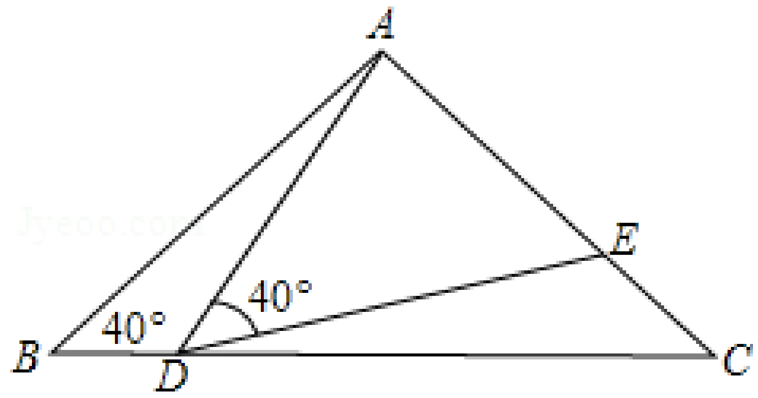
第二次讲义：三角形的综合证明

1．如图，在△ABC 中，AB=AC=2，∠B=40°，点 D 在线段 BC 上运动（D 不与 B、C 重合），连接 AD，作∠ADE=40°，DE 交线段 AC 于 E．

（1）当∠BDA=115°时，∠BAD=_______°；点 D 从 B 向 C 运动时，∠BDA 逐渐变（填 大 或 小 ）；

（2）当 DC 等于多少时，△ABD≌△DCE，请说明理由；

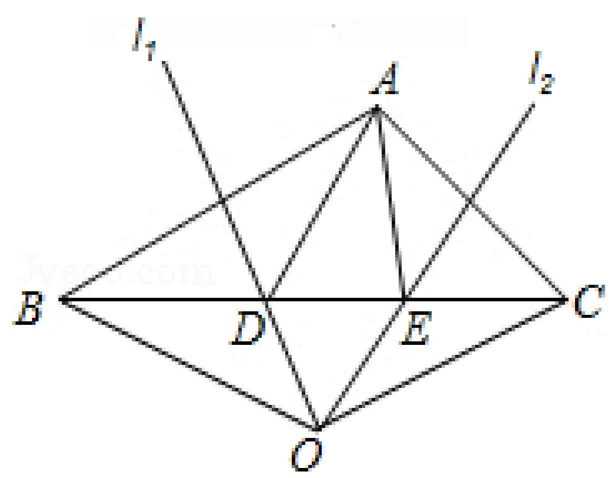
（3）在点 D 的运动过程中，△ADE 的形状也在改变，判断当∠BDA 等于多少度时，△ADE 是等腰三角形．



2．如图，在△ABC 中，AB 边的垂直平分线 l_1 交 BC 于点 D，AC 边的垂直平分线 l_2 交 BC 于点 E，l_1 与 l_2 相交于点 O，连结 0B，OC，若△ADE 的周长为 6cm，△OBC 的周长为 16cm．

（1）求线段 BC 的长；（2）连结 OA，求线段 OA 的长；

（3）若∠BAC=120°，求∠DAE 的度数．

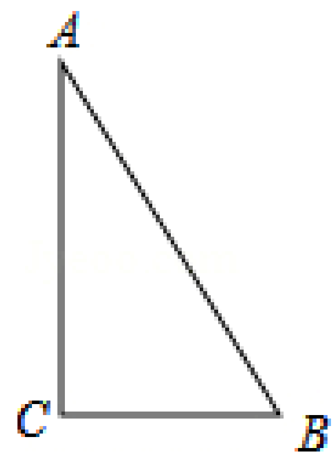


3．如图，△ABC 中，∠C=90°，AB=10cm，BC=6cm，若动点 P 从点 C 开始，按 C　A　B　C的路径运动，且速度为每秒 1cm，设出发的时间为 t 秒．

（1）出发 2 秒后，求△ABP 的周长．

（2）问 t 为何值时，△BCP 为等腰三角形？

（3）另有一点 Q，从点 C 开始，按 C　B　A　C的路径运动，且速度为每秒 2cm，若 P、Q 两点同时出发，当 P、Q 中有一点到达终点时，另一点也停止运动．当 t 为何值时，直线 PQ 把△ABC 的周长分成相等的两部分？



4．在△ABC 中，AB=AC，BG⊥AC 于 G，DE⊥AB 于 E，DF⊥AC 于 F．

（1）如图 1，若 D 是 BC 边上的中点，∠A=45°，DF=3，求 AC 的长；

（2）如图 2，D 是线段 BC 上的任意一点，求证：BG=DE　DF；

（3）在图 3，D 是线段 BC 延长线上的点，猜想 DE、DF 与 BG 的关系，并证明．

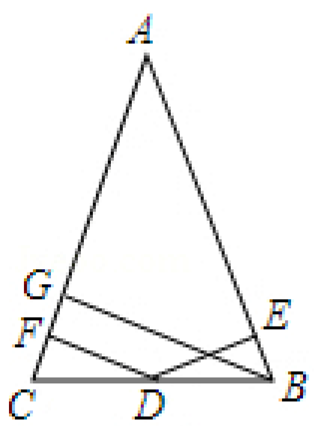


图1

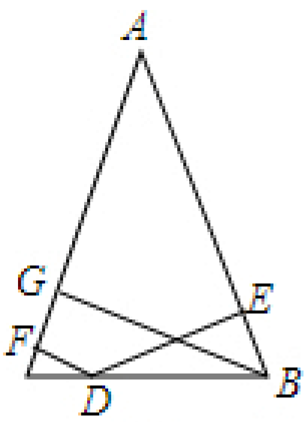


图2

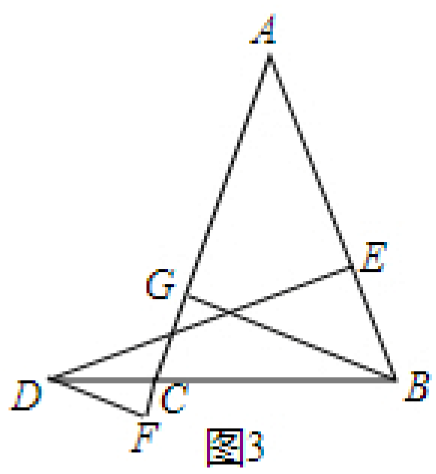
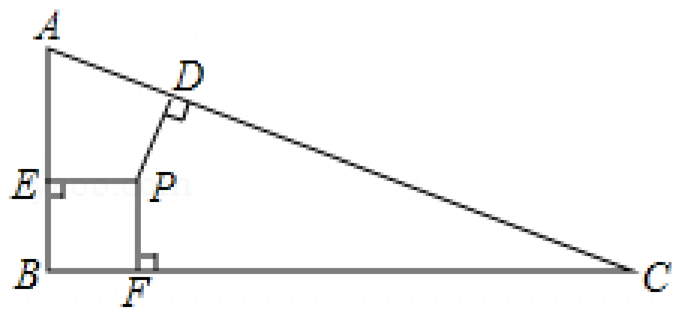


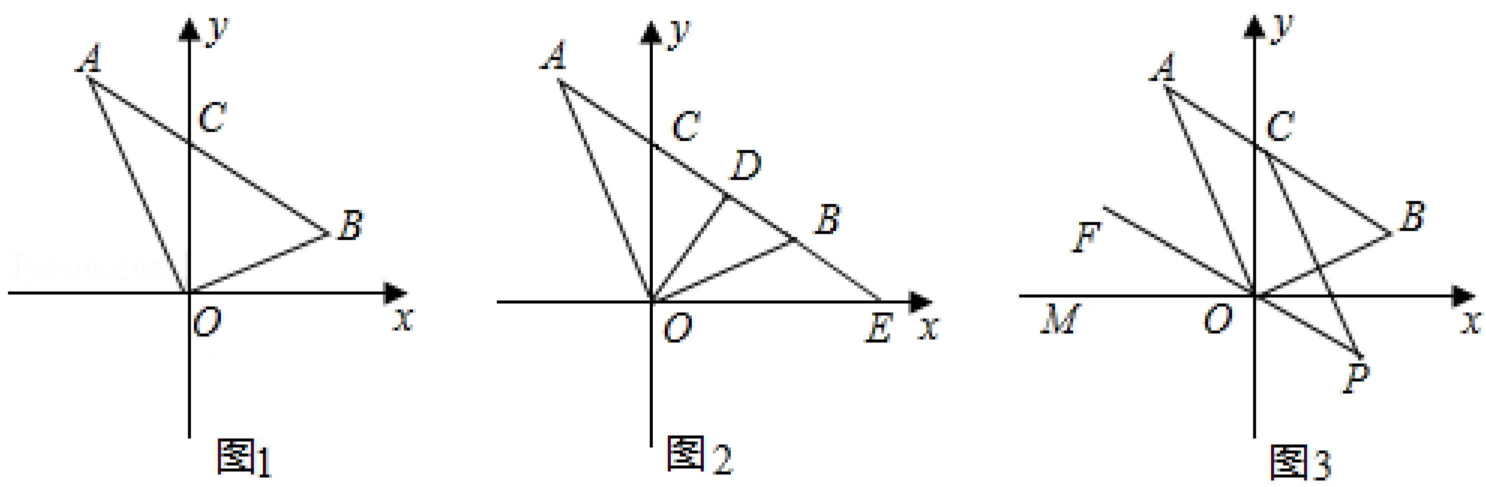
图3

5．如图，△ABC 中，∠B=90°，两直角边 AB=7，BC=24，三角形内有一点 P 到各边的距离相等，PE⊥AB、PF⊥BC、PD⊥AC，垂足分别为 E、F、D，求 PD 的长．



6．如图，在平面直角坐标系中，△AOB 是直角三角形，∠AOB=90°，斜边 AB 与 y 轴交于点 C．

（1）若∠A=∠AOC，求证：∠B=∠BOC；



（2）延长 AB 交 x 轴于点 E，过 O 作 OD⊥AB，且∠DOB=∠EOB，∠OAE=∠OEA，求∠A 度数；

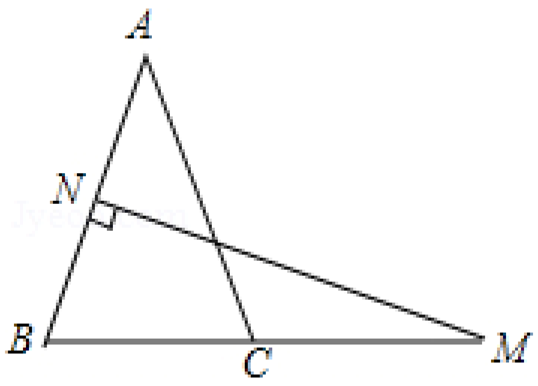
（3）如图，OF 平分∠AOM，∠BCO 的平分线交 FO 的延长线于点 P，当△ABO 绕 O 点旋转时（斜边 AB 与 y 轴正半轴始终相交于点 C），在（2）的条件下，试问∠P 的度数是否发生改变？若不变，请求其度数；若改变，请说明理由．

7．如图，在△ABC 中，AB=AC，AB 的垂直平分线交 AB 于点 N，交 BC 的延长线于点 M，若∠A=40°．

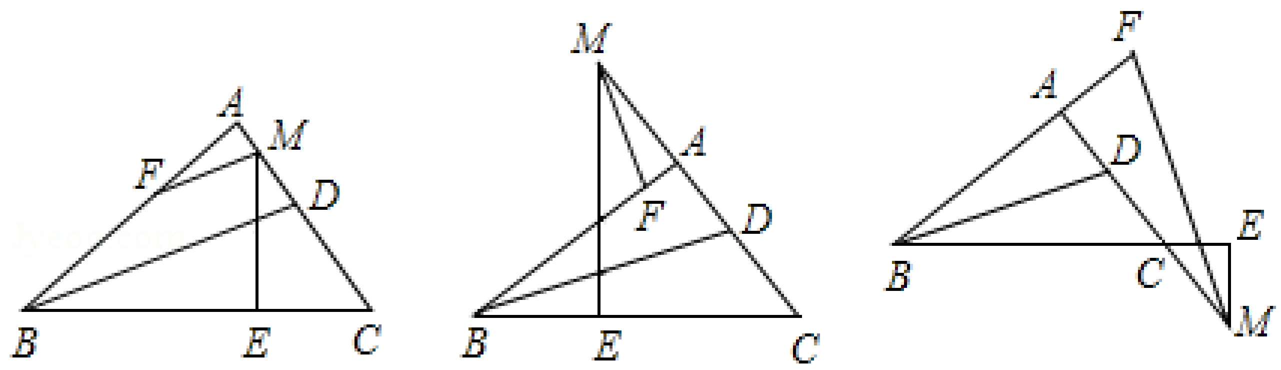
（1）求∠NMB 的度数；

（2）如果将（1）中∠A 的度数改为 70°，其余条件不变，再求∠NMB 的度数；

（3）你发现∠A 与∠NMB 有什么关系，试证明之．



8．小明在学习三角形知识时，发现如下三个有趣的结论：在 Rt△ABC 中，∠A=90°，BD 平分∠ABC，M 为直线 AC 上一点，ME⊥BC，垂足为 E，∠AME 的平分线交直线 AB 于点 F．



图①　　图②　　图③

（1）M 为边 AC 上一点，则 BD、MF 的位置是_______．请你进行证明．

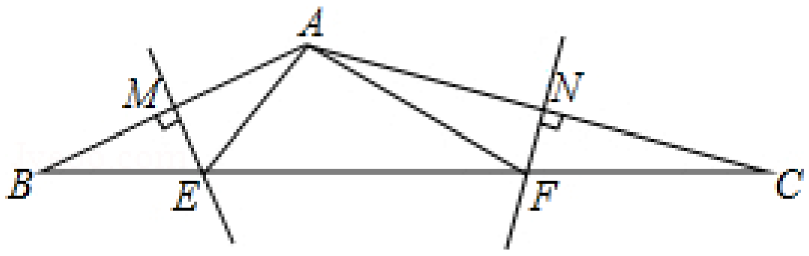
（2）M 为边 AC 反向延长线上一点，则 BD、MF 的位置关系是_______．请你进行证明．

（3）M 为边 AC 延长线上一点，猜想 BD、MF 的位置关系是_______．请你进行证明．

9．如图，在△ABC 中，边 AB 的垂直平分线交 BC，AB 于点 E，M，边 AC 的垂直平分线交 BC，AC 于点 F，N，△AEF 的周长是 10．

（1）求 BC 的长度；

（2）若∠B ∠C=45°，EF=4，求△AEF 的面积．

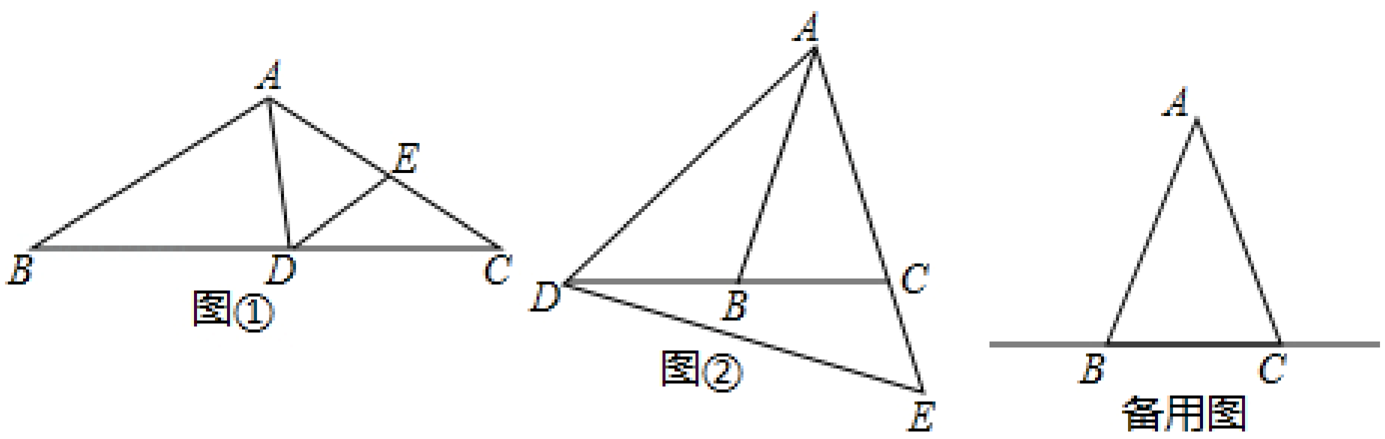


10．如图，△ABC 中，∠ABC=∠ACB，点 D 在 BC 所在的直线上，点 E 在射线 AC 上，且∠ADE=∠AED，连接 DE．

（1）如图①，若∠B=∠C=30°，∠BAD=70°，求∠CDE 的度数；

（2）如图②，若∠ABC=∠ACB=70°，∠CDE=15°，求∠BAD 的度数；

（3）当点 D 在直线 BC 上（不与点 B、C 重合）运动时，试探究∠BAD 与∠CDE 的数量关系，并说明理由．



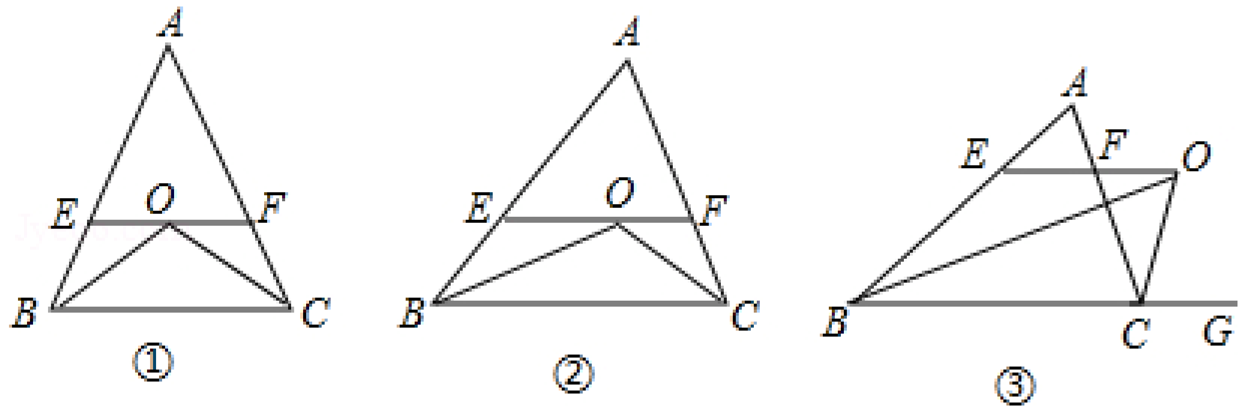
图①　图②　备用图

11．如图①，△ABC 中，AB=AC，∠B、∠C 的平分线交于 O 点，过 O 点作 EF∥BC 交 AB、AC 于 E、F．试回答：

（1）图中等腰三角形是________．猜想：EF 与 BE、CF 之间的关系是________．理由：

（2）如图②，若 AB≠AC，图中等腰三角形是________．在第（1）问中 EF 与 BE、CF 间的关系还存在吗？

（3）如图③，若△ABC 中∠B 的平分线 BO 与三角形外角平分线 CO 交于 O，过 O 点作 OE∥BC 交 AB 于 E，交 AC 于 F．这时图中还有等腰三角形吗？EF 与 BE、CF 关系又如何？说明你的理由．



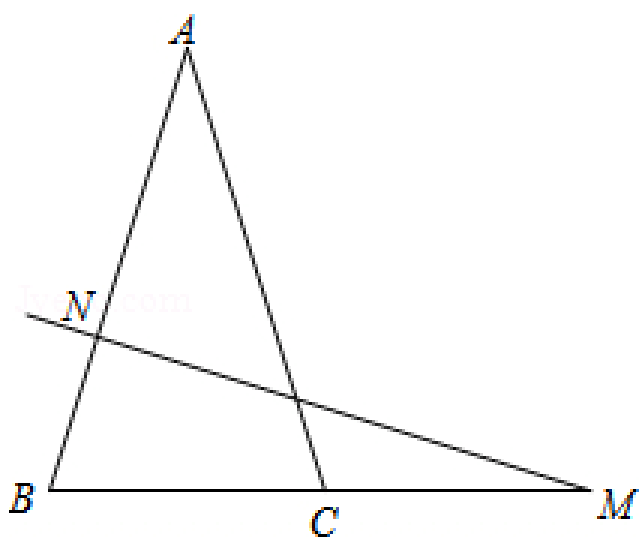
12．如图，在△ABC 中，AB=AC，N 是 AB 上任一点（不与 A、B 重合），过 N 作 NM⊥AB 交 BC 所在直线于 M，

（1）若∠A=30°．求∠NMB 的度数；

（2）如果将（1）中∠A 的度数改为 68°，其余条件不变，求∠NMB 的度数；

（3）综合（1）（2），你发现有什么样的规律性，试证明之；

（4）若将（1）中的∠A 改为直角或钝角，你发现的规律是否仍然成立？



13．如图 1 所示，等边△ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，根据等腰三角形的 三线合一 特性，AD 平分∠BAC，且 AD⊥BC，则有∠BAD=30°，$BD=CD=\frac{1}{2}AB$．于是可得出结论 直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半 ．

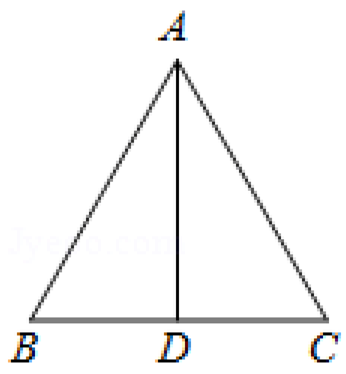


图 1

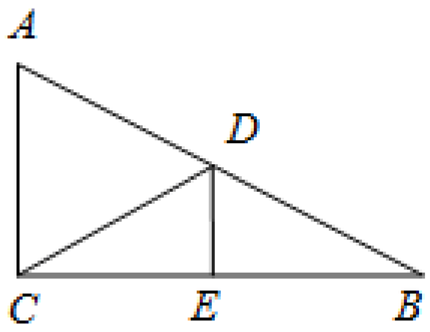


图 2

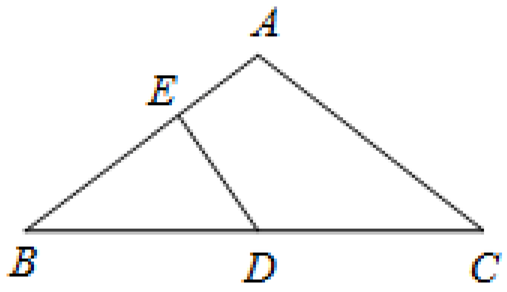


图 3

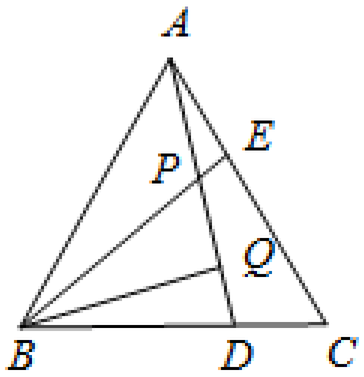


图 4

请根据从上面材料中所得到的信息解答下列问题：

（1）△ABC 中，若∠A：∠B：∠C=1：2：3，AB=a，则 BC=________；

（2）如图 2 所示，在△ABC 中，∠ACB=90°，BC 的垂直平分线交 AB 于点 D，垂足为 E，当 BD=5cm，∠B=30°时，△ACD 的周长=________．

（3）如图 3 所示，在△ABC 中，AB=AC，∠A=120°，D 是 BC 的中点，DE⊥AB，垂足为 E，那么 BE：EA=________．

（4）如图 4 所示，在等边△ABC 中，D、E 分别是 BC、AC 上的点，且∠CAD=∠ABE，AD、BE 交于点 P，作 BQ⊥AD 于 Q，猜想 PB 与 PQ 的数量关系，并说明理由．

14．如果定义： 到三角形的两个顶点距离相等的点，叫做此三角形的准外心.

例如：如图 1 所示，若 PC=PB，则称点 P 为△ABC 的准外心.

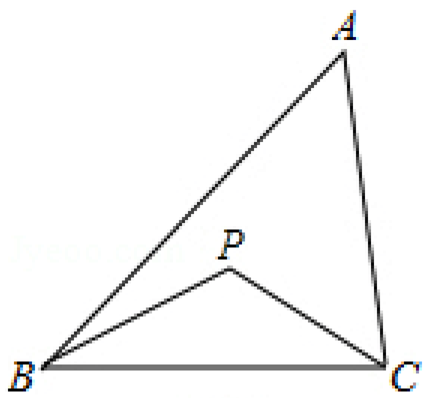


图1

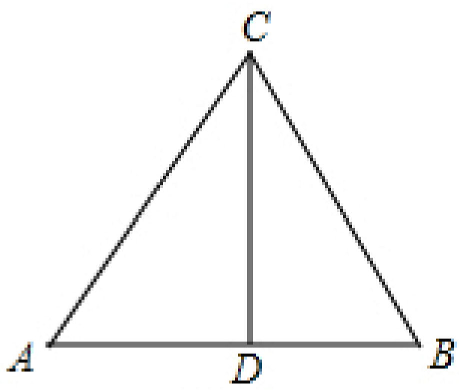


图2

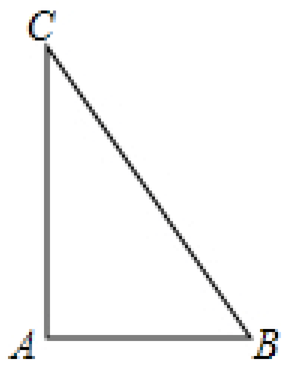


图3

（1）观察并思考，△ABC 的准外心有________个.

（2）如图 2，△ABC 是等边三角形，CD⊥AB，准外心点 P 在高 CD 上，且 PD=$\frac{1}{2}$AB，在图中画出点 P 点，求∠APB 的度数.

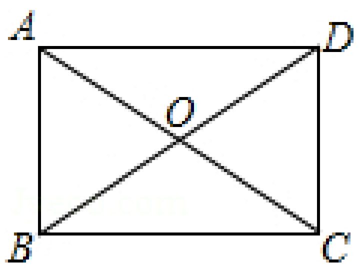
（3）已知△ABC 为直角三角形，斜边 BC=5，AB=3，准外心点 P 在 AC 边上，在图中画出 P 点，并求 PA 的长.

15．请阅读下列材料：如图甲，在矩形 ABCD 中，对角线 AC、BD 相交于 O．由矩形的性质得，$BO=AO=\frac{1}{2}AC$．于是我们得到定理 1：直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半．

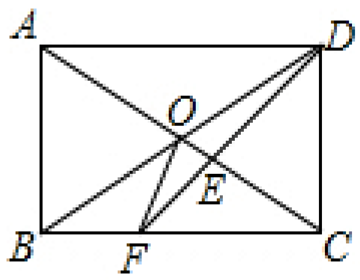
前面的条件不变，若∠ACB=30°，由矩形的性质得，∠AOB=60°，所以△ABO 为等边三角形，所以 $AB=AO=\frac{1}{2}AC$．于是我们得到定理 2：直角三角形中，30°的直角边等于斜边的一半．请你运用以上两个定理，解答下面两题：

（1）如图乙，O 为矩形 ABCD 的对角线交点，DF 平分∠ADC 交 AC 于点 E，交 BC 于点 F，∠BDF=15°，则∠COF=________ 度；

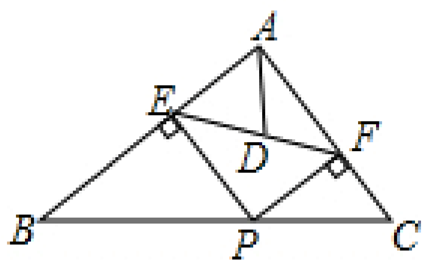
（2）如图丙，在△ABC 中，AB=4，AC=3，BC=5，P 为边 BC 上一动点，PE⊥AB 于 E，PF⊥AC 于 F，D 为 EF 的中点，求 AD 的最小值．



图甲



图乙



图丙

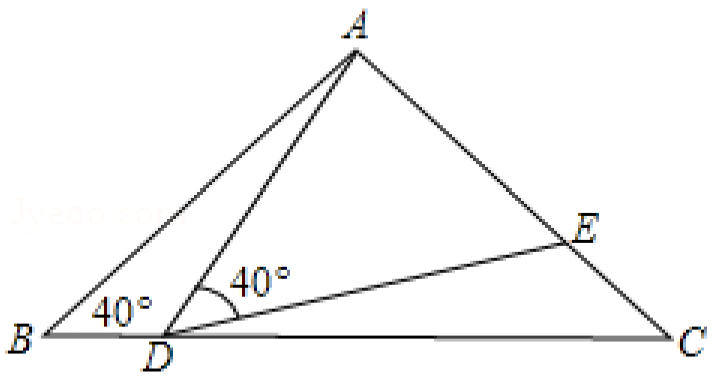
第二次讲义答案

1．如图，在△ABC 中，AB=AC=2，∠B=40°，点 D 在线段 BC 上运动（D 不与 B、C 重合），连接 AD，作∠ADE=40°，DE 交线段 AC 于 E．

（1）当∠BDA=115°时，∠BAD=__25__°；点 D 从 B 向 C 运动时，∠BDA 逐渐变__小__（填 大 或 小 ）；

（2）当 DC 等于多少时，△ABD≌△DCE，请说明理由；

（3）在点 D 的运动过程中，△ADE 的形状也在改变，判断当∠BDA 等于多少度时，△ADE 是等腰三角形．



【解答】解：（1）∠BAD=180°﹣∠ABD﹣∠BDA=180°﹣40°﹣115°=25°；

从图中可以得知，点 D 从 B 向 C 运动时，∠BDA 逐渐变小；

故答案为：25°；小．

（2）当△ABD≌△DCE 时．

DC=AB，

∵AB=2，

∴DC=2，

∴当 DC 等于 2 时，△ABD≌△DCE；

（3）∵AB=AC，

∴∠B=∠C=40°，

①当 AD=AE 时，∠ADE=∠AED=40°，

∵∠AED＞∠C，

∴此时不符合；

②当 DA=DE 时，即∠DAE=∠DEA=$\frac{1}{2}$（180°﹣40°）=70°，

∵∠BAC=180°﹣40°﹣40°=100°，

∴∠BAD=100°﹣70°=30°；

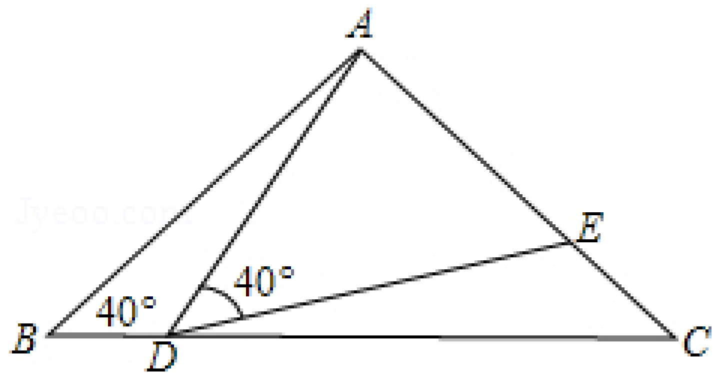
∴∠BDA=180°﹣30°﹣40°=110°；

③当 EA=ED 时，∠ADE=∠DAE=40°，

∴∠BAD=100°﹣40°=60°，

∴∠BDA=180°﹣60°﹣40°=80°；

∴当∠ADB=110°或 80°时，△ADE 是等腰三角形．

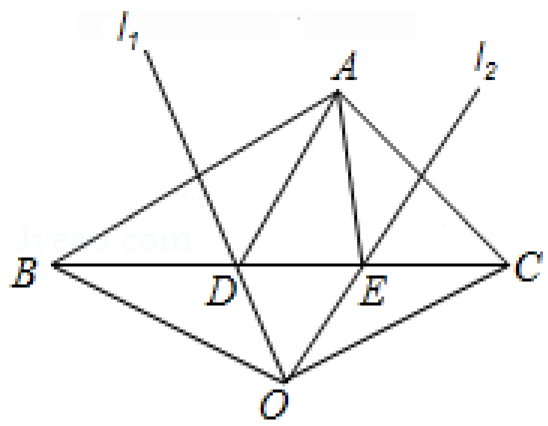


2．如图，在△ABC 中，AB 边的垂直平分线 l_1 交 BC 于点 D，AC 边的垂直平分线 l_2 交 BC 于点 E，l_1 与 l_2 相交于点 O，连结 0B，OC，若△ADE 的周长为 6cm，△OBC 的周长为 16cm．

（1）求线段 BC 的长；

（2）连结 OA，求线段 OA 的长；

（3）若∠BAC=120°，求∠DAE 的度数．



【解答】解：（1）∵l_1 是 AB 边的垂直平分线，

∴DA=DB，

∵l_2 是 AC 边的垂直平分线，

∴EA=EC，

BC=BD DE EC=DA DE EA=6cm；

（2）∵l_1是 AB 边的垂直平分线，

∴OA=OB，

∵l_2是 AC 边的垂直平分线，

∴OA=OC，

∵OB OC BC=16cm，

∴OA=0B=OC=5cm；

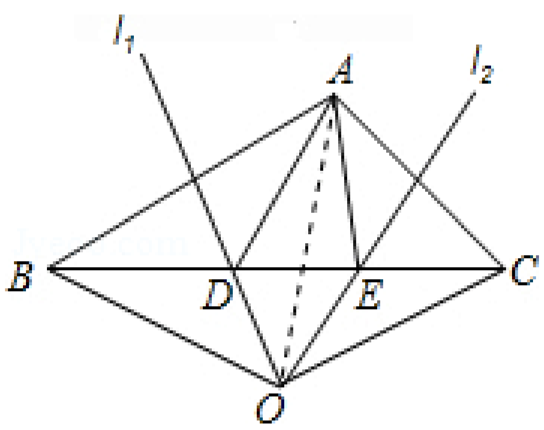
（3）∵∠BAC=120°，

∴∠ABC ∠ACB=60°，

∵DA=DB，EA=EC，

∴∠BAD=∠ABC，∠EAC=∠ACB，

∴∠DAE=∠BAC﹣∠BAD﹣∠EAC=60°．

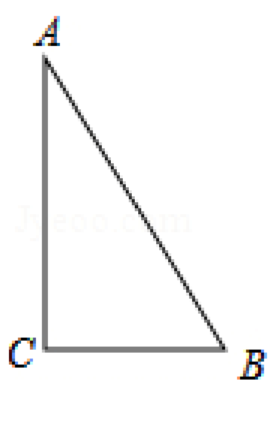


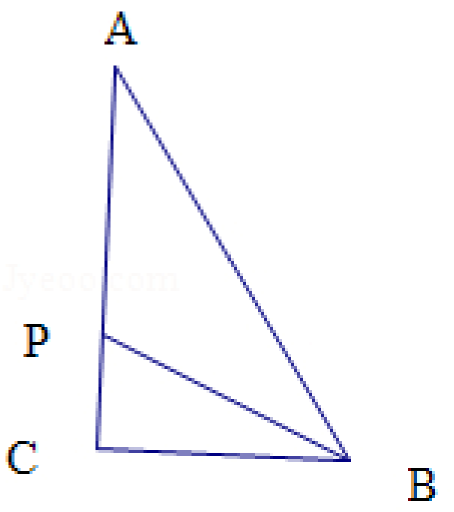
3．如图，△ABC 中，∠C=90°，AB=10cm，BC=6cm，若动点 P 从点 C 开始，按 C A B C的路径运动，且速度为每秒 1cm，设出发的时间为 t 秒．

（1）出发 2 秒后，求△ABP 的周长．

（2）问 t 为何值时，△BCP 为等腰三角形？

（3）另有一点 Q，从点 C 开始，按 C B A C的路径运动，且速度为每秒 2cm，若 P、Q 两点同时出发，当 P、Q 中有一点到达终点时，另一点也停止运动．当 t 为何值时，直线 PQ 把△ABC 的周长分成相等的两部分？





【解答】

解：（1）∵∠C=90°，AB=10cm，BC=6cm，∴有勾股定理得 AC=8cm，动点 P 从点 C 开始，按 C　A　B　C的路径运动，且速度为每秒 1cm

∴出发 2 秒后，则 CP=2cm，那么 AP=6cm．

∵∠C=90°，

∴有勾股定理得 PB=$2\sqrt{10}$cm

∴△ABP 的周长为：AP　PB　AB=6　10　$2\sqrt{10}$=（16　$2\sqrt{10}$）cm；

（2）若 P 在边 AC 上时，BC=CP=6cm，

此时用的时间为 6s，△BCP 为等腰三角形；

若 P 在 AB 边上时，有两种情况：

①若使 BP=CB=6cm，此时 AP=4cm，P 运动的路程为 12cm，

所以用的时间为 12s，故 t=12s 时△BCP 为等腰三角形；

②若 CP=BC=6cm，过 C 作斜边 AB 的高，根据面积法求得高为 4.8cm，

根据勾股定理求得 BP=7.2cm，

所以 P 运动的路程为 18﹣7.2=10.8cm，

∴t 的时间为 10.8s，△BCP 为等腰三角形；

③若 BP=CP 时，则∠PCB=∠PBC，

∵∠ACP　∠BCP=90°，∠PBC　∠CAP=90°，∴∠ACP=∠CAP，∴PA=PC

∴PA=PB=5cm

∴P 的路程为 13cm，所以时间为 13s 时，△BCP 为等腰三角形．

∴t=6s 或 13s 或 12s 或 10.8s 时△BCP 为等腰三角形；

（3）当 P 点在 AC 上，Q 在 AB 上，则 AP=8﹣t，AQ=16﹣2t，

∵直线 PQ 把△ABC 的周长分成相等的两部分，

∴8﹣t 16﹣2t=12，

∴t=4；

当 P 点在 AB 上，Q 在 AC 上，则 AP=t﹣8，AQ=2t﹣16，

∵直线 PQ 把△ABC 的周长分成相等的两部分，

∴t﹣8 2t﹣16=12，

∴t=12，

∴当 t 为 4 或 12 秒时，直线 PQ 把△ABC 的周长分成相等的两部分．

4．在△ABC 中，AB=AC，BG⊥AC 于 G，DE⊥AB 于 E，DF⊥AC 于 F．

（1）如图 1，若 D 是 BC 边上的中点，∠A=45°，DF=3，求 AC 的长；

（2）如图 2，D 是线段 BC 上的任意一点，求证：BG=DE DF；

（3）在图 3，D 是线段 BC 延长线上的点，猜想 DE、DF 与 BG 的关系，并证明．

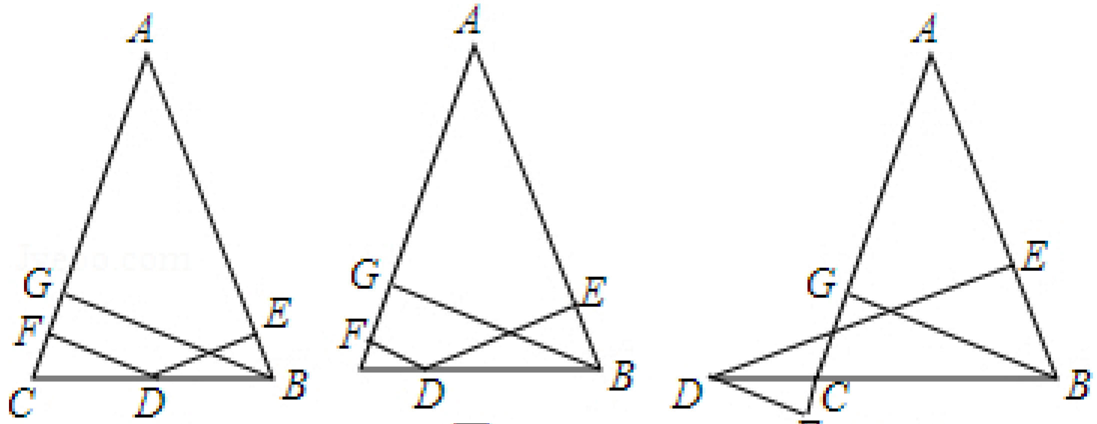


图1 图2 图3

【解答】解：如图 1，连结 AD．

则△ABC 的面积=△ABD 的面积 △ACD 的面积，即$\frac{1}{2}$AB DE $\frac{1}{2}$AC DF=$\frac{1}{2}$AC BG

∵AB=AC，

∴DE DF=BG，

∵D 是 BC 边上的中点，∴AD 平分∠BAC，

∴DE=DF=3，

∴BG=6，

∵∠A=45°，

∴△AGB 是等腰直角三角形，

∴AB=$\sqrt{2}$BG=6$\sqrt{2}$，

∴AC=6$\sqrt{2}$；

（2）证明：如图 2，连结 AD．

则△ABC 的面积=△ABD 的面积 △ACD 的面积，

即$\frac{1}{2}$AB DE $\frac{1}{2}$AC DF=$\frac{1}{2}$AC BG，

∵AB=AC，

∴DE DF=BG；

（3）DE﹣DF=BG，

证明：如图 3，连接 AD，则△ABC 的面积=△ABD 的面积﹣△ACD 的面积，

即$\frac{1}{2}$AB DE﹣$\frac{1}{2}$AC DF=$\frac{1}{2}$AC BG，

∵AB=AC，

∴DE﹣DF=BG．

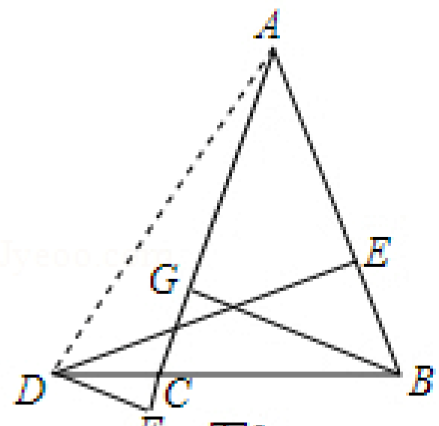


图3

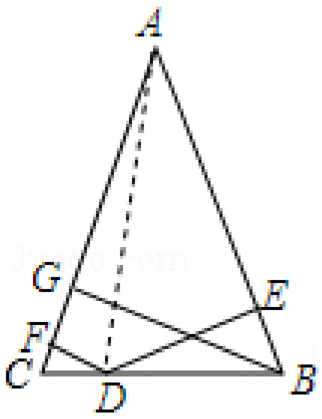


图2

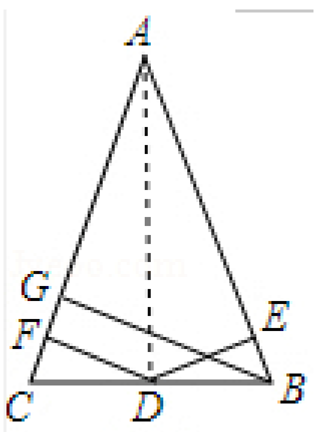


图1