考题猜想 3-2 与勾股定理有关的常见几何模型
（热考+压轴 必刷 50 题 13 种题型专项训练）

题型大集合

- 构造直角三角形
- 蚂蚁爬行模型
- 直角三角形翻折模型
- 【扩展】特殊四边形的翻折模型
- 构造直角三角形求代数式的最值
- 利用勾股定理解决将军饮马问题
- 勾股树模型
- 面积法求高
- 赵爽弦图
- 梯子模型
- 勾股差模型
- 垂美四边形
- 见特殊角，作垂线

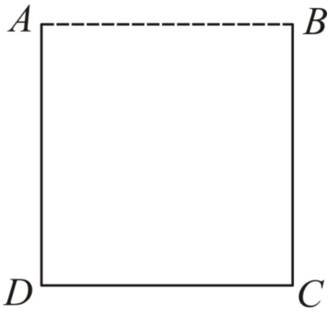
题型大通关

一．构造直角三角形（共 4 小题）

（23-24 八年级上·河南郑州·期中）

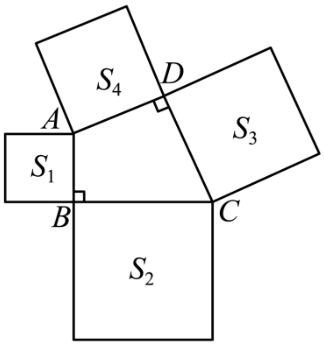
1．如图，某小区在相邻两楼之间修建了一个上方是以 AB 为直径的半圆，下方是长方形的仿古通道，其中 $AD=2.1$ 米，$CD=2$ 米，现有一辆装满家具的卡车高 2.5 米，宽1.6 米，请问

这辆送家具的卡车能否顺利通过这个通道？请说明你的理由．



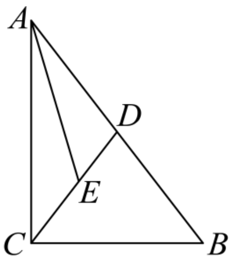
（2022 八年级·全国·专题练习）

2．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle CDA=90^{\circ}$，分别以四边形 $ABCD$ 的四条边为边长，向外作四个正方形，面积分别为 S_1，S_2，S_3 和 S_4．若 $S_1=4$，$S_2=16$，$S_3=12$，求 S_4 的值．



（22-23 八年级上·江苏泰州·阶段练习）

3．已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$CD=5$，$AC=8$，$BC=6$．



(1)判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2)点 E 在 CD 上，且 $AE=BC$，求证：$\angle AED=\angle B$．

（24-25 八年级上·山西运城·期中）

4．阅读与思考：

下面是小亮同学写的一篇数学日记，请仔细阅读，并完成相应任务．

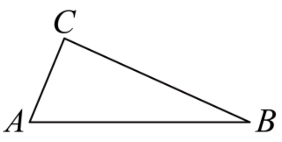
××年××月××日　　星期三

巧用方程解决三角形求高问题

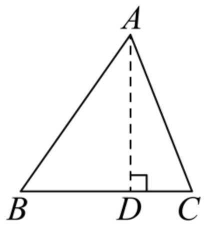
法国数学家笛卡尔在《指导思维的法则》一书中写道："一切问题都可以转化为数学问题，一切数学问题都可以转化为代数学问题，而一切代数学问题又都可以转化为方程问题". 可见方程思想对于数学学习的重要性.

今天数学课上，老师提出问题：在$\triangle ABC$中，已知边AB,AC,BC的长，求点A到BC边的距离.

小亮画出的图形如图①所示：在$\triangle ABC$中，已知：$AB=13,AC=5,BC=12$，小亮的同桌小明思索片刻就得出：点A到BC边的距离为5；

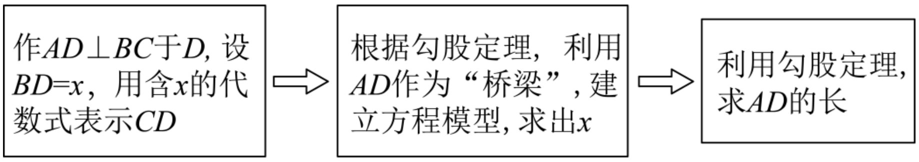


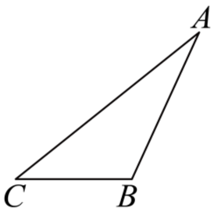
图①



图②

小明画出的图形如图②所示：在$\triangle ABC$中，已知：$AB=15,BC=14,AC=13$，经过小组讨论，大家得出了如下的解题思路：





图③

请你根据小亮的日记内容完成下列各题：

(1)写出小明得出图①中点A到BC距离为5的理由；

(2)根据小亮小组讨论的思路，写出图②中点A到BC的距离为_；

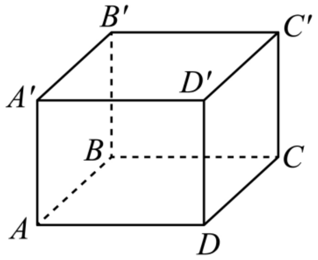
(3)根据（2）的解题思路解决下面的问题：如图③，某商场楼梯长$4\text{m}(AB=4\text{m})$，商场准备改善原有楼梯的安全性能，将楼梯长度加长2m，调整后的楼梯如图AC所示，占地面的长度增加了$3\text{m}(BC=3\text{m})$，求此楼梯的高度.

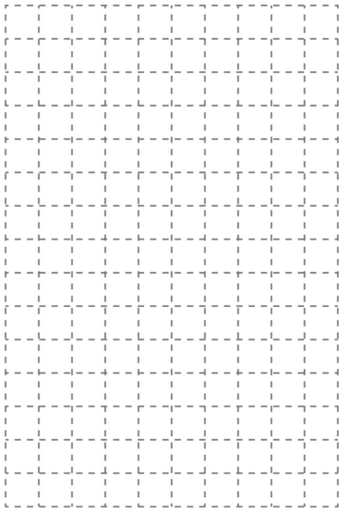
二．蚂蚁爬行模型（共5小题）

（23-24八年级上·广东佛山·期中）

5．如图，长方体$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB=BB'=2$，$AD=3$，一只蚂蚁从A点出发，沿长

方体表面爬到C'点．





(1)请你在所给的网格中，画出蚂蚁爬行的所有不同的直线路径；

(2)分别求出这几种路径的距离；

(3)求蚂蚁爬行的最短路程是多少？

（24-25八年级上·广东佛山·期中）

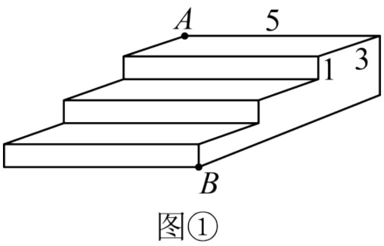
6．综合与实践

【问题情境】

数学综合与实践活动课上，老师提出如下问题：一个三级台阶，它每一级的长、宽、高分别为5、3、1，A和B是一个台阶两个相对的端点．

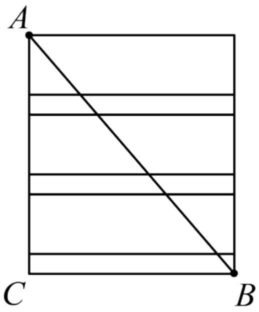
【探究实践】

老师让同学们探究：如图①，若A点处有一只蚂蚁要到B点去吃可口的食物，那么蚂蚁沿着台阶爬到B点的最短路程是多少？



图①

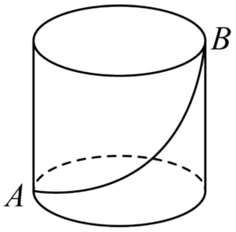
（1）同学们经过思考得到如下解题方法：如图②，将三级台阶展开成平面图形，连接 AB，经过计算得到 AB 长度即为最短路程，则 $AB=$_；（直接写出答案）



图②

【变式探究】

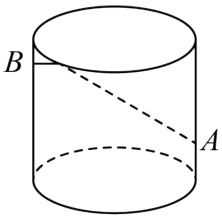
（2）如图③，一只圆柱体玻璃杯，若该玻璃杯的底面周长是48厘米，高是7厘米，一只蚂蚁从点A出发沿着玻璃杯的侧面到点 B，求该蚂蚁爬行的最短路程是多少厘米？



图③

【拓展应用】

（3）如图④，若圆柱体玻璃杯的高10厘米，底面周长为24厘米，在杯内壁离杯底2厘米的点A处有一滴蜂蜜．此时，一只蚂蚁正好在外壁，离杯上沿1厘米，且与蜂蜜相对的点 B 处，则蚂蚁从外壁 B 处到内壁A处所爬行的最短路程是多少厘米？（杯壁厚度不计）



图④

（23-24七年级上·山东威海·期中）

7．一只蚂蚁在立方体的表面积爬行．

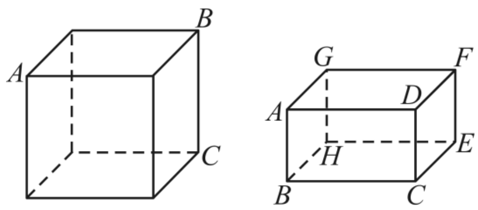


图1　　　　图2

(1)如图 1，当蚂蚁从正方体的一个顶点 A 沿表面爬行到顶点 B，怎样爬行路线最短？说出你的理由.

(2)如图 1，如果蚂蚁要从边长为1cm的正方体的顶点 A 沿最短路线爬行到顶点 C，那么爬行的最短距离 d 的长度应是下面选项中的 ____

（A）1cm（B）2cm （C）3cm （D）$1\text{cm}<d<3\text{cm}$

这样的最短路径有 ____条.

(3)如果将正方体换成长 $AD=3\text{cm}$，宽 $DF=3\text{cm}$，高 $AB=1\text{cm}$ 的长方体（如图 2 所示），蚂蚁仍需从顶点 A 沿表面爬行到顶点 E 的位置，请你说明这只蚂蚁沿怎样路线爬行距离最短？为什么？（可通过画图来说明）

（24-25 八年级上·广东深圳·期中）

8.【项目式学习】在圆柱表面，蚂蚁怎么爬行路径最短？ （π取3）

素材1：如图1，圆柱体的高 AC 为12cm，底面直径 BC 为6cm，在圆柱下底圆周上的A 点有一只蚂蚁，它想吃到上底面圆周上与A 点对应的 B 点处的食物.

若蚂蚁沿图1中的折线 $A\to C\to B$ 爬行的最短路径记为“路线一”，此时最短路程是 $12+6=18\text{cm}$． 将圆柱沿着 AC 将侧面展开得到图2，请在图2中画出蚂蚁爬行的最短路径记为“路线二”，此时最短路程是_ cm； 比较可知：蚂蚁爬行的最短路径是路线_（用“一”或“二”填空）.

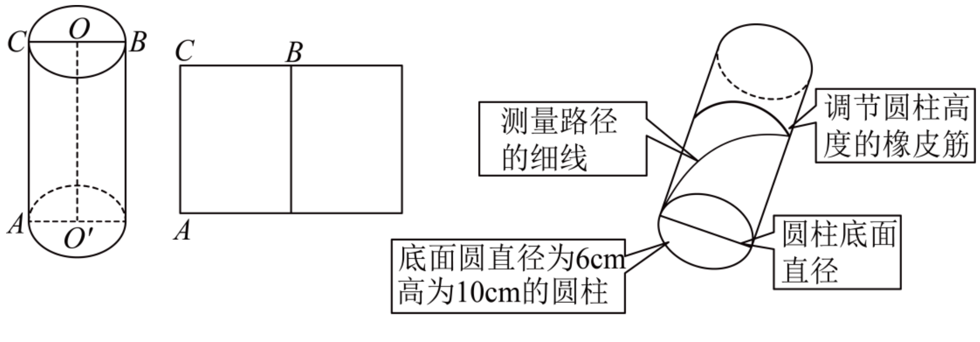


图1　　　　图2　　　　图3

素材2：如图3所示的实践活动器材包括：底面直径为6cm，高为10cm的圆柱、橡皮筋、细线（借助细线来反映爬行的路线）、直尺，通过调节橡皮筋的位置达到改变圆柱的高度的目

的．

（1） 两种路线路程的长度如表所示（单位：cm）：

圆柱高度	沿路线一路程 x	沿路线二路程 y	比较 x 与 y 的大小
5	11	$\sqrt{106}$	$x>y$
4	10	$\sqrt{97}$	$x>y$
3	a	$3\sqrt{10}$	b

（2） 填空：表格中 a 的值是_；表格中 b 表示的大小关系是_；

（3） 经历上述探究后，请你思考：若圆柱的半径为 r，圆柱的高为 h． 在 r 不变的情况下，当圆柱半径为 r 与圆柱的高度 h 存在怎样的数量关系时，蚂蚁在圆柱表面的两种爬行路线的路程相等？

（24-25 八年级上·广东深圳·阶段练习）

9．如图，已知圆柱底面的周长为 12，圆柱的高为 8，在圆柱的侧面上，过点 A，C 嵌有一圈长度最短的金属丝．

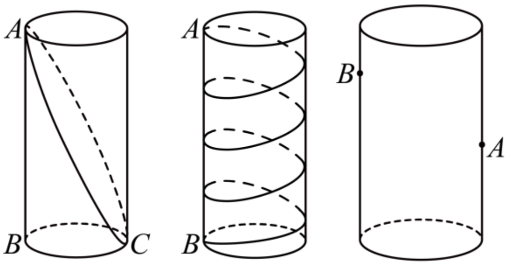
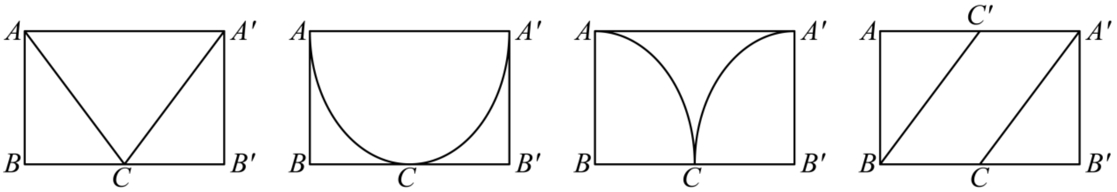


图1　　图2　　图3

(1)现将圆柱侧面沿 AB 剪开，所得的圆柱侧面展开图是______．



A　　B　　C　　D

(2)如图①，求该长度最短的金属丝的长．

(3)如图②，若将金属丝从点 B 绕四圈到达点 A，则所需金属丝最短长度是多少？

(4)如图③，圆柱形玻璃杯的高9cm，底面周长为16cm，在杯内壁离杯底4cm的点A处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在外壁上，离杯上沿1cm，且与蜂蜜相对的点B处，则蚂蚁从外壁B处到内壁A处所爬行的最短路程是多少？（杯壁厚度不计）

三．直角三角形翻折模型（共4小题）

（24-25八年级上·山西晋中·期中）

10．在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，D，E分别是斜边AB和直角边CB上的点，把$\triangle ABC$沿着直线DE折叠，顶点B的对应点是B'．

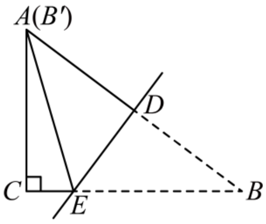


图1

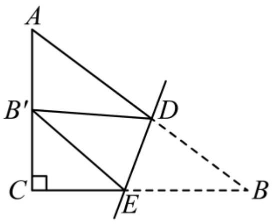


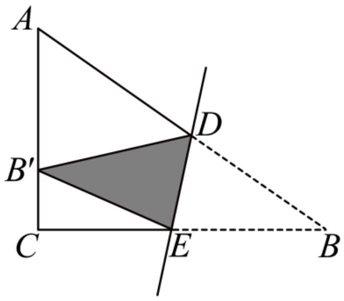
图2

(1)如图1，如果点B'和顶点A重合，求CE的长．

(2)如图2，如果点B'落在AC的中点上，求CE的长．

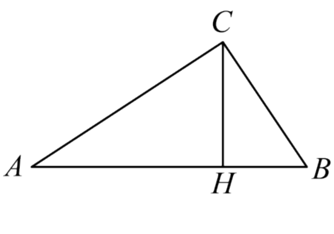
（20-21八年级下·福建南平·阶段练习）

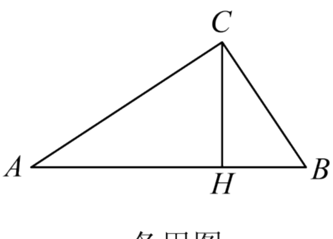
11．在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，将$\triangle BDE$沿直线DE折叠，使B落在AC的三等分点B'处，求CE的长．



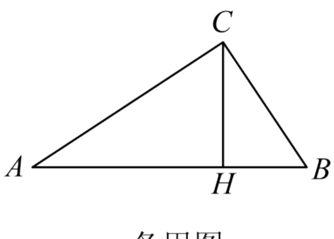
（24-25八年级上·江苏南京·期中）

12．如图，在$\triangle ABC$中，点H为AB边上的一点，$AH=15$，$CH=8$，$AC=17$，$BH=6$．





备用图



备用图

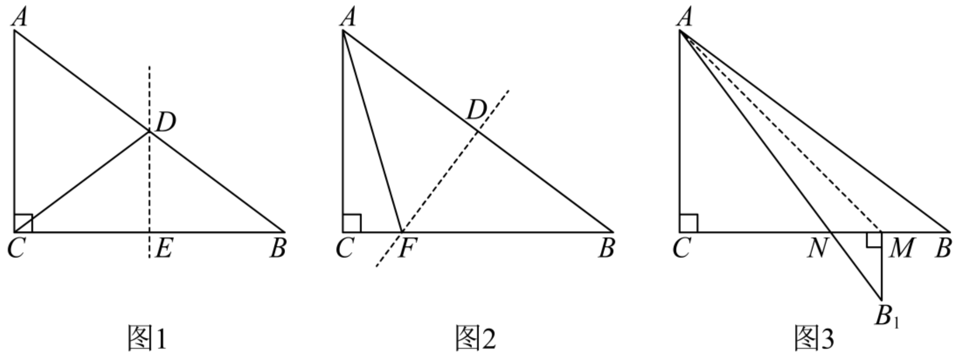
(1)求BC的长；

(2)已知点 E 为线段 AB 上一点，$\triangle BCE$ 为等腰三角形，求线段 HE 的长度；

(3)点 P 是直线 AB 上任意一点，把 $\triangle ACH$ 沿着直线 CP 翻折，直接写出当 AP 为何值时，点 H 翻折后的对应点 H' 恰好落在直线 AC 上．

（24-25 八年级上·福建三明·期中）

13．在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$．



(1)如图 1，把$\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 C 重合，折痕交 AB 于点 D，交 BC 于点 E．求证：D 是 AB 的中点；

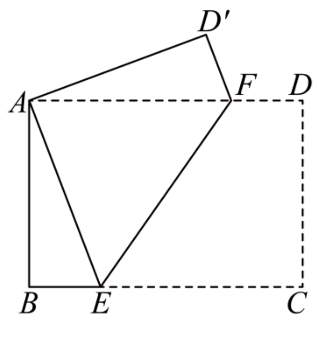
(2)如图 2，把$\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 A 重合，折痕交 AB 于点 D，交 BC 于点 F．求 BF 的长；

(3)如图 3，M 为 BC 边上一点，$\triangle ABM$ 沿着 AM 折叠，得到$\triangle AB_1M$，边 AB_1 交 BC 于点 N，若 $\angle B_1MN=90°$，求 BM 的长．

四．【扩展】特殊四边形的翻折模型（共 4 小题）

（24-25 八年级上·江苏常州·期中）

14．如图，将长方形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 C 与点 A 重合，点 D 落在点 D' 处，折痕为 EF．



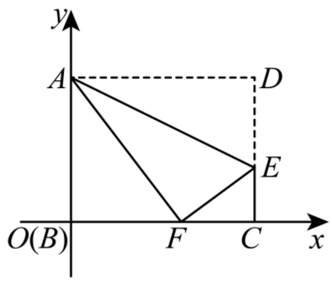
(1)求证：$\triangle ABE \cong \triangle AD'F$；

(2)若 $AB=4\text{cm}$，$EF=5\text{cm}$，求 BC 的长．

（24-25 八年级上·江西景德镇·期中）

15．如图，在平面直角坐标系中，将长方形 $ABCD$ 沿直线 AE 折叠（点 E 在边 DC 上），折

叠后顶点 D 恰好落在边 OC 上的点 F 处，若点 D 的坐标为 $(10,8)$．

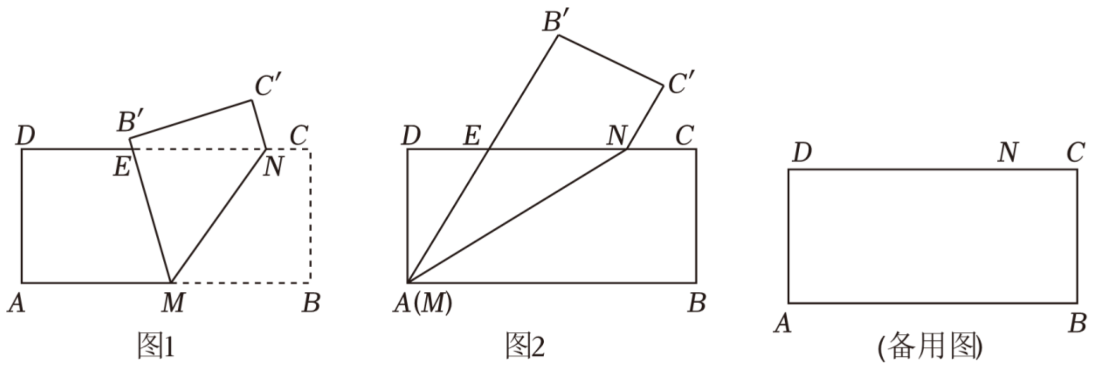


(1)写出点 F 的坐标．

(2)求 EF 的长．

（24-25 八年级上·江苏淮安·期中）

16．如图，在长方形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle B=\angle C=\angle D=90^{\circ}$，$AB=CD=10$，$AD=BC=4$，$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$．$N$ 是边 CD 上一点，$CN=2$．若 M 为 AB 边上一个动点，将四边形 $BCNM$ 沿 MN 折叠，点 B、C 的对应点分别为点 B'、C'，若线段 MB' 与边 CD 交于点 E．



(1)如图 1，证明：$\triangle EMN$ 为等腰三角形；

(2)如图 2，当点 M 与点 A 重合时，求线段 DE 的长；

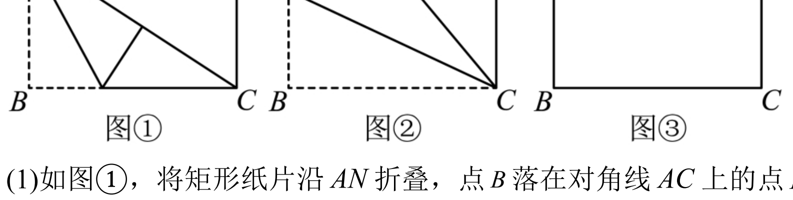
(3)点 M 从点 A 向点 B 运动的过程中，

①线段 DE 的最大值为 _；

②请直接写出点 E 运动的路径长为_．

（24-25 八年级上·四川成都·期中）

17．在矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=12$，$BC=16$．



(1)如图①，将矩形纸片沿 AN 折叠，点 B 落在对角线 AC 上的点 E 处，求 BN 的长：

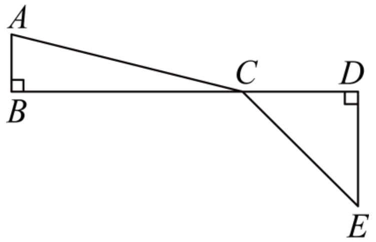
(2)如图②，点M为AB上一点，将$\triangle BCM$沿CM翻折至$\triangle ECM$，ME与AD相交于点G，CE与AD相交于点F、且$MG=GF$，求BM的长；

(3)如图③，将矩形纸片$ABCD$折叠，使顶点B落在AD边上的点E处，折痕所在直线同时经过AB、BC(包括端点)，请直接写出DE的最大值和最小值．

五．构造直角三角形求代数式的最值（共4小题）

（21-22八年级下·广西桂林·期中）

18．如图，C为线段BD上一动点，分别过点B，D作$AB\perp BD$，$ED\perp BD$，连接AC，EC．已知$AB=2$，$DE=4$，$BD=12$，$CD=x$．



(1)求当x等于何值时，$AC=CE$？

(2)当$x=4$时，求$AC+CE$的长．

(3)利用图形求代数式$\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2-24x+148}$的最小值．

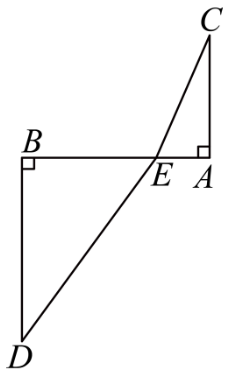
（2024八年级上·全国·专题练习）

19．[探究]

已知a，b均为正实数，且$a+b=3$，求$\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+9}$的最小值，通过分析，小文想到了构造图形解决此问题：如图，$AB=3,AC=2,BD=3,AC\perp AB,BD\perp AB$，且$C,D$两点在直线$AB$的异侧．点$E$是线段$AB$上的动点，且不与端点重合，连接$CE,DE$，设$AE=a,BE=b$．

①用含a的代数式表示$CE=$_______，用含b的代数式表示$DE=$________；

②据此求出$\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+9}$的最小值；



（23-24 八年级上·福建泉州·期末）

20．我们知道，数形结合是解决数学问题的重要思想方法．

【知识应用】

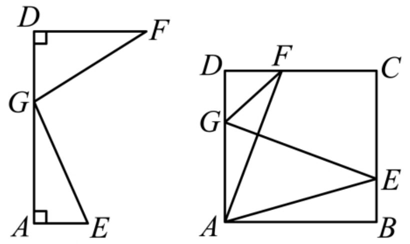


图1　　　　图2

如图 1，点 G 为线段 AD 上的一点，分别过点 A、D 作 $AE \perp AD$ 于 A，$DF \perp AD$ 于 D，连结 GF、GE．

（1）若 $AE=1$，$DF=5$，$AD=8$，设 $AG=x$，用含 x 的代数式表示 $GE+GF$ 的长；

（2）参照（1）的思想方法，构图求代数式 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(12-x)^2+9}$ 的最小值．

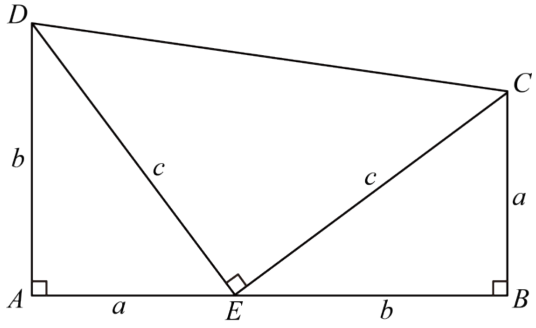
【能力迁移】

（3）如图 2，正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 边上，点 G 在 AD 边上，且 $AF \perp EG$．已知 $DF=3, AB=8$，求 $AE+FG$ 的最小值．

（24-25 八年级上·江苏淮安·期中）

21．勾股定理具有丰富的文化内涵，它揭示了直角三角形的三边关系，搭建起几何与代数之间的桥梁，为解决几何问题拓宽了思路．请完成下面问题：

(1)如图，请你用两种不同方法表示梯形 $ABCD$ 的面积，从而验证勾股定理．



(2)如图，在直线l的同侧有两个点C、D，已知点C和点D到直线l的距离分别为2和5，且$CD=\sqrt{73}$．现要在直线l上取点P，使得$PD+PC$的值最小．

①请用无刻度直尺和圆规在图2中确定点P的位置（要求：尺规作图，保留作图痕迹，不写作法）

②直接写出$PC+PD$的最小值为________；

(3)借助上面的思考过程，直接写出$\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(5-x)^2+1}$的最小值为_______．

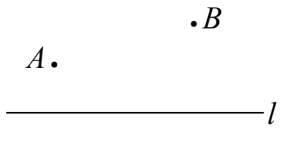
（24-25八年级上·陕西安康·阶段练习）

22．阅读并回答下列问题

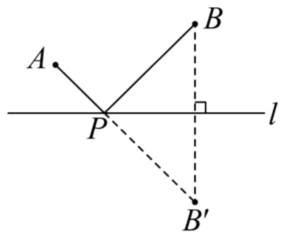
【几何模型】

如图①，A、B是直线l同侧的两个定点，问题：在直线l上找一点P，使$PA+PB$值最小．

方法：如图②，作B点关于l的对称点B'，连接AB'交l于P点，则P为所求作的点．



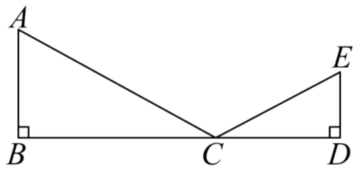
图①



图②

【模型应用】

如图③，若A、E两点在直线l同侧，分别过点A、E作$AB\perp BD$，$ED\perp BD$，C为线段BD上一动点，连接AC、EC．已知$AB=5$，$DE=3$，$BD=15$，设$CD=x$．



图③

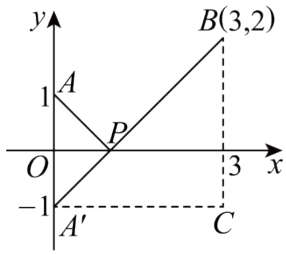
（1）用含x的代数式表示$AC+CE$的长为______.

（2）①请问点C满足什么条件时，$AC+CE$的值最小，并求出最小值；

②根据①中的规律和结论，直接写出代数式$\sqrt{x^2+36}+\sqrt{(12-x)^2+9}$的最小值为______.

【拓展应用】

由$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+4}=\sqrt{(x-0)^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+2^2}$可得代数式的几何意义：如图，建立平面直角坐标系，点$P(x,0)$是x轴上一点，则$\sqrt{(x-0)^2+1}$可以看成点P与点$A(0,1)$的距离，$\sqrt{(x-3)^2+2^2}$可以看成点P与点$B(3,2)$的距离，所以原代数式的值可以看成线段PA与PB长度之和，它的最小值就是$PA+PB$的最小值.

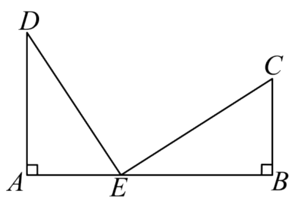


（3）求代数式$\sqrt{(x+1)^2+9}+\sqrt{(4-x)^2+1}$的最小值.

六．利用勾股定理解决将军饮马问题（共4小题）

（23-24八年级下·广西南宁·期中）

23．2024年“广西三月三·八桂嘉年华”文化旅游品牌活动在南宁青秀山风景区拉开帷幕．大家身着民族服饰共赴一场民俗文化盛宴．如图，在地图上A、B两站直线距离为25km，C、D为青秀山和园博园民俗文化活动场地，且$DA\perp AB$于A，$CB\perp AB$于B．已知$DA=15\text{km}$，$CB=10\text{km}$，现在小明要在直线AB上找到地点E，使得：



(1)若要使得 C、D 两活动点到地点 E 的距离相等，则小明所在的 E 站应在离 A 站多少 km 处？

(2)若要使得地点 E 到 C、D 两地的距离之和最短，则小明所在的 E 站应在离 A 站多少 km 处？并求出 $DE+CE$ 的最短距离．

（24-25 八年级上·江苏常州·期中）

24．（1）如图 1，正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别是 BC 、CD 的中点，连接 AE 、BF ．交于点 P．请直接写出线段 AE 与 BF 之间的关系；

（2）如图 2，在（1）的条件下，连接 PC ，试说明 PC 平分 $\angle EPF$ ；

（3）如图 3，若点 E、F 分别是 BC 、CD 上的动点，且 $AB=1$，$BE=DF$ ，请直接写出 $AE+BF$ 的最小值．

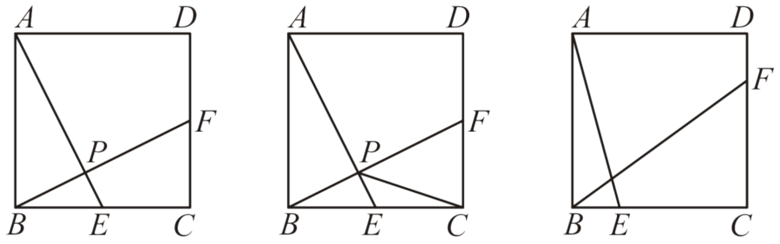
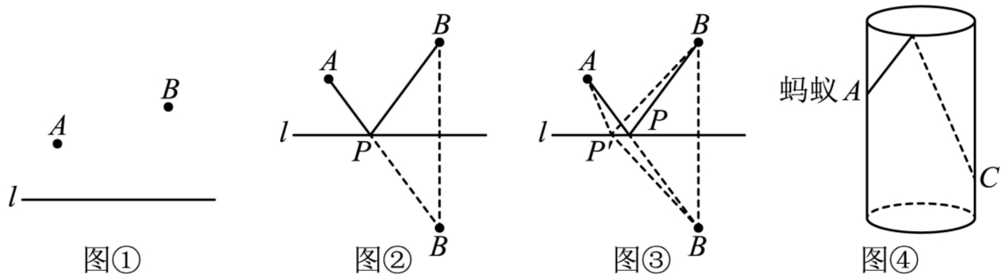


图1　　图2　　图3

（23-24 八年级上·山西晋中·阶段练习）

25．“最短路径问题”是数学中一类具有挑战性的问题．其实，数学史上也有不少相关的故事．如下即为其中较为经典的一则：古希腊有一位久负盛名的学者，名叫海伦．他精通数学，物理，聪慧过人．有一天，一位将军向他请教一个问题：如图①，将军从 A 地骑马出发，要到河边让马饮水，然后再回到 B 地的马棚，为使马走的路程最短，应该让马在什么地方饮水？



图①　　图②　　图③　　图④

大数学家海伦曾用轴对称的方法巧妙地解决了这个问题．

如图②，作点 B 关于直线 l 的对称点 B' ，连接 AB' 与直线 l 交于点 P，连接 PB ，则 $AP+BP$

的和最小.

请你在下列的阅读、理解、应用的过程中，完成解答.

理由：如图③，在直线l上另取任一点P'，连接AP'，BP'，$B'P'$，

∵直线l是点B，B'的对称轴，点P，P'在l上，

∴$PB=$______，$P'B=$______，（依据______）

∴$AP+PB=AP+PB'=$______.

在$\triangle AP'B'$中，∵$AB'<AP'+P'B'$，（依据______），

∴$AP+PB<AP+P'B'$，即$AP+PB$最小.

【归纳总结】

在解决上述问题的过程中，我们利用轴对称变换，把点A，B在直线同侧的问题转化为在直线的两侧，从而可利用“两点之间线段最短”，即转化为“三角形两边之和大于第三边”的问题加以解决（其中点P为AB'与l的交点，即A，P，B'三点共线）.

由此，可拓展为“求定直线上一动点与直线同侧两定点的距离和的最小值”问题的数学模型.

【模型应用】

如图④，圆柱形玻璃杯，高为14cm，底面周长为16cm．在杯内离杯底3cm的点C处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在外壁，离杯上沿4cm与蜂蜜相对的点A处，则蚂蚁到达蜂蜜的最短路程为______cm.

（24-25八年级上·广东茂名·阶段练习）

26．如图1，A村和B村在一条大河CD的同侧，它们到河岸的距离AC、BD分别为1千米和4千米，又知道CD的长为4千米.

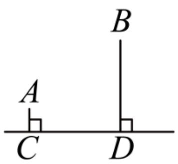


图1

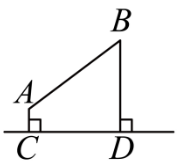


图2

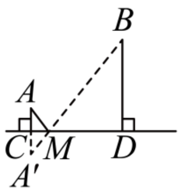


图3

现要在河岸CD上建一水厂向两村输送自来水．有两种方案备选

方案1：水厂建在C点，修自来水管道到A村，再到B村（即$AC+AB$）.（如图2）

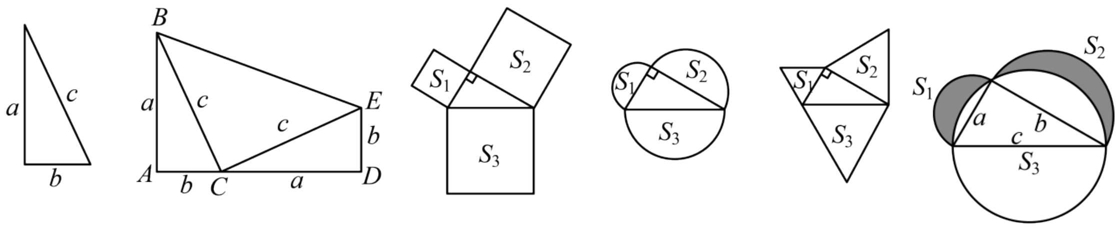
方案2：作A点关于直线CD的对称点A'，连接$A'B$交CD于M点，水厂建在M点处，分别向两村修管道AM和BM．（即$AM+BM$）（如图3）

从节约建设资金方面考虑，将选择管道总长度较短的方案进行施工，请利用已有条件分别进行计算，判断哪种方案更合适.

七．勾股树模型（共 4 小题）

（22-23 八年级下·湖南永州·阶段练习）

27．如图②，它可以看作是由边长为 a、b、c 的两个直角三角形（如图①c 为斜边）拼成的，其中 A、C、D 三点在同一条直线上，



① ② ③ ④ ⑤ ⑥

(1)请从面积出发写出一个表示 a、b、c 的关系的等式；（要求写出过程）

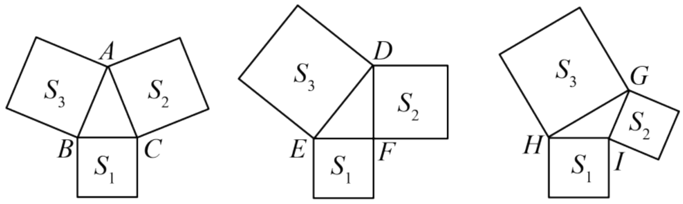
(2)如图③④⑤，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，这三个图形中面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$ 的有_个．（不需证明）

(3)如图⑥所示，分别以直角三角形三边为直径作半圆，设图中两个月形图案（图中阴影部分）的面积分别为 S_1、S_2，直角三角形面积为 S_3，请判断 S_1、S_2、S_3 的关系，并说明理由．

（23-24 八年级上·浙江温州·期中）

28．

项目背景	我校八年级数学兴趣小组成员自主开展数学微项目研究，结合本阶段学习内容知识点，他们对“勾股树”产生了浓厚的兴趣．
素材一	毕达哥拉斯树，也叫“勾股树”．是由毕达哥拉斯根据勾股定理画出来的一个可以无限重复的树形图形，因为重复数次后的形状好似一棵树，被称为毕达哥拉斯树． 
素材	经过小组讨论，制定了如下规则：1．画出不同类型三角形形成的树形图；2．所画的基础三角形周长为 8cm，其中一条边长固定为 2cm，根据规则，三位同学分别画

<table>
<tr><td>二</td><td>出了不同类型的树形图并进行探究．</td></tr>
<tr><td>素材三</td><td>

类型①　类型②　类型③</td></tr>
<tr><td colspan="2">解决问题</td></tr>
<tr><td>任务一</td><td>小明画出了锐角$\triangle ABC$，$AB=AC$，$BC=2$，则$\frac{S_3}{S_1}=$______．</td></tr>
<tr><td>任务二</td><td>小金画出了直角$\triangle DEF$，$\angle DFE=90^\circ$，$EF=2$，计算S_2+S_3的值，并写出过程．</td></tr>
<tr><td>任务三</td><td>小山画出了钝角$\triangle GHI$，$\angle GIH=120^\circ$，$HI=2$，则$S_2+S_3=$______．</td></tr>
<tr><td colspan="2">项目总结</td></tr>
<tr><td colspan="2">综合以上三位同学的图形以及计算结果，小组成员大胆猜想结论：周长一定的情况下，由______三角形形成的$\left(S_3+S_2+S_1\right)$总面积最大．（填锐角、直角或钝角）．这个猜想，聪明的同学你会证明吗．</td></tr>
</table>

（23-24八年级上·山西运城·期中）

29．综合与实践

勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．如图2，直角三角形的两条直角边分别为a，b，斜边为c．

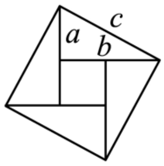


图1

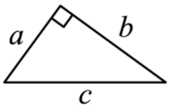


图2

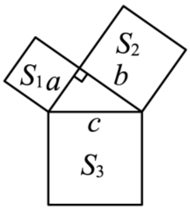


图3

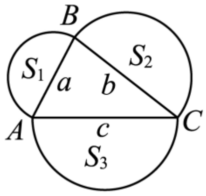


图4

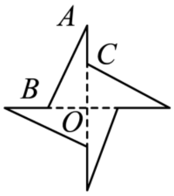


图5

(1)如图 3，以直角三角形的三边 a，b，c 为边，分别向外部作正方形，直接写出 S_1，S_2，S_3 满足的关系：_.

(2)如图 4，以 Rt△ABC 的三边为直径，分别向外部作半圆，请判断 S_1，S_2，S_3 的关系并证明.

(3)如图 5，将这四个直角三角形紧密地拼接，形成飞镖状，已知外围轮廓（实线）的周长为 80，$OC=5$，直接写出该飞镖状图案的面积.

（22-23 八年级下·江西南昌·期中）

30．勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．

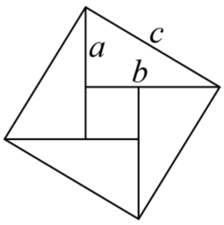


图1

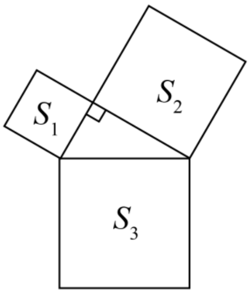


图2

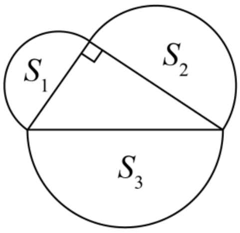


图3

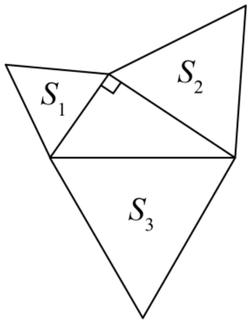


图4

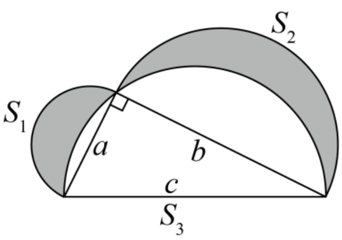


图5

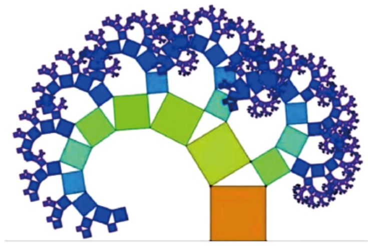


图6

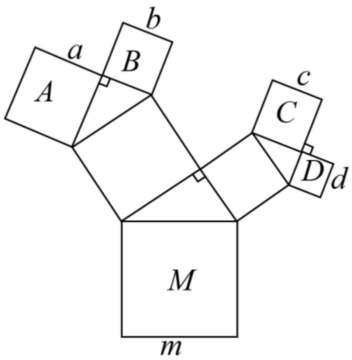


图7

(1)①如图 2，3，4，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，面积分别为 S_1，S_2，S_3，利用勾股定理，判断这 3 个图形中面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$

的有________个．

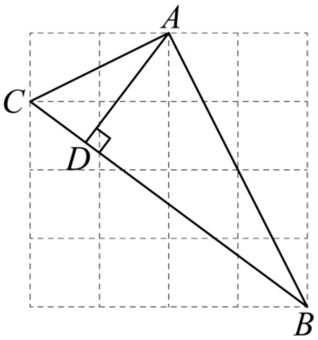
②如图5，分别以直角三角形三边为直径作半圆，设图中两个月牙形图案（图中阴影部分）的面积分别为S_1，S_2，直角三角形面积为S_3，也满足$S_1+S_2=S_3$吗？若满足，请证明；若不满足，请求出S_1，S_2，S_3的数量关系．

(2)如果以正方形一边为斜边向外作直角三角形，再以该直角三角形的两直角边分别向外作正方形，重复这一过程就可以得到如图6所示的"勾股树"．在如图7所示的"勾股树"的某部分图形中，设大正方形M的边长为定值m，四个小正方形A，B，C，D的边长分别为a，b，c，d，则$a^2+b^2+c^2+d^2=$__________．

八．面积法求高（共3小题）

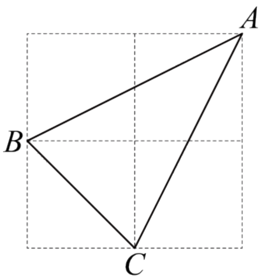
（23-24八年级下·全国·期末）

31．如图是由边长为1的小正方形组成的网格，$\triangle ABC$的顶点A，B，C均在格点上．若$AD\perp BC$于点D，则线段AD的长为_____



（23-24八年级下·云南楚雄·期末）

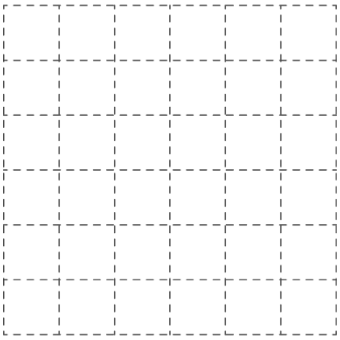
32．如图在2×2的方格中，小正方形的边长均为1，点A，B，C都在格点（网格线的交点）上，则边AC上的高为_______．



（24-25八年级上·陕西西安·期中）

33．已知在正方形网格（每个小正方形的边长均为1）中，格点$\triangle ABC$（即$\triangle ABC$的三个顶

点都在小正方形的顶点处）的三条边 AB ， AC ， BC 的长分别为 $\sqrt{5}$ ， $2\sqrt{2}$ ， $\sqrt{17}$.



(1)在网格中画出 $\triangle ABC$.

(2)求边 AC 上的高.

九．赵爽弦图（共 4 小题）

（24-25 八年级上·浙江·期中）

34．勾股定理的证明方法多种多样，我国古代数学家赵爽构造“弦图”证明了勾股定理，后人称其为“赵爽弦图”．“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形拼成．

如图 1 为赵爽弦图，其中 $\angle AGB = \angle DFA = \angle CED = \angle BHC = 90^\circ$ ，连接 AE 交 BG 于点 P ，连接 BE ，得到图 2，若 $\angle ABE = \angle AEB$.

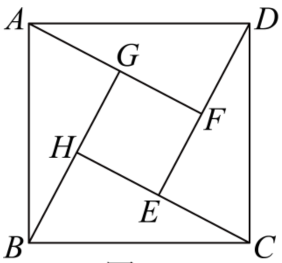


图1

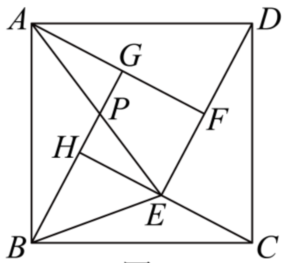


图2

(1)求证： $EF = DF$ ；

(2)若 $EF = 2$ ，求 PE 的长．

（22-23 八年级下·山东潍坊·期中）

35．阅读材料，解决问题：

三国时期吴国的数学家赵爽创建了一幅“弦图”，利用面积法给出了勾股定理的证明．实际上，该“弦图”与完全平方公式有着密切的关系．如图 1，这是由 8 个全等的直角边长分别为 a ， b ，斜边长为 c 的三角形拼成的“弦图”．

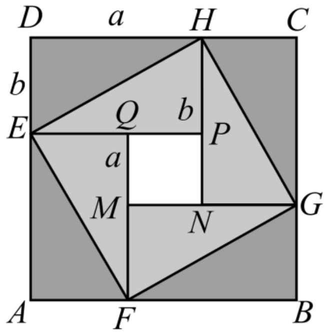


图1

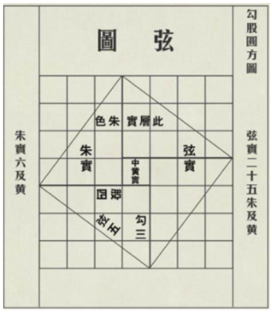
(1)在图 1 中，正方形 $ABCD$ 的面积可表示为______，正方形 $PQMN$ 的面积可表示为______（用含 a，b 的式子表示）；

(2)请结合图 1 用面积法说明 $\left(a+b\right)^{2}$，ab，$\left(a-b\right)^{2}$ 三者之间的等量关系；

(3)已知 $a+b=7$，$ab=5$，求正方形 $EFGH$ 的面积．

（23-24 八年级下·辽宁葫芦岛·阶段练习）

36．中国数学史上最先完成勾股定理证明的数学家是公元 3 世纪三国时期的赵爽，他为了证明勾股定理，创制了一副“弦图”，后人称其为“赵爽弦图”（如图 1）．图 2 由弦图变化得到，它是由八个全等的直角三角形拼接而成，图中正方形 $MNKT$ 的边长为 2，正方形 $ABCD$ 的边长为 10，求正方形 $EFGH$ 的边长．



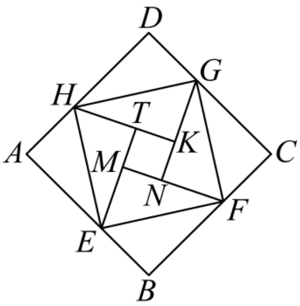
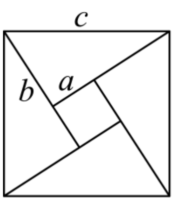
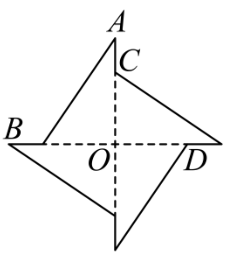


图1　　图2

（23-24 八年级下·安徽阜阳·期中）

37．如图①，美丽的弦图，蕴含着四个全等的直角三角形．





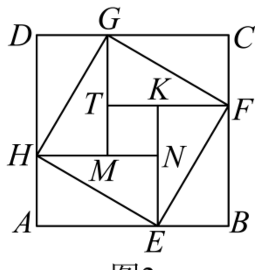


图1　　图2　　图3

(1)弦图中包含了一大，一小两个正方形，已知每个直角三角形较长的直角边为 a．较短的直角边为 b，斜边长为 c，结合图①，试验证勾股定理；

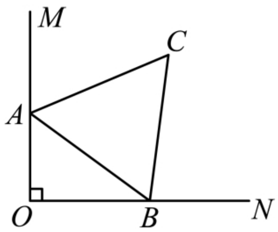
(2)如图②，将这四个直角三角形紧密地拼接，形成飞镖状，已知外围轮廓线的周长为24，$OC=3$，求该飞镖状图案的面积；

(3)如图③，将八个全等的直角三角形紧密地拼接，记图中正方形 $ABCD$，正方形 $EFGH$，正方形 $MNKT$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，若 $S_1+S_2+S_3=30$，求 S_2．

一十．梯子模型（共4小题）

（2024八年级上·全国·专题练习）

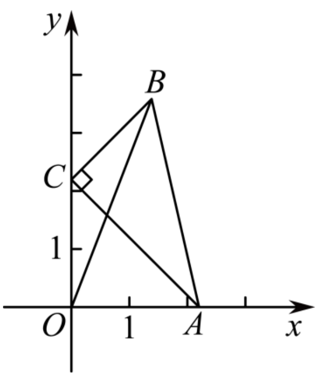
38．如图，$\angle MON=90°$，已知$\triangle ABC$中，$AC=BC=10$，$AB=12$，$\triangle ABC$的顶点A、B分别在边OM、ON上，当点B在边ON上运动时，点A随之在边OM上运动，$\triangle ABC$的形状保持不变，在运动过程中，点C到点O的最大距离为（　　）



A．12.5　　B．13　　C．14　　D．15

（20-21八年级下·贵州安顺·期末）

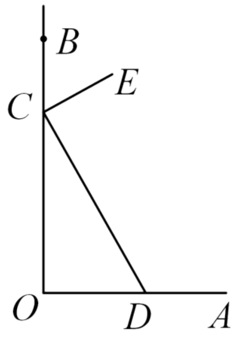
39．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°, AC=4, BC=2$，点A、C分别在x轴、y轴上，当点A在x轴上运动时，点C随之在y轴上运动，在运动过程中，点B到原点的最大距离是（　　）



A．$2\sqrt{2}+2$　　B．$2\sqrt{6}+2$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{6}-2$

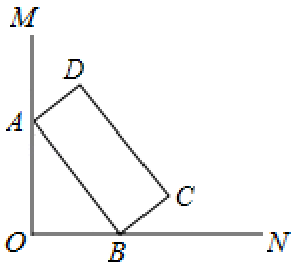
（21-22八年级上·江苏盐城·期中）

40．如图，射线 OA⊥射线 OB 于点 O，线段 CD=6，CE=4，且 CE⊥CD 于点 C，当线段 CD 的两个端点分别在射线 OB 和射线 OA 上滑动时，点 E 到点 O 的最大距离为________



（2021八年级上·全国·专题练习）

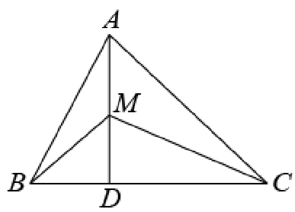
41．如图，$\angle MON=90°$，矩形$ABCD$的顶点A、B分别在边OM，ON上，当B在边ON上运动时，A随之在边OM上运动，矩形$ABCD$的形状保持不变，其中$AB=2$，$BC=1$，求运动过程中，点D到点O的最大距离．



一十一．勾股差模型（共2小题）

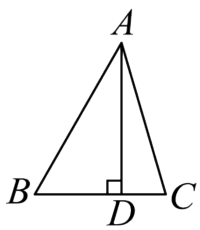
（21-22八年级上·辽宁朝阳·期中）

42．如图，在△ABC中，$AB=10$，$AC=13$，$AD\perp BC$，垂足为D，M为AD上任一点，则MC^2-MB^2等于____．



（23-24八年级下·安徽蚌埠·期中）

43．如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$．



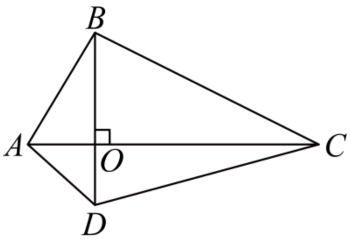
(1)求证：$AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$；

(2)当 $AB=8$，$BC=6$，$AC=2\sqrt{13}$ 时，求 AD 的值．

一十二．垂美四边形（共 3 小题）

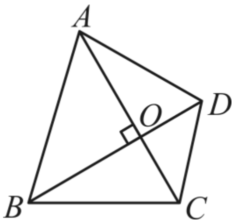
（23-24 八年级下·河南郑州·期中）

44．对角线互相垂直的四边形叫做“垂美”四边形，现有如图所示的“垂美”四边形 $ABCD$，对角线 AC，BD 交于点 O，若 $AD=3$，$BC=8$，则 $AB^2+CD^2=$________．



（23-24 八年级上·辽宁沈阳·阶段练习）

45．如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O．若 $AC\perp BD$，$AB=4$，$CD=\sqrt{5}$，则 $BC^2+AD^2=$_____．



（23-24 八年级上·广东深圳·期中）

46．(1)如图 1，四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC\perp BD$ 于点 O．判断 AD^2+BC^2 与 AB^2+CD^2 的数量关系，并说明理由．

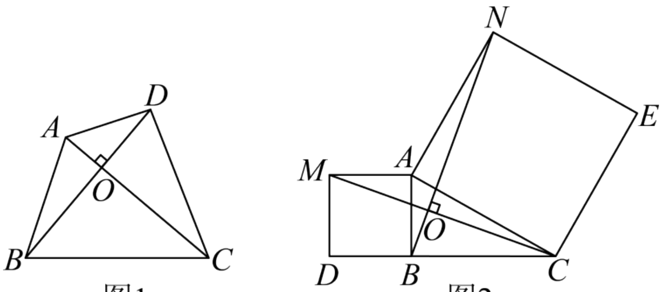


图1　　图2

(2)如图 2，分别以 Rt△ABC 的直角边 AB 和斜边 AC 为边向外作正方形 $ABDM$ 和正方形 $ACEN$，连接 BN，CM，交点为 O．

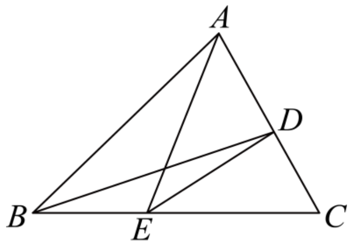
①判断 CM，BN 的关系，并说明理由．

②连接 MN．若 $AB=4$，$BC=6$，请直接写出 MN 的长．

一十三．见特殊角，作垂线（共 4 小题）

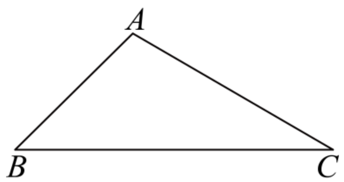
（24-25 八年级上·四川成都·期中）

47．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=45^{\circ}$，$\angle BAC=75^{\circ}$，$AC=2$，点E与点D分别在射线BC与射线AD上，且$AD=BE$，则$AE+BD$的最小值为_____，$AE+ED$的最小值为_____．



（23-24 八年级下·广东江门·期中）

48．如图所示，$\triangle ABC$中，$\angle A=105^{\circ}$，$\angle B=45^{\circ}$，$AB=\sqrt{2}$，

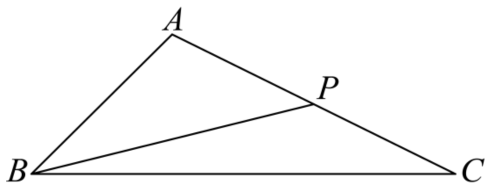


(1)求AC的长，

(2)求BC的长．

（23-24 九年级上·江苏常州·阶段练习）

49．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=45^{\circ}$，$\angle A=105^{\circ}$，$AC=4$．

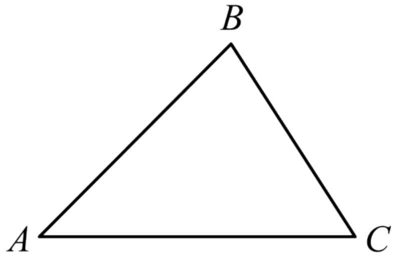


(1)求BC的长；

(2)若点P是AC中点，求BP的长．

（23-24 八年级下·黑龙江哈尔滨·阶段练习）

50．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=45^{\circ}$，$AB=2\sqrt{6}$，$\angle ABC=75^{\circ}$．求BC的长．

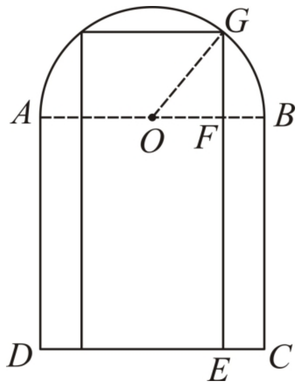


1．卡车能通过，理由见解析

【分析】此题主要考查了勾股定理的应用，如图，卡车能否通过，关键是车高2.5米与EG的比较，EF为2.1米，只需求GF，在直角三角形OFG中，半径OG为1米，车宽的一半为$OF=0.8$米，运用勾股定理求出GF即可．

【详解】解：卡车能通过，理由如下，

如图，设点O为半圆的圆心，则AB的中点为点O，OG为半圆的半径，



$\because AB=CD=2$米，

$\therefore OG=1$，$OF=1.6\div 2=0.8$米，

在$\mathrm{Rt}\triangle OFG$中，$OG^2=OF^2+GF^2$，

$GF=\sqrt{OG^2-OF^2}=\sqrt{1^2-0.8^2}=0.6$米，

$\therefore EG=EF+GF=2.1+0.6=2.7$米，

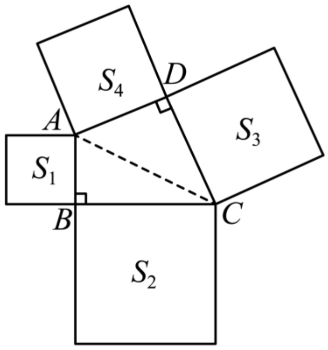
$\because 2.7>2.5$，

$\therefore$卡车能通过．

2．8

【分析】连接AC，构造$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle ADC$，然后在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中利用勾股定理求出AC^2，在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中求出AD^2，进而求得S_4的值．

【详解】如图，连接AC，



$\because$在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2$，

$\therefore AC^2 = S_1 + S_2 = 4 + 16 = 20$．

$\because$在 Rt$\triangle ADC$ 中，$AC^2 = AD^2 + DC^2$，

$\therefore AC^2 = S_4 + S_3 = S_4 + 12 = 20$，

解得：$S_4 = 8$．

【点睛】本题考查勾股定理，解决本题的关键是将面积转化为勾股定理求边长的平方即可．

3．(1)$\triangle ABC$ 是直角三角形，理由见详解

(2)见详解

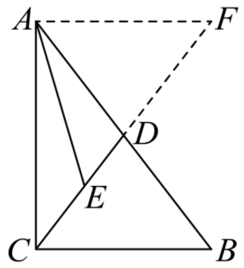
【分析】本题主要考查全等三角形的性质与判定、直角三角形斜边中线定理、勾股定理逆定理及等腰三角形的性质，熟练掌握全等三角形的性质与判定、直角三角形斜边中线定理、勾股定理逆定理及等腰三角形的性质是解题的关键；

（1）延长CD，使得$DF = CD = 5$，连接AF，由题意易得$\triangle ADF \cong \triangle BDC(\mathrm{SAS})$，则有$AF = BC = 6, \angle F = \angle BCD$，然后可得$AF^2 + AC^2 = CF^2$，进而问题可求解；

（2）由（1）可知：$\angle F = \angle BCD$，$AF = BC = 6$，$\angle ACB = 90°$，则有$\angle DCB = \angle B$，然后可得$\angle AED = \angle F = \angle BCD$，进而问题可求证．

【详解】(1）解：$\triangle ABC$ 是直角三角形，理由如下：

延长CD，使得$DF = CD = 5$，连接AF，如图所示：



$\because CD$是$\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore AD = BD$，

$\because \angle ADF = \angle BDC$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BDC(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AF = BC = 6, \angle F = \angle BCD$，

$\therefore AF \parallel BC$，

$\because AC = 8$，$CF = 2CD = 10$，

$\therefore AF^2+AC^2=CF^2$，

$\therefore \triangle AFC$ 是直角三角形，即 $\angle CAF=90^\circ$，

$\because AF \parallel BC$，

$\therefore \angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形；

（2）解：由（1）可知：$\angle F=\angle BCD$，$AF=BC=6$，$\angle ACB=90^\circ$，CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore CD=BD$，

$\therefore \angle DCB=\angle B$，

$\because AE=BC=AF$，

$\therefore \angle AED=\angle F=\angle BCD$，

$\therefore \angle AED=\angle B$．

4．(1)见解析

(2)12

(3)$\dfrac{\sqrt{455}}{6}$m

【分析】题目主要考查勾股定理的应用，勾股定理的逆定理，理解题意，作出辅助线，熟练掌握勾股定理是解题关键．

（1）根据勾股定理逆定理确定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，即可求解；

（2）根据题干思路，利用勾股定理代入求解即可；

（3）作 $AD\perp BC$ 交 CB 的延长线于 D，根据题意得出 $AC=4+2=6m$，设 $BD=x\text{m}$，$BC=3\text{m}$，然后结合图形利用勾股定理求解即可．

【详解】（1）解：$\because$在 $\triangle ABC$ 中，$AB=13, AC=5, BC=12$，

$\therefore AC^2+BC^2=169=AB^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore AC\perp BC$，

$\therefore AC$ 是点 A 到 BC 边的距离，即点 A 到 BC 边的距离为 5；

（2）解：如图②，作 $AD\perp BC$ 于 D，

设 $BD=x$，则 $CD=BC-BD=14-x$，

$\because \text{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD^2=AB^2-DB^2$，$\text{Rt}\triangle ACD$ 中，$AD^2=AC^2-CD^2$，

$\therefore AB^2-DB^2=AC^2-CD^2$，

$\therefore 15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2$，

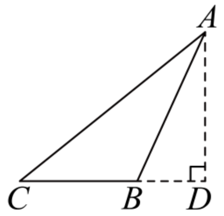
解得：$x = 9$，即 $BD = 9$，

$\therefore AD^2 = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$，

∴点A到 BC 的距离为12，

故答案为：12；

（3）解：作 $AD \perp BC$ 交CB的延长线于 D，



$\because AB = 4\text{m}$，

$\therefore AC = 4 + 2 = 6m$，

设 $BD = x\text{m}$，$BC = 3\text{m}$，

则 $CD = (3 + x)\text{m}$，

$\because \text{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD^2 = AB^2 - DB^2$，$\text{Rt}\triangle ACD$ 中，$AD^2 = AC^2 - CD^2$，

$\therefore AB^2 - DB^2 = AC^2 - CD^2$，

$\therefore 4^2 - x^2 = 6^2 - (3 + x)^2$，

解得：$x = \frac{11}{6}$，即 $BD = \frac{11}{6}\text{m}$，

$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{455}}{6}\text{m}$，

∴楼梯的高度为$\frac{\sqrt{455}}{6}\text{m}$．

5．(1)见解析

(2)从正面和上面：5；从左面和上面：$\sqrt{29}$；从正面和右面：$\sqrt{29}$

(3)5

【分析】本题主要考查的是勾股定理的应用，

（1）按照从正面和上面；左面和上面；右面和上面，画出图形即可；

（2）根据勾股定理即可解答；

（3）将（2）中求得的距离进行比较，即可，本题的重点在于准确进行展开，将立体图形转化为平面图形进行计算，进行分类讨论．

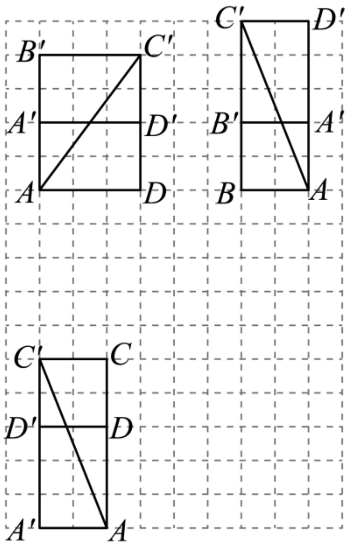
【详解】（1）解：如图所示：

（2）解：从正面和上面：$AC'=\sqrt{AD^2+C'D^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$；

从左面和上面：$AC'=\sqrt{AB^2+C'B^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$；

从正面和右面：$AC'=\sqrt{AA'^2+C'A'^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$；

（3）解：根据（2）中可得，最短路径为5．



6．（1）13；（2）该蚂蚁爬行的最短路程是25厘米；（3）蚂蚁从外壁B处到内壁A处所爬行的最短路程是15厘米

【分析】本题考查了平面展开——最短路径问题，勾股定理，轴对称的性质，将图形展开，利用轴对称的性质和勾股定理进行计算是解题的关键．

（1）直接利用勾股定理进行求解即可；

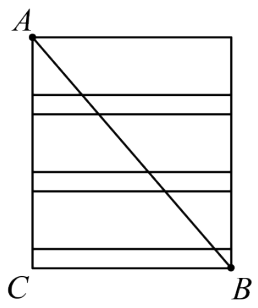
（2）将圆柱体展开，利用勾股定理求解即可；

（3）将玻璃杯侧面展开，将玻璃杯侧面展开，作B关于EF的对称点B'，作$B'D\perp AE$，交AE延长线于点D，连接AB'，根据两点之间线段最短可知AB'的长度即为所求，利用勾股定理求解即可得．

【详解】解：（1）由题意得：$BC=5$，$AC=(1+3)\times 3=12$，

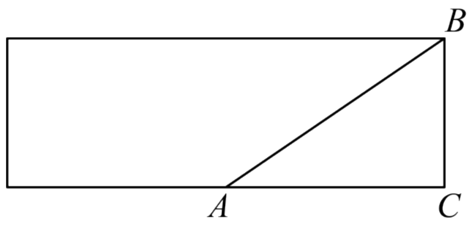
$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

故答案为：13；



图②

（2）将圆柱体侧面展开，如下图：

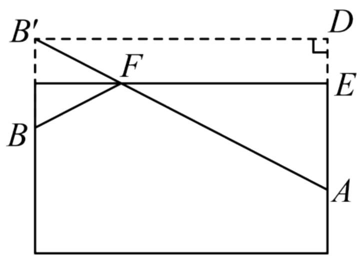


由题意得：$AC=\frac{1}{2}\times 48=24\text{cm}$，$BC=7\text{cm}$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{24^2+7^2}=25\text{cm}$，

$\therefore$该蚂蚁爬行的最短路程25厘米；

（3）如下图，将玻璃杯侧面展开，作B关于EF的对称点B'，作$B'D\perp AE$，交AE延长线于点D，连接AB'，



由题意得：$DE=\frac{1}{2}BB'=1\text{cm}$，$AE=10-2=8\text{cm}$，

$\therefore AD=AE+DE=8+1=9\text{cm}$，

$\because$底面周长为24cm，

$\therefore B'D=\frac{1}{2}\times 24=12\text{cm}$，

$\therefore AB'=\sqrt{AD^2+B'D^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15\text{cm}$，

由两点之间线段最短可知，蚂蚁从外壁B处到内壁A处所爬行的最短路程是$AB'=15$厘米．

7．(1)沿线段AB爬行；理由见解答过程

(2)D；6

(3)蚂蚁爬行的最短路线是沿面 AF 和面 FC 展开后所连接的线段 AE ；理由见解答过程

【分析】本题考查了勾股定理的拓展应用．“化曲面为平面”是解决“怎样爬行最近”这类问题的关键．

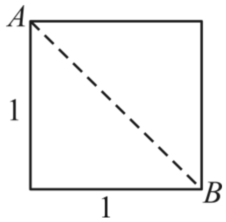
（1）根据线段的性质：两点之间线段最短，求出即可；

（2）根据图形可得出最短路径为$\sqrt{5}$cm，进而得出答案即可；

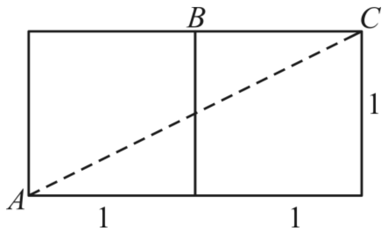
（3）将立方体采用两种不同的展开方式得出最短路径即可．

【详解】（1）解：沿线段 AB 爬行；理由如下：

如图所示，根据两点之间线段最短，沿线段 AB 爬行即可；



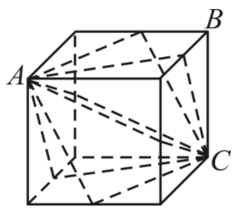
（2）解：如图所示：



最短路径的长度为$d=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$cm，

$\because 2<\sqrt{5}<3$，即$1\text{cm}<d<3\text{cm}$，

如图所示：



∴路线有 6 条，

故选：D；6；

（3）解：蚂蚁爬行的最短路线是沿面 AF 和面 FC 展开后所连接的线段 AE ；理由如下：

如图 2.1 和图 2.2 所示作图，分别连接 AE ，

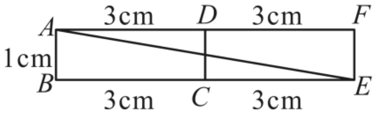


图2.1

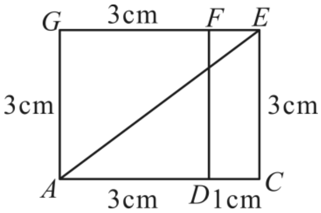


图2.2

图 2.1 中 $AE=\sqrt{BE^2+AB^2}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}\text{cm}$；

图 2.2 中 $AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5\text{cm}$；

$\because \sqrt{37}>5$，

$\therefore$ 图 2.2 中的路径最短.

8．素材1：15，二；（2）9，$x<y$；（3）当$r=\dfrac{4}{5}h$时，蚂蚁在圆柱表面的两种爬行路线的路程相等.

【分析】此题主要考查了平面展开图的最短路径问题，勾股定理，熟练掌握知识点的应用及分类讨论思想是解题的关键.

（1）根据勾股定理以及线段长度得出即可；

（2）利用圆柱形木块的高为3，底面半径为6，即可得出沿爬行的路程长并比较大小；

（3）构造方程$h+2r=\sqrt{h^2+(3r)^2}$即可得到结论.

【详解】解：（1）图2中画出蚂蚁爬行的最短路径为：

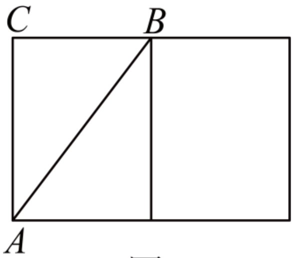


图2

展开后，半圆长为$\dfrac{1}{2}\pi d=\dfrac{1}{2}\times 3\times 6=9$，

根据勾股定理，此时最短路程为$\sqrt{12^2+9^2}=15$

$\because 15<18$，

由此可知，蚂蚁爬行的最短路径为路线二；

故答案为：15，二；

（2）$a=3+6=9$，

$\because 9 < 3\sqrt{10}$.

$\therefore$表格中b表示的大小关系是$x < y$，

故答案为：9，$x < y$；

（3）根据题意可得$h + 2r = \sqrt{h^2 + (3r)^2}$，

即$h^2 + 4hr + 4r^2 = h^2 + 9r^2$，

$\therefore r = \frac{4}{5}h$，

故当$r = \frac{4}{5}h$时，蚂蚁在圆柱表面的两种爬行路线的路程相等.

9．(1)A

(2)20

(3)$8\sqrt{37}$

(4)10

【分析】本题考查了平面展开－最短路径问题，解题的关键是掌握圆柱的侧面展开图是一个矩形，此矩形的长等于圆柱底面周长，高等于圆柱的高，本题就是把圆柱的侧面展开成矩形，“化曲面为平面”，用勾股定理解决.

（1）由平面图形的折叠及立体图形的表面展开图的特点解题；

（2）要求丝线的长，需将圆柱的侧面展开，进而根据“两点之间线段最短”得出结果，在求线段长时，根据勾股定理计算即可；

（3）若将金属丝从点B绕四圈到达点A，则所需金属丝最短长度是以周长及$\frac{1}{4}$的高为直角三角形的斜边长的4倍；

（4）如图（见解析），将玻璃杯侧面展开，作B关于EF的对称点B'，根据两点之间线段最短可知AB'的长度即为所求，利用勾股定理求解即可得.

【详解】（1）解：因圆柱的侧面展开面为长方形，AC展开应该是两线段，且有公共点C.

故选：A；

（2）解：如图，把圆柱的侧面展开，得到矩形，则这圈金属丝的周长最小为$2AC$的长度.

$\because$圆柱底面的周长12，圆柱的高$AB = 8$，

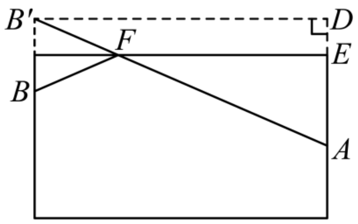
$\therefore$该长度最短的金属丝的长为$2AC = 2\sqrt{8^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2} = 20$；

（3）解：若将金属丝从点B绕四圈到达点A，

则所需金属丝最短长度是以周长及$\frac{1}{4}$的高为直角三角形的斜边长的4倍：

$4\sqrt{12^2+\left(\frac{8}{4}\right)^2}=8\sqrt{37}$．

（4）解：如图，将玻璃杯侧面展开，作B关于EF的对称点B'，作$B'D\perp AE$，交AE延长线于点D，连接AB'，



由题意得：$DE=\frac{1}{2}BB'=1\text{cm}, AE=9-4=5(\text{cm})$，

$\therefore AD=AE+DE=6\text{cm}$，

$\because$底面周长为16cm，

$\therefore B'D=\frac{1}{2}\times16=8(\text{cm})$，

$\therefore AB'=\sqrt{AD^2+B'D^2}=10\text{cm}$，

由两点之间线段最短可知，蚂蚁从外壁B处到内壁A处所走的最短路程为$AB'=10\text{cm}$．

10．(1)$\frac{7}{4}$

(2)$\frac{55}{16}$

【分析】本题考查折叠问题以及勾股定理，熟练掌握折叠的基本性质是解题关键；

（1）设$CE=x$，则$BE=8-x$，在$\text{Rt}\triangle ACE$中，利用勾股定理列出方程解方程即可；

（2）根据中点性质，先得到$CB'=\frac{1}{2}AC=3$，在$\text{Rt}\triangle B'CE$中，再利用勾股定理列出方程解方程即可．

【详解】（1）解：设$CE=x$，则$BE=8-x$．

由折叠可得：$AE=BE=8-x$．

在$\text{Rt}\triangle ACE$中，

由$CE^2+AC^2=AE^2$，

得：$x^2+6^2=(8-x)^2$，

解得：$x=\frac{7}{4}$，

即CE的长为$\frac{7}{4}$．

（2）$\because$点B'落在AC的中点上，

$\therefore CB'=\frac{1}{2}AC=3$．

设$CE=y$，则$B'E=BE=8-y$．

在$\mathrm{Rt}\triangle B'CE$中，

由$CE^2+B'C^2=B'E^2$，

得$y^2+3^2=(8-y)^2$，

解得：$y=\frac{55}{16}$，

即CE的长为$\frac{55}{16}$．

11．CE的长度为$\frac{15}{4}$或3

【分析】本题考查了翻折变换的性质，勾股定理的应用，熟记性质并表示出$\triangle B'CE$的三边的长度，然后利用勾股定理列出方程是解题的关键，要注意分情况讨论，设$CE=x$，则$BE=BC-CE=8-x$，再根据翻折的性质可得$B'E=BE$，然后分两种情况求出$B'C$，再利用勾股定理列出方程求解即可．

【详解】解：设$CE=x$，则$BE=BC-CE=8-x$，

$\because\triangle BDC$沿直线DE折叠B落在B'处，

$\therefore B'E=BE=8-x$，

$\because$点B'为AC的三等分点，$AC=6$，

$\therefore B'C=2$或$B'C=4$，

当$B'C=2$时，在$\mathrm{Rt}\triangle B'CE$中，

$B'C^2+CE^2=B'E^2$，即$2^2+x^2=\left(8-x\right)^2$，

解得：$x=\frac{15}{4}$；

当$B'C=4$时，在$\mathrm{Rt}\triangle B'CE$中，

$B'C^2+CE^2=B'E^2$，即$4^2+x^2=\left(8-x\right)^2$，

解得：$x=3$，

综上所述，CE 的长度为$\dfrac{15}{4}$或 3．

12．(1) BC 的长为 10

(2)线段 HE 的长度为 4 或 6 或$\dfrac{7}{3}$

(3)$\dfrac{51}{5}$或$\dfrac{85}{3}$

【分析】（1）根据勾股定理逆定理判断$\triangle ACH$是直角三角形，在根据勾股定理即可解答；

（2）当$CB=CE$时，根据等腰三角形的性质可解答；当点 E 在线段 AB 上，且$BC=BE$时，根据$HE=BE-BH$可得答案；当$EB=EC$时，根据勾股定理可得答案；

（3）设$AP=a$，分别当点 P 在线段 AB 上时，或点 P 在 AB 延长线上时，根据$PH'=PH$，在$\mathrm{Rt}\triangle APH'$中，根据勾股定理即可得出答案．

【详解】（1）解：$\because AH=15$，$CH=8$，$AC=17$，

$\therefore AH^2+CH^2=15^2+8^2=289$，$AC^2=289$，

$\therefore AH^2+CH^2=AC^2$，

$\therefore \triangle ACH$是直角三角形，且$\angle AHC=90°$，

$\therefore CH\perp AB$，

$\therefore \angle BHC=90°$，

$\because BH=6$，$CH=8$，

$\therefore BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\therefore BC$ 的长为 10；

（2）解：①当$CB=CE$时：

$\because CB=CE$，$CH\perp AB$，

$\therefore H$ 为 BE 中点，

$\because BH=6$，

$\therefore HE=BH=6$；

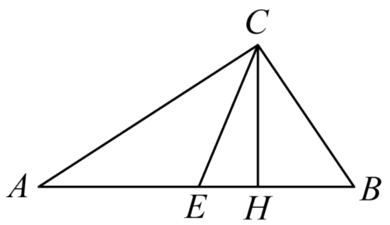
②当点 E 在线段 AB 上，且$BC=BE$时：

$\because BC=10$，

$\therefore BE=BC=10$，

$\therefore HE=BE-BH=10-6=4$，

③当$EB=EC$时：如图



在$\mathrm{Rt}\triangle CHE$中

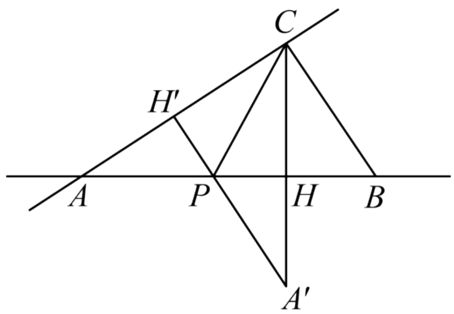
$\because HE^2+CH^2=CE^2$，$CH=8$，$CE=BE=HE+6$

$\therefore HE^2+8^2=\left(HE+6\right)^2$，

$\therefore HE=\dfrac{7}{3}$

综上所述，线段的长度为6或4或$\dfrac{7}{3}$；

（3）①如图，当点P在线段AB上时：



设$AP=a$，则$PH'=PH=15-a$，

$\because CH'=CH=8$，

$\therefore AH'=AC-CH'=17-8=9$，

在$\mathrm{Rt}\triangle APH'$中，

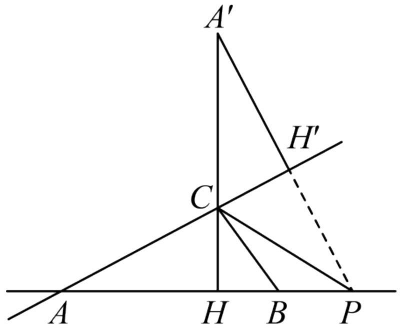
根据勾股定理可得$9^2+\left(15-a\right)^2=a^2$：

解得$a=\dfrac{51}{5}$，

$\therefore AP=\dfrac{51}{5}$；

②如图，当点P在AB延长线上时，连接PH'，

设$AP=a$，则$PH'=PH=a-15$，$\angle CHP=\angle CH'P=90°$，



$\because CH' = CH = 8$，

$\therefore AH' = AC + CH' = 17 + 8 = 25$，

在 $Rt\triangle APH'$ 中，

根据勾股定理可得 $25^2 + (a-15)^2 = a^2$；

解得 $a = \dfrac{85}{3}$，

$\therefore AP = \dfrac{85}{3}$；

综上所述，AP 的值为 $\dfrac{51}{5}$ 或 $\dfrac{85}{3}$．

【点睛】本题主要考查了勾股定理及其逆定理，等腰三角形的性质和判定，翻折变换，熟练掌握勾股定理、等腰三角形的性质、折叠的性质、及分类讨论是解题的关键．

13．(1)证明见解析

(2) $BF = \dfrac{25}{4}$

(3) $BM = 2$

【分析】本题考查了折叠与三角形的问题，勾股定理，掌握折叠性质以及勾股定理是解题的关键．

（1）先证 $CD = BD, \angle B = \angle BCD$，再证明 $\angle A = \angle ACD$ 进而得出 $AD = BD$ 即可；

（2）设 $AF = BF = x$，则 $CF = 8 - x$，在 $Rt\triangle ACE$ 中用勾股定理求解即可；

（3）先求出 $\angle AMB = 135°$，得出 $\angle AMC = 45°$，进而求出 $AC = MC = 6$，即可求出结论．

【详解】（1）解：$\because$ 折叠后点 B 与点 C 重合，

$\therefore CD = BD, \angle B = \angle BCD$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$

$\therefore \angle BCD + \angle ACD = \angle A + \angle B = 90°$，

$\therefore \angle A = \angle ACD$，

$\therefore AD = CD$，

$\therefore AD=BD$，即 D 是 AB 的中点；

（2）解：$\because$直线 DF 是对称轴，

$\therefore AF=BF$，

$\because AC=6, BC=8$，

设 $AF=BF=x$，则 $CF=8-x$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 中，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore AC^2+CF^2=AF^2$，

$\therefore 6^2+(8-x)^2=x^2$，

解得 $x=\dfrac{25}{4}$，

$\therefore BF=\dfrac{25}{4}$；

（3）解：由题意得：$\angle AMB=\angle AMB_1$，$\angle B_1MN=90^\circ$，

$\therefore \angle BMB_1=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

$\therefore \angle AMB=\angle AMB_1=\dfrac{360^\circ-90^\circ}{2}=135^\circ$，

$\therefore \angle AMC=180^\circ-135^\circ=45^\circ$，

$\because \angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle CAM=\angle CMA=45^\circ$，

$\therefore AC=MC=6$，

$\because BC=8$，

$\therefore BM=8-6=2$．

14．(1)证明见解析；

(2) BC 的长为 $\dfrac{16}{3}\mathrm{cm}$．

【分析】（1）利用全等判定方法ASA证明全等三角形即可；

（2）过点 F 作 $FG\perp BC$ 交 BC 于 G，先用勾股定理求出 $EG=3\mathrm{cm}$，设 $DF=x\mathrm{cm}$，用 x 表示出 AF 的长，进而在 $\mathrm{Rt}\triangle AD'F$ 中用勾股定理列出方程 $(3+x)^2=4^2+x^2$，最后利用 $BC=AD$ 即可求解．

【详解】（1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形，

$\therefore AB=CD, \angle BAC=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$，

由折叠知，$CD = AD', \angle D = \angle D', \angle D'AE = \angle C = 90°$，

$\therefore AB = AD', \angle B = \angle D', \angle BAD = \angle EAD'$，

$\therefore \angle BAD - \angle EAF = \angle EAD' - \angle EAF$，

$\therefore \angle BAE = \angle D'AF$，

在$\triangle ABE$和$\triangle AD'F$中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle D' \\ AB = AD' \\ \angle BAE = \angle D'AF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AD'F\left(\text{ASA}\right)$；

（2）解：如图，过点F作$FG \perp BC$交BC于G，

又$\because \angle BAC = \angle B = 90°$，

$\therefore$四边形$ABGF$是矩形，

$\therefore AB = CD = FG = 4\text{cm}$，$BG = AF$，

在$\text{Rt}\triangle EFG$中，$\angle EGF = 90°$，

$\therefore EF^2 = EG^2 + FG^2$，

$\therefore EG = \sqrt{EF^2 - FG^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$，

设$DF = x\text{cm}$，则$D'F = x\text{cm}$，

$\because \triangle ABE \cong \triangle AD'F$，

$\therefore BE = D'F = x\text{cm}$，

$\therefore AF = BG = BE + EG = \left(3 + x\right)\text{cm}$，

在$\text{Rt}\triangle AD'F$中，$\angle AD'F = 90°$，

$\therefore AF^2 = AD'^2 + D'F^2$，

即$\left(3 + x\right)^2 = 4^2 + x^2$，

解得：$x = \dfrac{7}{6}$，

$\therefore BC = AD = AF + FD = 3 + x + x = 3 + \dfrac{7}{6} + \dfrac{7}{6} = \dfrac{16}{3}\text{cm}$.

$\therefore BC$的长为$\dfrac{16}{3}\text{cm}$.