Ch18 章　联立方程模型

在单一方程模型中，凭什么说解释变量是给定的？

谁天生就是解释变量的？

解释变量与扰动项之间是否有关系？

一、联立方程的性质： X 和 Y 之间有双向或联立关系。

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{12} Y_{2i} + \gamma_{11} X_{1i} + u_{1i}$$
$$Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} Y_{1i} + \gamma_{21} X_{1i} + u_{2i}$$

除非能说明 Y_{2i} 与 u_{1i} 或 Y_{1i} 与 u_{2i} 是互相独立的。

二、联立方程模型的举例

1．需求与供给模型：

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + u_{1t}$$

（α_1<0）

$$Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + u_{2t}$$

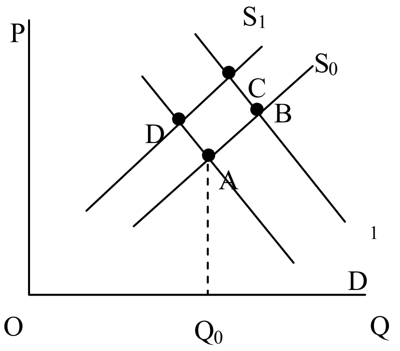
（β>0）

均衡条件： $Q_t^d = Q_t^s$

此模型中，p_t 与 u_{1t} 是相关的，

p_t 与 u_{2t} 是相关的。

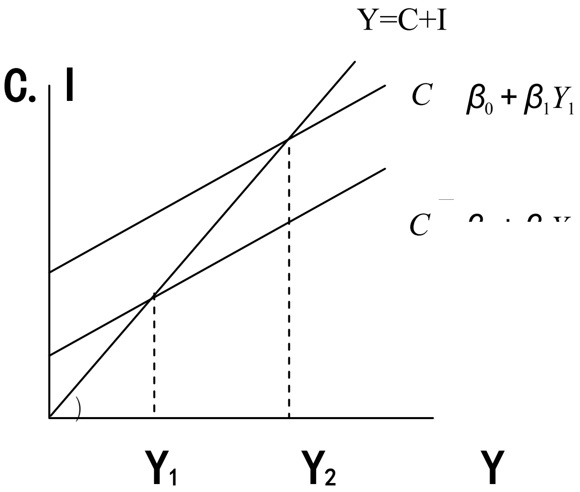
u_{1t}（收入，财富）



Q　　P

2．凯恩斯收入决定模型 $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t$

$$Y_t = C_t + I_t$$



Yt 与u_t相关。u_t含预期中收入，物价水平等因素。

u_t中的预期收入$\downarrow \rightarrow$ 消费减少 $\longrightarrow$ 收入（Y）下降。

3．工资价格模型。

失业率　物价变化

$\downarrow$　　$\downarrow$

工资变化率——$\dot{W}_t = \alpha_0 + \alpha_1 VN_t + \alpha_2 \dot{P}_t + u_{1t}$

$$\dot{P}_t = \beta_0 + \beta_1 \dot{W}_t + \beta_2 \dot{R}_t + \beta_3 \dot{M}_t + u_{2t}$$

$\uparrow$　　$\uparrow$

资本成本变化率　进口原材料变化率

$\dot{W}_t$ 与 $\dot{P}_t$ 互相相关。很可能u_{1t}与解释变量相关。

如 GDP 的变化包含在u_{1t}。↓ 当GDP ↓ W_t $\dot{P}_t$

4. IS 模型

$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{dt}$

$T_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t$

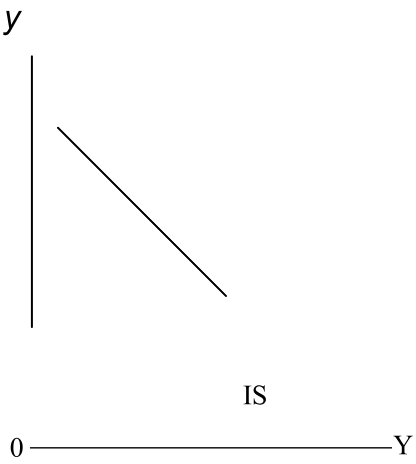
$I_t = y_0 + y_1 r_t$

定义：$Y_{dt}=Y_t-T_t$

$G_t = \overline{G}$ **（给定政府支出）**

$Y_t=C_t+I_t+G_t$

得到 IS 方程 ： $Y_t = \Pi_0 + \Pi_1 r_t$



$$\Pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0\beta_1 + \gamma_0 + \overline{G}}{1-\beta_1(1-\alpha_1)}$$

$$\Pi_1 = \frac{\gamma_1}{1-\beta_1(1-\alpha_1)}$$

$r_t \rightarrow Y \rightarrow Y_d \rightarrow c$ **和**G**及其它进入**Π_0 **的参数，这就说明：如果独立考虑**$C = \beta_0 + \beta_1 Y_d + u_i$ **则：**

β_0**和**β_1**的估计是有偏误且非一致性估计。**

例 5 LM 模型：

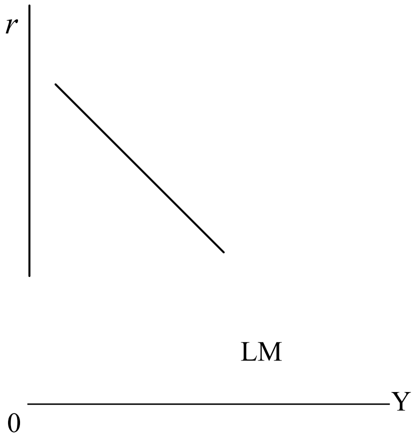
$$M_t^d = \alpha \underline{+ bY_t} - cr_t$$

$$M_t^s = M$$

$$M_t^s = M_t^d$$

得到 LM 方程：$Y_t = \lambda_0 + \lambda_1 \overline{M} + \lambda_2 r_t$

（其中：$\lambda_0 = -\frac{a}{b}$　　$\lambda_1 = \frac{1}{b}$　　$\lambda_2 = \frac{c}{d}$）



三．联立方程偏误：OLS 估计量的非一致性

设：

$$c_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$E(u_t) = 0$，　$E(u_t^2) = \sigma^2$　　$E(u_t u_{t+j}) = 0$

$$\operatorname{cov}(I_t, u_t) = 0$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + I_t + u_t$$

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} u_t$$

$$E(Y_t) = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t$$

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1-\beta_1}$$

$$COV(Y_t, u_t) = E\left[Y_t - E\left(Y_t\right)\right]\left[u_t - E\left(u_t\right)\right]$$

$$= E\left(\frac{u_t^2}{1-\beta_1}\right) = \frac{\sigma^2}{1-\beta_1}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(\beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t)\, y_t}{\sum y_t^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2}$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + E(\frac{\sum u_t y_t}{\sum y_t^2})$$

$$= \beta_1 + \frac{1}{1-\beta_1} \bullet \frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2}$$

一个数值性的例子(P686)

给定:I_t和 u_t**,** $\beta_0 = 2$、$\beta_1 = 0.8$**，根据** $Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} u_t$

可以生成 Y_t **,再来验证无偏性。**

四、结构模型

设:

$$\begin{cases} Y_{1t} = \beta_{12} Y_{2t} + \beta_{13} Y_{3t} + \ldots + \beta_{1M} Y_{Mt} + \gamma_{11} X_{1t} + \ldots \gamma_{1k} X_{kt} + u_{1t} \\ Y_{2t} = \beta_{21} Y_{1t} + \beta_{23} Y_{3t} + \ldots + \beta_{2M} Y_{Mt} + \gamma_{21} X_{1t} + \ldots + \gamma_{2k} X_{kt} + u_{2t} \end{cases}$$

$$Y_{Mt} = \beta_{M1} Y_{1t} + \ldots + \beta_{M3} Y_{3t} + \ldots + \beta_{MM} Y_{Mt} + \gamma_{M1} X_{1t} + \ldots + \gamma_{Mk} X_{kt} + u_{Mt}$$

其中：Y1t、Y2t……Y_{Mt} 为 M 个内生变量(endogenous)

X1t、X2t……Xkt 为 k 个前定变量：外生或滞后内生

上述模型为结构模型。

β、γ 为结构参数

从结构方程组可以解出 M 个内生变量并导出诱导型方程和相应的诱导型系数。（诱导型方程是指由前定变量或随机干扰来表达一个内生变量的方程。）

例如：

$$\pi_1 = \frac{1}{1-\beta_1}$$

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$W_{1t} = \frac{u_t}{1-\beta_1}$$

内生变量：C_t、Y_t

外生变量：I_t

推出如下

诱导型模型：

$$\pi_0 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}$$

$\Big\}$ $0<\beta_1<1$ 结构模

型

$$\begin{cases} Y_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + W_{1t} \\ C_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + W_{2t} \end{cases}$$

$$\pi_2 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}$$

$$\pi_3 = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}$$

$$W_{2t} = \frac{u_t}{1-\beta_1}$$

由于I_t与W_{1t}或W_{2t}不相关。因此可用 OLS 估计诱导模型系数，从诱导型系数反计算出结构系数。这种方法称为间接最小二乘法。——ILS(indirect least spuares)

五、识别问题

识别问题，是指能否从诱导型方程函数求出结构方程参数的估计值。如果能，则说该方程是可以识别的。如果不能，则说该方程是不可识别的或不足识别的。

1. 不足识别

如：在供求模型中，

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t} = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$$

$$\rightarrow P_t = \pi_0 + v_t \qquad Q_t = \pi_1 + w_t$$

$$\pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_1 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

因诱导型只有 2 个系数，而结构模型有 4 个系数，很难从诱导型系数得到结构系数的唯一值。

另一种方法：

用λ（$0\le\lambda\le 1$）去乘一个方程，同时用（$1-\lambda$）去乘另一个方程，得到如下：

$$\lambda Q_t = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_1 P_t + \lambda u_{1t}$$

（$1-\lambda$） $Q_t = (1-\lambda)\beta_0 + (1-\lambda)\beta_1 P_t + (1-\lambda)u_{2t}$ 两方程相加得

$$Q_t = V_0 + V_1 P + W_t$$

这个伪造的方程（线性组合）与前两个方程没有结构上的区别。因此无法知道是在估计哪一方程。

2 恰好识别

考虑如下模型（需求与供给）

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t}$$
$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$$

$$Q_t^s = Q_t^d$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$$

$$P_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + v_t$$

$$\pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$Q_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + W_t$$

$$\pi_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_3 = \frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad W_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$,

从 4 个诱导系数难以估计 5 个结构系数。但可以看出：

$$\beta_0 = \pi_2 - \beta_1\pi_0$$

$$\beta_1 = \frac{\pi_3}{\pi_1}$$

因此，从诱导型可以估计出供给函数，所以，供给方程是可识别的，而需求方程是不足识别的。

同样也可以用伪造法判定：需求模型是不可识别的。用λ乘以需求方程，(1−λ)乘以供给方程，加起来得到混杂方程。可见混杂方程与需求方程没有结构性区别。

考虑如下方程：

$$\begin{cases} Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} \\ Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t} \end{cases}$$

其诱导模型为: $\begin{cases} P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + \Pi_2 P_{t-1} + v_t \\ Q_t = \Pi_3 + \Pi_4 I_t + \Pi_5 P_{t-1} + W_t \end{cases}$

有 6 个诱导系数，正如有 6 个结构系数，一般可求得唯一解。因此结构模型都是可识别的。

同样可用“混合”模型办法予以解决。

3．过渡识别

考虑如下模型：

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + \alpha_3 R_t + u_{1t}$$
$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t}$$
$$Q_t^s = Q_t^d$$

Q ：需求或供给量，P_t，价格。I_t：收入，R_t：财富。

此模型的内生变量：Q_t，P_t

此模型的前定变量：I_t，R_t，P_{t-1}

诱导方程可估计出 8 个诱导系数。

结构方程只有 7 个结构系数，由 8 个方程求 7 个未知数，得出现一个变量多个解。因此难以求出 7 个结构系数的唯一值。如：

$\beta_1 = \dfrac{\Pi_6}{\Pi_2}$　　又有　　$\beta_1 = \dfrac{\Pi_5}{\Pi_1}$