)$在区间$\left(1,\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}\right)$上$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$递减;

在区间$\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}},+\infty\right)$上$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$递增.

故选：B

5.（22-23 高二下·辽宁阜新·期末）若函数 $f\left(x\right)=x^3-12x$ 在区间 $\left(k-1,k+1\right)$ 上单调，则实数 k 的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,-3\right]\cup\left[-1,1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$　　B．$\left(-3,-1\right)\cup\left(1,3\right)$

C．$\left(-2,2\right)$　　D．不存在这样的实数 k

【答案】A

【分析】利用导数求出函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间，可得出区间的包含关系，即可得出 k 的取值范围.

【详解】因为 $f\left(x\right)=x^3-12x$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'\left(x\right)=3x^2-12$，

由 $f'\left(x\right)<0$ 可得 $-2<x<2$，由 $f'\left(x\right)>0$ 可得 $x<-2$ 或 $x>2$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left(-\infty,-2\right)$、$\left(2,+\infty\right)$，减区间为 $\left(-2,2\right)$，

因为函数 $f\left(x\right)=x^3-12x$ 在区间 $\left(k-1,k+1\right)$ 上单调，

则 $\left(k-1,k+1\right)\subseteq\left(-\infty,-2\right)$ 或 $\left(k-1,k+1\right)\subseteq\left(-2,2\right)$ 或 $\left(k-1,k+1\right)\subseteq\left(2,+\infty\right)$，

若 $\left(k-1,k+1\right)\subseteq\left(-\infty,-2\right)$，则 $k+1\leq-2$，解得 $k\leq-3$；

若 $\left(k-1,k+1\right)\subseteq\left(-2,2\right)$，则 $\begin{cases}k-1\geq-2\\k+1\leq2\end{cases}$，解得 $-1\leq k\leq1$；

若 $\left(k-1,k+1\right)\subseteq\left(2,+\infty\right)$，则 $k-1\geq2$，解得 $k\geq3$.

综上所述，实数 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-3\right]\cup\left[-1,1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$.

故选：A.

6.（22-23 高二下·广东韶关·期末）已知函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$，若 $f(x)$ 有两个零点，则 a 的取值范围是（　）

A．$(0,1)$　　B．$(\frac{1}{e},1)$　　C．$(1,e)$　　D．$(\frac{1}{e},e)$

【答案】A

【分析】根据已知条件，分类讨论求导函数判断函数单调性及极值点，结合零点存在定理可得参数范围.

【详解】已知函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

$f'(x)=2ax+a-2-\frac{1}{x}=\frac{(ax-1)(2x+1)}{x}$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 至多有一个零点；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{a}$，当 $x\in(0,\frac{1}{a})$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增.

此时最小值为 $f(\frac{1}{a})=1-\frac{1}{a}+\ln a$，

①当 $a=1$ 时，由于 $f(\frac{1}{a})=0$，故 $f(x)$ 只有一个零点；

②当 $a>1$ 时，$1-\frac{1}{a}+\ln a>0$ 即 $f(\frac{1}{a})>0$，故 $f(x)$ 没有零点；

③当 $0<a<1$ 时，$1-\frac{1}{a}+\ln a<0$ 即 $f(\frac{1}{a})<0$，又

$f(\frac{1}{e})=a(\frac{1}{e})^2+(a-2)(\frac{1}{e})-\ln\frac{1}{e}=\frac{a}{e^2}+\frac{a}{e}+1-\frac{2}{e}>0$；

$f(\frac{3}{a})=a(\frac{3}{a})^2+(a-2)(\frac{3}{a})-\ln\frac{3}{a}=3+\frac{3}{a}-\ln\frac{3}{a}>4>0$，

由零点存在定理知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上有一个零点；在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 有一个零点.

所以 $f(x)$ 有两个零点，a 的取值范围为 $(0,1)$；

故选:A．

7．（22-23 高二下·福建福州·期末）函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1,x\ge a\\-x^3+3x^2+9x+5,x<a\end{cases}$，其中 $a\le -2$，则满足 $f(x)+f(x-1)<3$ 的 x 取值范围是（　）

A．$(-1,+\infty)$　　　　B．$\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$

C．$(-\sqrt{3},+\infty)$　　　　D．$(0,+\infty)$

【答案】D

【分析】利用导数分析可知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，令 $p(x)=f(x)+f(x-1)$，可知 $p(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，由 $f(x)+f(x-1)<3$ 可得出 $p(x)<p(0)$，即可得出原不等式的解集.

【详解】因为 $a\le -2$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$，

则 $f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)<0$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，故 $f(x)>-a^3+3a^2+9a+5$，

当 $x \geq a$ 时，$f(x)=-x+1$，显然函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上为减函数，

此时，$f(x) \leq f(a)=-a+1$.

因为 $\left(-a^3+3a^2+9a+5\right)-\left(-a+1\right)=-a^3+3a^2+10a+4$,

令 $h(a)=-a^3+3a^2+10a+4$，其中 $a \leq -2$，

则 $h'(a)=-3a^2+6a+10=-3(a-1)^2+13 \leq -3\times(-3)^2+13<0$，

所以，函数 $h(a)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递减，故 $h(a) \geq h(-2)=8+12-20+4=4>0$，

综上可知，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，

令 $p(x)=f(x)+f(x-1)$，则函数 $p(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

又因为 $p(0)=f(0)+f(-1)=1+2=3$，

所以，$f(x)+f(x-1)<5$ 等价于 $p(x)<p(0)$，

结合函数 $p(x)$ 的单调性可得 $x>0$，故原不等式的解集为 $(0,+\infty)$.

故选：D.

8.（22-23 高二下·江西九江·期末）已知函数 $f(x)=\ln x-2kx-1$，当 $2 \leq x_1<x_2 \leq 8$ 时，恒有 $(x_1-x_2)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]<0$，则实数 k 的取值范围为（　）

A．$\left[\frac{1}{16},+\infty\right)$　　B．$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$　　C．$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D．$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

【答案】B

【分析】由题意可得 $f(x)$ 在区间 $[2,8]$ 上单调递减，进而得到 $f'(x) \leq 0$ 在区间 $[2,8]$ 上恒成立，转化为 $2k \geq \frac{1}{x}$ 在区间 $[2,8]$ 上恒成立，只需 $2k \geq \left(\frac{1}{x}\right)_{\max}$，进而求解即可.

【详解】当 $2 \leq x_1<x_2 \leq 8$ 时，恒有 $(x_1-x_2)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]<0$，

可得 $f(x)$ 在区间 $[2,8]$ 上单调递减，

则 $f'(x) \leq 0$ 在区间 $[2,8]$ 上恒成立.

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-2k$，所以 $2k \geq \frac{1}{x}$ 在区间 $[2,8]$ 上恒成立，

而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[2,8]$ 上单调递减，

所以当 $x=2$ 时，$\left(\dfrac{1}{x}\right)_{\max}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $2k\geq\dfrac{1}{2}$，即 $k\geq\dfrac{1}{4}$，

所以 k 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

故选：B.

9.（23-24 高二上·江苏南京·期末）已知函数 $f\left(x\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，若 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f'\left(x\right)<1$，且 $f\left(2\right)=4$，则不等式 $f\left(x^2\right)<x^2+2$ 的解集为（　　）

A．$\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　　B．$\left(2,+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

【答案】C

【分析】构造函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x-2$，通过题意判断出 $g\left(x\right)$ 在 R 上单调递减，将所求转化为 $g\left(x^2\right)<g(2)$ 即可求解.

【详解】设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x-2$，则 $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-1$，因为 $f'\left(x\right)<1$，所以 $g'\left(x\right)<0$，所以 $g\left(x\right)$ 在 R 上单调递减.

因为 $f\left(2\right)=4$，所以 $g\left(2\right)=0$，又不等式 $f\left(x^2\right)<x^2+2$ 可转换为 $f\left(x^2\right)-x^2-2<0$，即 $g\left(x^2\right)<g(2)$，所以 $x^2>2$，解得 $x\left\langle-\sqrt{2}\text{或}x\right\rangle\sqrt{2}$.

故选：C.

10.（22-23 高二下·黑龙江大庆·期末）对于函数 $y=f\left(x\right)$，若存在非零实数 x_0,使得 $f\left(x_0\right)=-f\left(-x_0\right)$，则称点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 与点 $\left(-x_0,f\left(-x_0\right)\right)$ 是函数的一对“隐对称点”．若 $m>0$ 时，函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x,x>0\\-mx^2-mx,x\leq0\end{cases}$ 的图象上恰有 2 对“隐对称点”，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　B．$\left(1,+\infty\right)$

C．$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　D．$\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【答案】D

【分析】由题意可得，函数 $f(x)=-mx^2-mx(x\leq0)$ 关于原点对称的图象 $g(x)=mx^2-mx$ 与函数

$f(x)=\ln x(x>0)$的图象有两个交点，再次转化为$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$与$y=m(x-1)$的图象有 2 个交点，然后画出图象，根据图象可求得答案.

【详解】由题意可得，函数$f(x)=-mx^2-mx(x\le 0)$关于原点对称的图象$g(x)=mx^2-mx$与函数

$f(x)=\ln x(x>0)$的图象有两个交点，

即方程$mx^2-mx=\ln x(x>0)$有两个根，即$m(x-1)=\dfrac{\ln x}{x}$，

令$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则$h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当$0<x<\mathrm{e}$时，$h'(x)>0$，当$x>\mathrm{e}$时，$h'(x)<0$，

所以$h(x)$在$(0,\mathrm{e})$上递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上递减，

$y=m(x-1)$的图象恒过点$(1,0)$，$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$的图象也过点$(1,0)$，

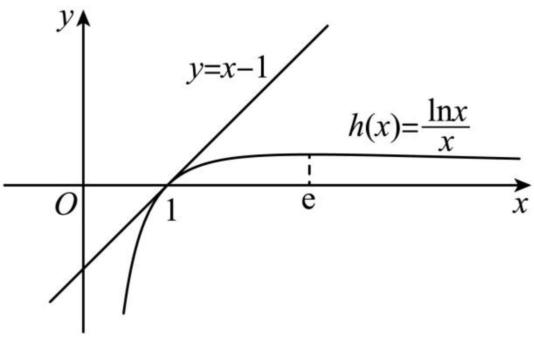
因为$h'(1)=1$，所以$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$在$x=1$处的切线方程为$y=x-1$，

由图可知当$0<m<1$或$m>1$时，$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$与$y=m(x-1)$的图象有 2 个交点，

即$mx^2-mx=\ln x(x>0)$有两个根，

所以实数m的取值范围为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，

故选：D



【点睛】关键点点睛：此题考查函数与方程的综合应用，考查导数的几何意义，考查函数的新定义，解题有关键是对新定义的正确理解，从而将问题转化为方程$m(x-1)=\dfrac{\ln x}{x}$有 2 个根，然后构造函数，利用函数图象求解，考查数学转化思想和数形结合的思想，属于较难题.

11.（22-23 高二下·黑龙江哈尔滨·期末）已知函数$f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2\right)-x$，若$a=f\left(\mathrm{e}^3\right)$，$b=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$c=f\left(\dfrac{4}{3}\right)$，则（　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

【答案】A

【分析】

首先对 $f(x)$ 求导，求出其单调区间，且注意到 $f(x)$ 的对称轴是直线 $x=1$，由此即可得解.

【详解】

由题意 $f(x)=\ln\left(e^{2x}+e^{2}\right)-x=\ln\left[e^{2}\left(e^{2x-2}+1\right)\right]-x=2+\ln\left(e^{2x-2}+1\right)-x$，

一方面有 $f'(x)=\dfrac{2e^{2x-2}}{e^{2x-2}+1}-1=\dfrac{e^{2x-2}-1}{e^{2x-2}+1}$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，所以有以下表格：

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)$	−	+
$f'(x)$	↘	↗

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且有极小值 $f(1)=1+\ln 2$；

另一方面注意到 $f(1+x)=2+\ln\left(e^{2(x+1)-2}+1\right)-(x+1)=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x+1$，

且有 $f(1-x)=2+\ln\left(e^{2(1-x)-2}+1\right)-(1-x)=\ln\left(e^{-2x}+1\right)+x+1$

$=\ln\left[e^{2x}\cdot\left(e^{-2x}+1\right)\right]-\ln e^{2x}+x+1=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x+1$

因此 $f(1+x)=f(1-x)$，这表明了 $f(x)$ 的对称轴是直线 $x=1$；

所以有 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，

又 $\dfrac{4}{3}<\dfrac{3}{2}<e^{3}$，且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)<f\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f\left(e^{3}\right)$，所以 $a>b>c$.

故选：A.

【点睛】

关键点点睛：单调区间是很容易求的，但是有个关键地方就是要把 $\dfrac{4}{3}$、$\dfrac{1}{2}$、e^{3} 这三个数转化在同一单调区间内，

而此处的关键是发现直线 $x=1$ 是 $f(x)$ 的对称轴.

12.（22-23 高二下·福建福州·期末）已知 $a=\cos\dfrac{1}{2}$，$b=2\sin\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{7}{8}$，则（　　）

A． $c>b>a$　　　　B． $c>a>b$

C． $b>a>c$　　　　D． $a>c>b$

【答案】C

【分析】分别构造函数 $f\left(x\right)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1,0<x<1$ 与 $h\left(x\right)=\tan x-x,0<x<1$，利用导数求单调性即可比较大小.

【详解】设 $f\left(x\right)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1,0<x<1$，

则 $f'\left(x\right)=-\sin x+x$.

令 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)=-\sin x+x,0<x<1$，

则 $g'\left(x\right)=1-\cos x>0$，

所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，所以 $g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$，即 $f¢\left(x\right)>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增,所以 $f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1>0$，即 $\cos\frac{1}{2}>\frac{7}{8}$， 即 $a>c$.

设 $h\left(x\right)=\tan x-x,0<x<1$，

所以 $h'\left(x\right)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}>0$，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增,所以 $h\left(x\right)>h\left(0\right)=0$，

所以 $h\left(\frac{1}{2}\right)>0$，即 $\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>0$，即 $2\sin\frac{1}{2}>\cos\frac{1}{2}$，即 $b>a$.

综上所述， $b>a>c$.

故选:C.

【点睛】构造函数比较大小是高考热点和难点，结合代数式的特点，选择适当的函数，通过导函数研究出函数的单调性，从而比较出代数式的大小.

13．（22-23 高二下·重庆江津·期末）设 $a=3\sqrt[3]{e}$， $b=\frac{2}{\ln 2}$， $c=\frac{e^2}{4-\ln 4}$， 则（　）

A． $c<a<b$　　　　B． $b<c<a$

C． $a<c<b$　　　　D． $c<b<a$

【答案】D

【分析】由 $a=\frac{\sqrt[3]{e}}{\ln\sqrt[3]{e}}$，$b=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{2\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}$，$c=\frac{e^2}{\ln\frac{e^4}{4}}=\frac{e^2}{\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)^2}=\frac{\frac{e^2}{2}}{\ln\frac{e^2}{2}}$，从而构造函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，利用导数判断函数的单调性，判断函数值的大小，即可判断选项.

【详解】$a=\frac{\sqrt[3]{e}}{\ln\sqrt[3]{e}}$，$b=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{2\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}$，$c=\frac{e^2}{\ln\frac{e^4}{4}}=\frac{e^2}{\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)^2}=\frac{\frac{e^2}{2}}{\ln\frac{e^2}{2}}$，

设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，$x>0$ 且 $x\neq 1$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0$，得 $x=e$，

当 $0<x<1$ 和 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减，当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，函数单调递增，

因为 $f(2)=f(4)$，且 $1<\sqrt[3]{e}<2<e<\frac{e^2}{2}<4$，

所以 $f(\sqrt[3]{e})>f(2)>f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，即 $c<b<a$.

故选：D

【点睛】思路点睛：构造函数是基本的解题思路，因此观察题目所给的数的结构特点，以及数与数之间的内在联系，合理构造函数，利用导数判断单调性是解题的关键.

14．（22-23 高二下·安徽滁州·期末）已知 $f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x$ 存在唯一极小值点，则 a 的范围是（　）

A．$a\geq\frac{1}{e}$　　B．$a>\frac{1}{e}$　　C．$a\leq e$　　D．$a\geq e$

【答案】A

【分析】求导得 $f'(x)=\frac{e^x}{x^2}(x-1)\left(a-\frac{x}{e^x}\right)$，分两种情况：当 $a\leq 0$ 时，当 $a>0$ 时，分析 $f'(x)$ 的符号，$f(x)$ 的单调性，极值，即可得出答案.

【详解】由 $f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x$，$x\in(0,+\infty)$，

$f'(x)=a\cdot\frac{xe^x-e^x}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{ae^x(x-1)}{x^2}-\frac{e^x x(x-1)}{x^2e^x}=\frac{e^x}{x^2}(x-1)\left(a-\frac{x}{e^x}\right)$，

当 $a\leq 0$ 时，$a-\frac{x}{e^x}<0$ 恒成立，

所以在 $x\in(0,1)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在 $x\in(1,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 没有极小值点，只有极大值点，不合题意，

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，

$g'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$，

所以在 $x\in(0,1)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

在 $x\in(1,+\infty)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$，$g(0)=0$，当 $x>0$ 时 $g(x)>0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，

①若 $0<a<\frac{1}{e}$，则存在 $m\in(0,1)$，$n\in(1,+\infty)$，使得 $g(m)=g(n)=a$，即 $f'(m)=f'(n)=0$，

所以在 $x\in(0,m)$ 上，$x-1<0$，$a-\frac{x}{e^x}>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $x\in(m,1)$ 上，$x-1<0$，$a-\frac{x}{e^x}>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $x\in(1,n)$ 上，$x-1>0$，$a-\frac{x}{e^x}<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $x\in(n,+\infty)$ 上，$x-1>0$，$a-\frac{x}{e^x}>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有两个极小值点，不合题意，

当 $a\geq\frac{1}{e}$ 时，$a\geq g(x)$，即 $a-\frac{x}{e^x}\geq 0$，

在 $x\in(0,1)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $x\in(1,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 有唯一极小值点 $x=1$，无极大值点，

综上所述，当 $a\geq\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有唯一极小值点.

故选：A

【点睛】方法点睛：导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题．注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理.

15．（22-23 高二下·辽宁葫芦岛·期末）已知 $f(x)$ 是可导函数，且 $f'(x)<f(x)$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则（　）

A．$f(1)<ef(0)$，$f(2023)>e^{2023}f(0)$　　B．$f(1)>ef(0)$，$f(2023)>e^{2023}f(0)$

C．$f(1)>ef(0)$，$f(2023)<e^{2023}f(0)$　　D．$f(1)<ef(0)$，$f(2023)<e^{2023}f(0)$

【答案】D

【分析】

构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，由导数确定其单调性，可判断各选项.

【详解】设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，由已知 $f'(x)<f(x)$ 得 $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 是 R 上的减函数，

$\therefore g(0)>g(1)>g(2023)$，即 $f(0)>\frac{f(1)}{e}>\frac{f(2023)}{e^{2023}}$，

即 $f(1)<ef(0)$，$f(2023)<e^{2023}f(0)$，

故选：D.

【点睛】方法点睛：需要利用导数比较函数值大小时，常常根据已知条件构造新函数（如 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$g(x)=e^x f(x)$，$g(x)=f(x)\ln x$，$g(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$，求导后得出 $g(x)$ 的单调性，然后由单调性比较出大小.

二、多选题

16.（22-23 高二下·山东青岛·期末）已知连续函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(x+2)$ 为奇函数，$f(x+1)$ 为偶函数，$f(1)=2$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f¢(x)>0$，则（　）

A．$f(x)$ 为偶函数　　　　B．$f(3)=-2$

C．$x=1$ 为 $f(x)$ 极大值点　　　　D．$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=-2$

【答案】BCD

【分析】根据题意得到函数 $f(x)$ 是以 4 项为周期的周期函数，且关于 $(2,0)$ 中心对称和 $x=1$ 对称，结合选项，逐项判定，即可求解.

【详解】由 $f(x+2)$ 为奇函数，可得函数 $f(x)$ 关于 $(2,0)$ 中心对称，即 $f(x)=-f(4-x)$，

又由 $f(x+1)$ 为偶函数，可得 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，即 $f(x)=f(2-x)$，所以 A 不正确；

因为 $f(x)=-f(4-x)$ 且 $f(1)=2$，令 $x=3$，可得 $f(3)=-f(1)=-2$，所以 B 正确；

由 $x\in(0,1)$ 时，$f¢(x)>0$，可得函数 $f(x)$ 单调递增，

因为 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，可得函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递减，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，所以 C 正确；

由函数 $f(x)$ 关于 $(2,0)$ 中心对称，可得 $f(2)=0$，所以 $f(0)=f(2)=0$，

因为 $f(x)=-f(4-x)$ 且 $f(x)=f(2-x)$，可得 $f(2-x)=-f(4-x)$，

所以 $f(x)=-f(x+2)=f(x+4)$，所以函数 $f(x)$ 是以 4 项为周期的周期函数，

可得 $f(4)=f(0)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12\cdot[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(49)+f(50)=12\times0+f(1)+f(2)=-2$，

所以 D 正确.

故选：BCD.

17.（22-23 高二下·河北张家口·期末）已知 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}-\frac{5}{4}$，$b=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}$，$c=\ln\frac{4}{5}$（e是自然对数的底数），则下列结论正确的有（　）

A．$ac<0$，$bc>0$　　B．$ac<0$，$bc<0$

C．$a>b>c$　　D．$b>a>c$

【答案】BD

【分析】构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，利用其单调性和最值一一判断即可.

【详解】首先证明切线不等式 $\mathrm{e}^x\geq x+1$，

设 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，

又因为 $f'(x)$ 为单调递增函数，所以 $f'(x)$ 有唯一零点 $x=0$，

且当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，

故 $f(x)_{\min}=f(0)=0$，则 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1\geq0$，即 $\mathrm{e}^x\geq x+1$，

则 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}-\frac{5}{4}=f\left(\frac{1}{4}\right)>f(0)=0$，$b=f\left(\frac{1}{3}\right)>f(0)=0$，而 $c=\ln\frac{4}{5}<\ln1=0$，所以 B 正确，A 错误；

又因为当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增，$a=f\left(\frac{1}{4}\right),b=f\left(\frac{1}{3}\right)$，则 $a<b$，

因此 $c<a<b$，故 D 正确，C 错误.

故选：BD.

18.（22-23 高二下·江苏苏州·期末）已知函数 $f(x)=ax-\sin x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则下列结论正确的有（　）

A．当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极小值

B．当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有且只有一个零点

C．若 $f(x)\leq0$ 恒成立，则 $0<a\leq\frac{2}{\pi}$

D．若 $f(x)\geq0$ 恒成立，则 $a\geq1$

【答案】ABD

【分析】选项 A、B：当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$，结合导数研究函数的单调性，求解函数的极值、零点问题；选项 C、D：利用导数解决函数恒成立问题；

【详解】选项 A、B：当$a=\frac{1}{2}$时，$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$，当$x\in[0,\frac{\pi}{3}],f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right],f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；故$f(x)$在$x=\frac{\pi}{3}$处取得极小值，故 A 正确；

又因为$f(0)=0,f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}-1<0$，所以$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$f(x)$有且只有一个零点，故 B 正确；

选项 C、D: $f(x)\le 0$恒成立，当$x=0$时，$a\in\mathrm{R}$；

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，即$ax-\sin x\le 0$，$a\le\frac{\sin x}{x}$恒成立，

构造函数$g(x)=\frac{\sin x}{x}$，$g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令$h(x)=x\cos x-\sin x$，$h'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$，

$h(x)$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$单调递减，又$h(0)=0$，所以$g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$，所以$g(x)=\frac{\sin x}{x}$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，$a\le\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{\min}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$，综上可得$a\le\frac{2}{\pi}$，故 C 错误；

函数$y=\sin x-x,y'=\cos x-1,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right],y'<0$，函数单调递减，则$y<0$，

故有$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin x<x$即$\frac{\sin x}{x}<1$；

$f(x)\ge 0$即$ax-\sin x\ge 0$恒成立，$x=0$时，$a\in\mathrm{R}$；

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$a\ge\frac{\sin x}{x}$，又$\frac{\sin x}{x}<1$，所以$a\ge 1$，选项 D 正确；

故选：ABD.

19.（22-23 高二下·重庆南岸·期末）设函数$f(x)=x^3-3x^2+2x$，若$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$是函数$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}\lambda x$的两个极值点，则下列结论正确的是（　　）

A．若$0<\lambda<2$，则$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$　　B．若$-4<\lambda<0$，则$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$

C．若$-2<\lambda<0$，则$f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$　　D．若$\lambda<-4$，则$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$

【答案】CD

【分析】利用$g'\left(x\right)=0$求得x_1,x_2的关系式，利用差比较法计算$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$，根据计算结果判断出正确的结论.

【详解】依题意 $g(x)=x^3-3x^2+\left(2+\frac{1}{2}\lambda\right)x$，则 $g'(x)=3x^2-6x+2+\frac{1}{2}\lambda$，令 $g'(x)=0$，

由题意知 $\Delta=36-4\times3\times\left(2+\frac{1}{2}\lambda\right)>0$，解得 $\lambda<2$.

依题意，x_1，x_2 是 $g'(x)$ 的两个零点，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2+\frac{1}{2}\lambda}{3}\end{cases}$（*），且 $\begin{cases}3x_1^2-6x_1+2+\frac{1}{2}\lambda=0①\\ 3x_2^2-6x_2+2+\frac{1}{2}\lambda=0②\end{cases}$，

①+②，得 $3\left(x_1^2+x_2^2\right)-6\left(x_1+x_2\right)+4+\lambda=0$③，

将（*）代入③，化简得 $x_1^2+x_2^2=\frac{8-\lambda}{3}$（**），

所以 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1^3-x_2^3-3\left(x_1^2-x_2^2\right)+2\left(x_1-x_2\right)$

$=\left(x_1-x_2\right)\left[x_1^2+x_2^2+x_1x_2-3\left(x_1+x_2\right)+2\right]$④，

将（*）、（**）代入④，得 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\left(x_1-x_2\right)\left(\frac{8-\lambda}{3}+\frac{2+\frac{1}{2}\lambda}{3}-6+2\right)=\frac{-\left(x_1-x_2\right)(\lambda+4)}{6}$.

由于 $x_1-x_2<0$，所以当 $0<\lambda<2$、$-4<\lambda<0$、$-2<\lambda<0$ 时，$\lambda+4>0$，

则 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>0$，所以 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，故 A、B 错误，C 正确.

当 $\lambda<-4$ 时，$\lambda+4<0$，则 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，所以 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，故 D 正确.

故选：CD

20.（22-23 高二下·安徽亳州·期末）已知函数 $f(x),g(x)$ 及其导函数 $f'(x),g'(x)$ 的定义域均为 R，$f(x+1)$ 为偶函数，函数 $y=g(x+1)$ 的图像关于 $(-1,0)$ 对称，则（　）

A．$f\left(g(1)\right)=f\left(2+g(-1)\right)$　　　　B．$g\left(f(1)\right)=-g\left(f(2)\right)$

C．$f\left(g'(-1)\right)=f\left(2-g'(1)\right)$　　　　D．$g'\left(f'(-1)\right)=g'\left(f'(3)\right)$

【答案】ACD

【分析】根据条件得出 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，$g(x)$ 关于 $(0,0)$ 对称，再利用原函数与导函数间的奇偶关系，逐一对各个选项分析判断即可得出结果.

【详解】因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

又函数 $y=g\left(x+1\right)$ 的图像关于 $\left(-1,0\right)$ 对称，所以 $g\left(x\right)$ 关于 $(0,0)$ 对称，

又 $g(-x)=-g(x)$，所以 $[g(-x)]'=[-g(x)]'$，得到 $g'(-x)=g'(x)$，所以 $g'\left(x\right)$ 为偶函数，同理可得 $f'\left(x+1\right)$ 为奇函数，

选项 A，因为 $2+g\left(-1\right)=2-g(1)$，又 $x=g(1)$ 与 $x=2-g(1)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f\left(g\left(1\right)\right)=f\left(2+g\left(-1\right)\right)$，故选项 A 正确；

选项 B，因为由题得不出 $f(1)=-f(2)$，故没有 $g\left(f\left(1\right)\right)=-g\left(f\left(2\right)\right)$，所以选项 B 错误；

选项 C，因为 $g'\left(x\right)$ 为偶函数，所以 $g'\left(-1\right)=g'(1)$，又 $x=g(1)$ 与 $x=2-g(1)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f\left(g'\left(-1\right)\right)=f\left(2-g'\left(1\right)\right)$，故选项 C 正确；

选项 D，因为 $f'\left(x+1\right)$ 为奇函数，所以 $f'\left(-2+1\right)=f'(-1)=-f'(2+1)=-f'(3)$，

又 $g'\left(x\right)$ 为偶函数，所以 $g'\left(f'\left(-1\right)\right)=g'\left(-f'\left(3\right)\right)=g'\left(f'\left(3\right)\right)$，故选项 D 正确.

故选：ACD.

21.（22-23 高二下·江西新余·期末）设函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)(x\in\mathrm{R})$ 的导函数，若 $f(\mathrm{x})-f(-\mathrm{x})=2x^3$，且当 $x>0$ 时，$f'(x)>3x^2$，令 $F(x)=f(x)-x^3$，则下列结论正确的是（　）

A．$F(x)$ 为偶函数

B．$F(x)$ 为奇函数

C．$F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数

D．不等式 $f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}-1)>3x^2-3x+1$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【答案】ACD

【分析】根据奇偶函数的定义判断选项 A、B，根据导函数判断单调性及偶函数性质判断选项 C，利用抽象函数的单调性及偶函数性质解不等式判断 D.

【详解】$F(x)=f(x)-x^3$，定义域为 R，

因为 $F(-x)=f(-x)-(-x)^3=\left[f(x)-2x^3\right]+x^3=f(x)-x^3=F(x)$，所以函数 $F(x)$ 为偶函数，

故选项 A 正确，选项 B 错误；

由 $F(x)=f(x)-x^3$ 得 $F'(x)=f'(x)-3x^2$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>3x^2$，所以 $F'(x)>0$，

所以函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

根据偶函数的性质知，函数$F(x)$在$(-\infty,0)$上为减函数，故选项 C 正确；

将不等式$f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}-1)>3x^2-3x+1$化为$f(x)-x^3>f(x-1)-(x-1)^3$，即$F(x)>F(x-1)$，

又函数函数$F(x)$为偶函数，且在$(0,+\infty)$上为增函数，所以$F(|x|)>F(|x-1|)$，

所以$|x|>|x-1|$，平方化简得$2x-1>0$，解得$x>\frac{1}{2}$，

所以不等式$f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}-1)>3x^2-3x+1$的解集为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，故选项 D 正确.

故选：ACD

22.（22-23 高二下·安徽宣城·期末）已知函数$f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}$，下列说法正确的是（　）

A．$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$上单调递减，在区间$(-1,+\infty)$上单调递增

B．$f(x)$在$x\in\mathbf{R}$上仅有一个零点

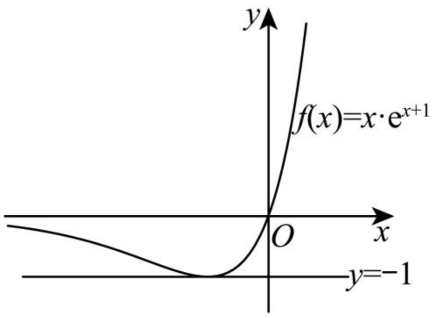
C．若关于x的方程$f(x)=a(a\in\mathbf{R})$有两个实数解，则$a>-1$

D．$f(x)$在$x\in\mathbf{R}$上有最小值-1，无最大值

【答案】ABD

【分析】根据题意，求导即可判断 AB，画出函数$f(x)$的图像，即可判断 CD.

【详解】



因为$f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}$，则$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+1}$，由$f¢(x)>0$，可得$x>-1$，由$f'(x)<0$，可得$x<-1$，所以$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$上单调递减，在区间$(-1,+\infty)$上单调递增，故 A 正确；$f(x)$在$x=-1$处取得极小值，也是最小值为$f(-1)=-1$，当$x<0$时，$f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}<0$，当$x>0$时，$f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}>0$，可以得到$f(x)$的图像，如图所示，

由图像可得，$f(x)$在$x\in\mathbf{R}$上仅有一个零点，故 B 正确；若关于x的方程$f(x)=a(a\in\mathbf{R})$有两个实数解，

则函数$y=f(x)$与$y=a(a\in\mathbf{R})$，的图像有两个交点，由图像可得$-1<a<0$，故 C 错误；$f(x)$在$x\in\mathbf{R}$上

有最小值，无最大值，故 D 正确；

故选：ABD

23.（22-23 高二下·辽宁葫芦岛·期末）设 $a\in(0,1)$，若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的值可能是（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{7}{8}$

【答案】CD

【分析】分析可得 $a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，进而分析可得 $-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}\leq 1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求出 a 的取值范围，分析选项可得答案．

【详解】因为函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$，则 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)$，

若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geq 0\Leftrightarrow(1+a)^x\ln(1+a)\geq -a^x\ln a\Rightarrow\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq -\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$，

则有 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geq -\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

因为 $0<a<1$，则 $\frac{1+a}{a}=\frac{1}{a}+1>2$，所以 $\left(\frac{1+a}{a}\right)^x>1$，

必有 $-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}\leq 1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

由于 $a\in(0,1)$，则 $1+a\in(1,2)$，必有 $\begin{cases}\ln(1+a)\geq -\ln a\\0<a<1\end{cases}$，即 $\begin{cases}\ln(1+a)\geq \ln\frac{1}{a}\\0<a<1\end{cases}$，所以 $\begin{cases}1+a\geq \frac{1}{a}\\0<a<1\end{cases}$，

解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq a<1$，

即 a 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$，分析选项：$a=\frac{4}{5}$ 和 $a=\frac{7}{8}$ 符合．

故选：CD．

24.（22-23 高二下·江西吉安·期末）已知函数 $f(x)=3x^3+3x^2+x+1$，则（　）

A．$f(x)$ 有 1 个极值点　　B．$f(x)$ 的对称中心是 $\left(-\frac{1}{3},\frac{8}{9}\right)$

C．$f(x)$ 有 2 个零点　　D．$f(x)$ 的一条切线方程是 $4x-y+4=0$

【答案】BD

【分析】对于 A，利用导数推出函数 $f(x)$ 单调递增，从而无极值点，可判断 A 错误；对于 B，设函数 $f(x)=3x^3+3x^2+x+1$ 的对称中心为 (m,n)，利用 $f(x+m)+f(-x+m)-2n=0$ 恒成立求出 m,n，可判断 B 正

确；对于 C，根据 $f(x)$ 为增函数且 $f(-1)=0$ 判断 C 错误；对于 D，根据导数的几何意义求出斜率为 4 的切线，可判断 D 正确，

【详解】对于 A，由题意得 $f'(x)=(3x+1)^2\geq 0$，当且仅当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，$f'(-\frac{1}{3})=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 无极值点，A 错误；

对于 B，设函数 $f(x)=3x^3+3x^2+x+1$ 的对称中心为 (m,n)，

按向量 $\vec{a}=(-m,-n)$ 将函数的图象平移，则所得函数 $y=f(x+m)-n$ 是奇函数，

所以 $f(x+m)+f(-x+m)-2n=0$ 对任意实数 x 恒成立，

即 $3(x+m)^3+3(x+m)^2+x+m+1+3(-x+m)^3+3(-x+m)^2+(-x+m)+1-2n=0$ 对任意实数 x 恒成立，

化简得 $(9m+3)x^2+3m^3+3m^2+m+1-n=0$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $\begin{cases}9m+3=0\\3m^3+3m^2+m+1-n=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{3}\\n=\frac{8}{9}\end{cases}$，

则 $f(x)$ 的对称中心是 $\left(-\frac{1}{3},\frac{8}{9}\right)$，故 B 正确；

对于 C，$\because f'(x)=(3x+1)^2\geq 0$，$\therefore f(x)$ 在定义域内单调递增，又 $f(-1)=0$，

所以 $f(x)$ 只有一个零点 $x=-1$，C 错误；

对于 D，$\because f'(-1)=(-3+1)^2=4$，$f(-1)=0$，

$\therefore f(x)$ 在点 $(-1,0)$ 处的切线方程为 $y=4(x+1)$，即 $4x-y+4=0$，D 正确，

故选：BD.

25.（22-23 高二下·山东枣庄·期末）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^x}+e^{x-4}-ax$ 有四个零点 $x_1,x_2,x_3,x_4\left(x_1<x_2<x_3<x_4\right)$，则（　）

A．$x_1+x_2>2$

B．$\frac{2}{e^2}<a<\frac{1}{e}+\frac{1}{e^3}$

C．$\ln\left(x_1x_2x_3x_4\right)-\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)=-8$

D．若 $x_2=2-\sqrt{3}$，则 $x_4=2+\sqrt{3}$

【答案】BCD