第七章 灰色预测与数值插值

1.灰色预测

2.数值插值

第一节 灰色预测

1. GM(1,1)模型
2. GM(1,n)模型
3. 灰色Verhulst模型
4. 灰色波形预测
5. GM(2,1)模型
6. DGM模型
7. 案例分析

灰色预测背景

- 灰色预测理论

　　灰色理论认为信息不完全系统的行为现象尽管是朦胧的，数据是复杂的，但它具备一定的潜在规律，是有整体功能的。灰色预测就是从杂乱中寻找出规律，从而对系统进行预测。

- 灰色模型（Grey Models，GM）

　　通过离散随机数经过生成变为较有规律的生成数，进而直接转化成微分方程的模型。常用模型有GM(1,1)模型、GM(1,N)模型、Verhulst模型、GM(2,1)模型,DGM模型和灰色波形预测。

一、GM(1,1)模型

- 模型的提出：基于随机的原始时间序列，经按时间累加后形成的新的时间序列所呈现的规律用一阶线性微分方程的解来逼近的模型。

- 模型的适用条件：
- 1.数据量不少于4个；
- 2. 原始数据非负、符合指数规律变化且变化不是很快；
- 3. $\sigma^{(0)}(k) \in \left(e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}} \right)$.

模型的基本定义

1.原始数列（非负）： $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2)\cdots x^{(0)}(n)\}$

2.一次累加生成数列: $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2)\cdots x^{(1)}(n)\}$，其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{m=1}^{k}x^{(0)}(m)$.

3.级比: $\sigma^{(0)}(k)=\dfrac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}$

4. $x^{(1)}$ 的灰导数: $dx^{(1)}(k)=x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1).$

5. $x^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列: $Z^{(1)}=\{z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n)\}$，其中

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),\quad k=2,3,\cdots,n.$$

建模过程

1.构造GM(1,1)的灰微分方程模型为 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$

其中 a 称为发展系数, b 称为灰作用量， $z^{(1)}(k)$ 称为白化背景值

令 $k=2,3,\cdots,n$, 则上式可写为 $\begin{cases} x^{(0)}(2)+az^{(1)}(2)=b \\ x^{(0)}(3)+az^{(1)}(3)=b \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x^{(0)}(n)+az^{(1)}(n)=b \end{cases}$

2.引入矩阵记号

$$P=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

则GM(1,1)模型的矩阵形式为 $Y = BP$

利用最小二乘法获得参数为 $P=(B^T B)^{-1} B^T Y.$

3.对于GM（1，1）的灰微分方程, 如果将灰导数 $x^{(0)}(k)$ 的时刻视为连续, 则其可视为时间 t 的函数.

构造相应的白化微分方程为：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

4.得到白化方程的解(离散响应)为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}, \qquad k=1,2,\cdots .$$

5.对数据模型作逆生成处理（累减），还原 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 得：

$$\hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1)$$

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)=(1-e^{a})(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-a(k-1)}$$

$$k=2,3,\cdots$$

例1 以我国1998-2006年全国人口总量作为预测样本，采用GM(1,1)模型进行数据预测。

年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
人口/万人	124761	125786	126743	127627	128453	129227	129988	130756	131448

1.建立GM(1,1)模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$

对原始数据作一次累加得

$$X^{(1)}=\{124761,250547,377290,504917,633370,762597,892585,1023341,1154789\}$$

$X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列 $Z^{(1)}=\{187654,313920,441100,569140,697980,827591,957963,1089065\}$

2.参数估计:

$$B=\begin{pmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-187654 & 1\\ -313920 & 1\\ -441100 & 1\\ -569140 & 1\\ -697980 & 1\\ -827591 & 1\\ -957963 & 1\\ -1089065 & 1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}125786\\ 126743\\ 127627\\ 128453\\ 129227\\ 129988\\ 130756\\ 131448\end{pmatrix}$$

利用最小二乘法得 $P=\left(B^TB\right)^{-1}B^TY=\begin{pmatrix}-0.0062\\124786\end{pmatrix}$

于是得到 **a=-0.0062, b=124786.**

3.模型求解

灰微分方程为 $x^{(0)}(k)-0.0062z^{(1)}(k)=124786.$

把系数**a**，**b**代入**GM(1,1)**模型白化方程的解并作逆生成处理, 还原

$\hat{x}^{(0)}(k)=(124761,125958,126746,127540,128339,129142,129951,130765,131584)$

可见，短期人口预测结果与实际情况十分接近。

用**MATLAB**实现建模如下：

```
% GM(1,1)模型
clc,clear
x0 = [124761 125786 126743 127627 128453 129227 129988
130756 131448]' % 输入数据  注意这里为列向量
n = length(x0)
lamda = x0(1:n-1)./x0(2:n) % 级比
range = minmax(lamda') %级比范围
if range(1,1) < exp(-2/(n+2)) | range(1,2)>exp(2/(n+2))
   error('级比没有落入灰色模型的范围内')
else
   %空行输出
       disp('        ');
   disp('可以用GM(1,1)建模')
end
```

```
x1 = cumsum(x0) %累加运算
B=[-0.5*(x1(1:n-1)+x1(2:n)),ones(n-1,1)];
Y=x0(2:n);
u=B\Y   %拟合参数
k=10;
forecast1 = (x1(1)-u(2)./u(1)).*exp(-u(1).*([0:n-
1+k]))+u(2)./u(1);
exchange = diff(forecast1)%最后10个为预测的数据
epsilon=x0(2:n)'-exchange(1:n-1)    %计算残差
delta=abs(epsilon./x0(2:n)')  %计算相对误差
rho=1-(1-0.5*u(1))/(1+0.5*u(1))*lamda'  %计算级比偏差值
```

二、GM(1，N)模型

- 模型的提出：GM(1,N)即GM(1,1)的推广，为N个变量的一阶线性动态模型，以多个变量的时间序列为基础，主要用于事物的状态分析和决策。

- 模型的适用条件：

1.数据量不少于4个；

2. 原始数据非负、符合指数规律变化且变化不是很快；

3. $\sigma^{(0)}(k) \in \left(e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}} \right)$

建模过程

1. 确定原始序列 $X_i^{(0)}=\{x_i^{(0)}(1),x_i^{(0)}(2),\cdots,x_i^{(0)}(n)\},i=1,2,\cdots n$

   令 $X_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,n)$ 为原始数列的一次累加生成序列，$Z_1^{(1)}$为 $X_1^{(1)}$的紧邻生成序列.

2. 构造GM(1,N)模型为 $x_1^{(0)}(k)+az_1^{(1)}(k)=\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}(k)$

3. 引入矩阵记号 $P=(a,b_2,b_3,\cdots b_N)^T$

$$B=\begin{bmatrix}-z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2)\\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n)\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}x_1^{(0)}(2)\\ x_1^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x_1^{(0)}(n)\end{bmatrix}$$

当 $n>N+$时，利用最小二乘法求得一级参数 $P=(B^TB)^{-1}B^TY.$

4. 构造方程的自化模型为 $$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = \sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}$$

当 $X_i^{(1)}(i=1,2,L\ ,n)$ 变化幅度较小时，可视 $\sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k)$ 为灰变量

5. 得出模型的近似时间响应式为

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = (x_1^{(0)}(1) - \frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k+1))e^{-ak} + \frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k+1)$$

6. 得出累减还原式为 $$\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k)$$

例2　某商品的生，产需要甲.乙两种原料，产品利润以及甲、乙两种原料的市场供给等数据如表15．7所列，试预测2004年甲的供应量为400kg.乙的供应量为500kg时的产品利润(要求建立灰色GM(1,N)）。

表2 原始数据表

年度	1999	2000	2001	2002	2003
i	1	2	3	4	5
产品利润/元	4383	7625	10500	11316	17818
甲原料/kg	83	131	180	195	306
乙原料/kg	146	212	233	259	404

这里有3个变量 x_1, x_2, x_3， 其中 x_1 表示利润（预测对象），x_2, x_3 分别表示甲原料和乙原料的量，每个变量都有5个相互对应的历史数据，于是形成了3个原始数列：

$$x_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), x_1^{(0)}(4), x_1^{(0)}(5)),$$

$$x_2^{(0)} = (x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), x_2^{(0)}(3), x_2^{(0)}(4), x_2^{(0)}(5)),$$

$$x_3^{(0)} = (x_3^{(0)}(1), x_3^{(0)}(2), x_3^{(0)}(3), x_3^{(0)}(4), x_3^{(0)}(5)).$$

记 $x_i^{(1)}(i=1,2,3)$ 为 $x_i^{(0)}$ 的累加生成数列，这里：

$$x_1^{(1)}=(4383,12008,22508,33824,51642),$$

$$x_2^{(1)}=(83,214,394,589,895),$$

$$x_3^{(1)}=(146,358,591,850,1254).$$

$x_1^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列：

$$z_1^{(1)}=(z_1^{(1)}(2),z_1^{(1)}(3),z_1^{(1)}(4),z_1^{(1)}(5)),$$

$$=(8195.5,17258,28166,42733)$$

于是有

$$B = \begin{pmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & x_3^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & x_3^{(1)}(3) \\ -z_1^{(1)}(4) & x_2^{(1)}(4) & x_3^{(1)}(4) \\ -z_1^{(1)}(5) & x_2^{(1)}(5) & x_3^{(1)}(5) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -8195.5 & 214 & 358 \\ -17258 & 394 & 591 \\ -28166 & 589 & 850 \\ -42733 & 895 & 1254 \end{bmatrix},$$

$$Y=(x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), x_1^{(0)}(4), x_1^{(0)}(5))^T.$$

所以

$$P = \begin{bmatrix} a \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y) = \begin{bmatrix} 2.0357 \\ 135.2594 \\ -12.9571 \end{bmatrix},$$

得估计模型

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + 2.0357 x_1^{(1)} = 135.2594 x_2^{(1)} - 12.9571 x_3^{(1)},$$

及近似时间响应式

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=(x_1^{(0)}(1)-\frac{b_2}{a}x_2^{(1)}(k+1)-\frac{b_3}{a}x_3^{(1)}(k+1))e^{-ak}+\frac{b_2}{a}x_2^{(1)}(k+1)+\frac{b_3}{a}x_3^{(1)}(k+1)$$

$$=(4383-66.4434x_2^{(1)}(k+1)+6.3649x_3^{(1)}(k+1))e^{-2.03571k}+66.4434x_2^{(1)}(k+1)-6.3649x_3^{(1)}(k+1).$$

预测结果为23405.94元。

```
%GM(1,N)
clc,clear
x0 = [4383 7625 10500 11316 17818
   83 131 180 195 306
   146 212 233 259 404];  % 录入数据
[m,n] = size(x0);
x1_d = cumsum(x0,2);  %累加序列
x11 = x1_d(1,:);
z11=0.5*(x11(1:end-1)+x11(2:end));%紧邻均值生成
b = [-z11' x1_d(2,2:end)' x1_d(3,2:end)'];
y = x0(1,2:end)';
u = b\y   %参数矩阵
```

```
%%引入条件
x20 = [x0(2,:),400];
x30 = [x0(3,:),500];
x21 = cumsum(x20);x31 = cumsum(x30);
for k = 0:length(x21)-1
    x1(k+1) = (x0(1,1)-u(2)/u(1)*x21(k+1)-u(3)/u(1)*x31(k+1)).*exp(-u(1)*k)+u(2)/u(1)*x21(k+1)+u(3)/u(1)*x31(k+1);
end
x10hat = [x1(1),diff(x1)];         %进行差分运算
epsilon = x0(1,:) - x10hat(1:end-1);   %计算残差
delta = abs(epsilon./x0(1,:));   %计算相对误差
xhat = x10hat(end)  % 预测最终值
```

三、灰色Verhulst模型

- 模型的提出：将离散的随机数列进行一次累加，生成新序列，再对其进行建模计算，得到预测值。该模型主要用来描述具有饱和状态的过程，即S型过程，常用于人口预测，生物生长，繁殖预测及产品经济寿命预测等。

模型算法

- 1. 构造灰色Verhulst模型为

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b\left(z^{(1)}(k)\right)^2$$

模型算法

2. 引入矩阵记号

$$P=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & z^{(1)}(2)^2 \\ -z^{(1)}(3) & z^{(1)}(3)^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & z^{(1)}(n)^2 \end{pmatrix}$$

利用最小二乘法求得参数 $P=(B^T B)^{-1} B^T Y.$

3. 构造灰色Verhulst模型的白化方程: $\dfrac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b\left(x^{(1)}\right)^2$

4. 得出时间响应式: $\hat{x}^{(1)}(k+1)=\dfrac{ax^{(0)}(1)}{bx^{(0)}(1)+\left(a-bx^{(0)}(1)\right)e^{ak}}$

5. 对模型作逆生成处理:

$$\hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1)$$

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)$$

- **例3　以湖南省水稻产量为例，该省2002——2009年水稻产量如下表所示。（数据来源于湖南统计信息网）**

湖南省2002——2009年水稻产量值

年份	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
水稻产量（万吨）	2.119	2.070	2.442	2.485	2.507	2.496	2.640	2.710

根据上述数据，请对湖南省水稻产量进行预测.

发现表中产量数据是呈“S”型增长的，故在不考虑外界环境因素对湖南省今后几年经济作物发展影响的前提下，我们利用Verhulst模型对其进行预测。

1.原始序列

$$X^{(0)}=(2.119, 2.070, 2.442, 2.485, 2.507, 2.496, 2.640, 2.710)$$

2. 一次累加生成

$$X^{(1)}=(2.1190，4.1890，6.6310，9.1160，11.6230，14.1190，16.7590，19.4690)$$

3. 紧邻均值加权生成序列

$$Z^{(1)}=(0，3.1540，5.4100，7.8735，10.3695，12.8710，15.4390，18.1140)$$

4. 建立灰色Verhulst模型

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b\left(z^{(1)}(k)\right)^2，矩阵形式 Y = BP$$

其中

$$Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.070 \\ 2.442 \\ 2.485 \\ 2.507 \\ 2.496 \\ 2.640 \\ 2.710 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & z^{(1)}(2)^2 \\ -z^{(1)}(3) & z^{(1)}(3)^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & z^{(1)}(n)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.1540 & 9.9477 \\ -5.4100 & 29.2681 \\ -7.8735 & 61.9920 \\ -10.3695 & 107.5265 \\ -12.8710 & 165.6626 \\ -15.4390 & 238.3627 \\ -18.1140 & 328.1170 \end{pmatrix}$$

5. 利用最小二乘法估计参数a，b的值

$$P=\left(B^T B\right)^{-1} B^T Y=\left(-0.4712 \quad -0.0189\right)^T$$

6. 将a，b代入白化模型，得到时间响应式

则
$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\frac{ax^{(0)}(1)}{bx^{(0)}(1)+\left(a-bx^{(0)}(1)\right)e^{ak}}$$

7. 对 $x^{(1)}$ 作逆生成处理 $\hat{X}^{(1)}=\left(4.7989 \quad 6.8892 \quad 9.4621 \quad 12.3388 \quad 15.2291 \quad 17.8374 \quad 19.9729\right)$

利用公式 $\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)$ ，计算得到

$$\hat{X}^{(0)}=\left(2.0903 \quad 2.5729 \quad 2.8767 \quad 2.8903 \quad 2.6083 \quad 2.1355\right)$$

```
%灰色verhulst
clc,clear
x0 = [2.119 2.070 2.442 2.485 2.507 2.496 2.640 2.710] % 输入数据
n = length(x0)
year = 0:n-1

x1 = cumsum(x0) %累加运算
for i = 2:n
    z1(i) = 0.5*(x1(i)+x1(i-1));    % 紧邻均值序列
end
z1
B=[-z1(2:end)',z1(2:end)'.^2]
Y=x0(2:end)';

u=B\Y   %拟合参数

forecast1 = (u(1)*x0(1))./(u(2)*x0(1)+(u(1)-
u(2)*x0(1))*exp(u(1).*([2:n])))
exchange = diff(forecast1)
epsilon=x0(2:n-1)-exchange    %计算残差
delta=abs(epsilon./x0(2:n-1))  %计算相对误差
```

统一思路

模型微分方程

↓

矩阵形式（最小二乘法）

↓

相应白化微分方程

↓

时间响应式

↓

逆处理还原

四、灰色波形预测

- 模型的提出：当原始数据频繁波动且摆动幅度较大时，往往难以找到适当的模拟模型，这时可以考虑根据原始数据的波形预测未来行为数据发展变化的波形。

建模过程

1. 确定原始序列为 $X=\{x(1),x(2),x(3),\cdots,x(n)\}$

$\{x_k=x(k)+(t-k)[x(k+1)-x(k)]\}$为序列X的k段折线图形，仍记

$$X=\{x_k=x(k)+(t-k)[x(k+1)-x(k)]\}$$

$\sigma_{\max}=\max\limits_{1\le k\le n}\{x(k)\}$ $\sigma_{\min}=\min\limits_{1\le k\le n}\{x(k)\}$ $\forall\xi\in\{\sigma_{\max},\sigma_{\min}\}$ 称 $X=\xi$为等高线

建模过程

联立$\begin{cases} X=\{x_k=x(k)+(t-k)[x(k+1)-x(k)]\,|\,k=1,2\cdots n-1\} \\ X=\xi \end{cases}$所得解为等高点.

由上述方程组还可得到 $t_k=k+\dfrac{\xi-x(k)}{x(k+1)-x(k)}$, 并记 $q(k)=t_k, k=1,2,\cdots m$

则称 $Q^{(0)}=(q(1),q(2),\cdots,q(m))$ 为等高时刻序列。

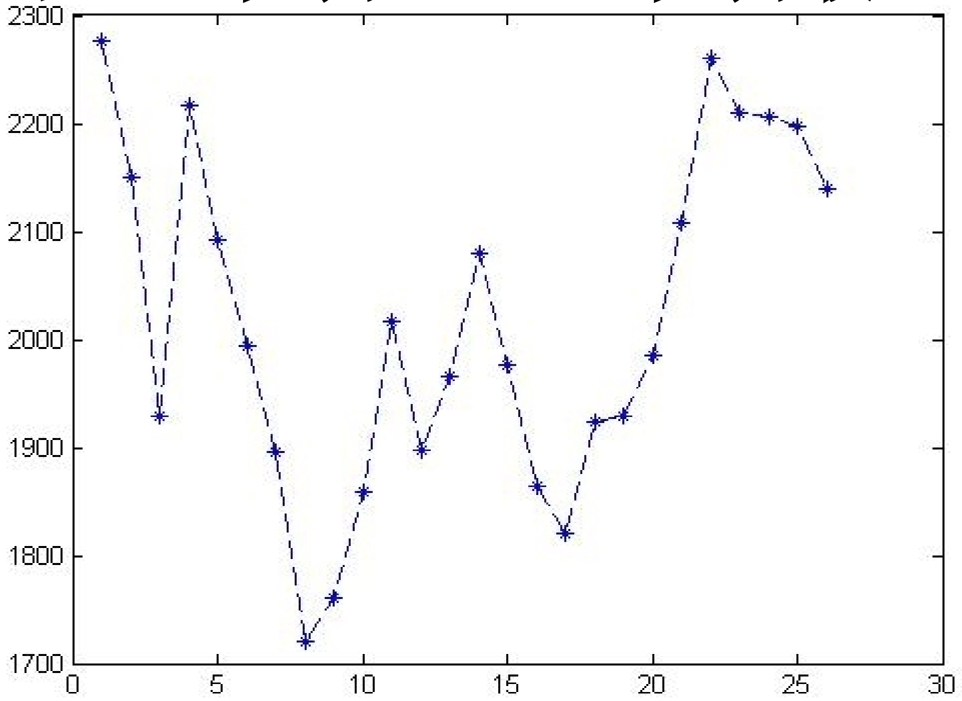
2. 建立等高时刻序列的GM(1, 1)模型, 可得等高时刻序列预测值

$$\hat{q}(m+1),\hat{q}(m+2),\cdots,\hat{q}(m+k)$$

例4 以上海证券交易所综合指数2008年3月-2009年3月数据为例，来预测上海证券交易所综合指数未来走势.

模型求解：

1. 由表格数据作出2008年3月至2009年3月收盘指数曲线



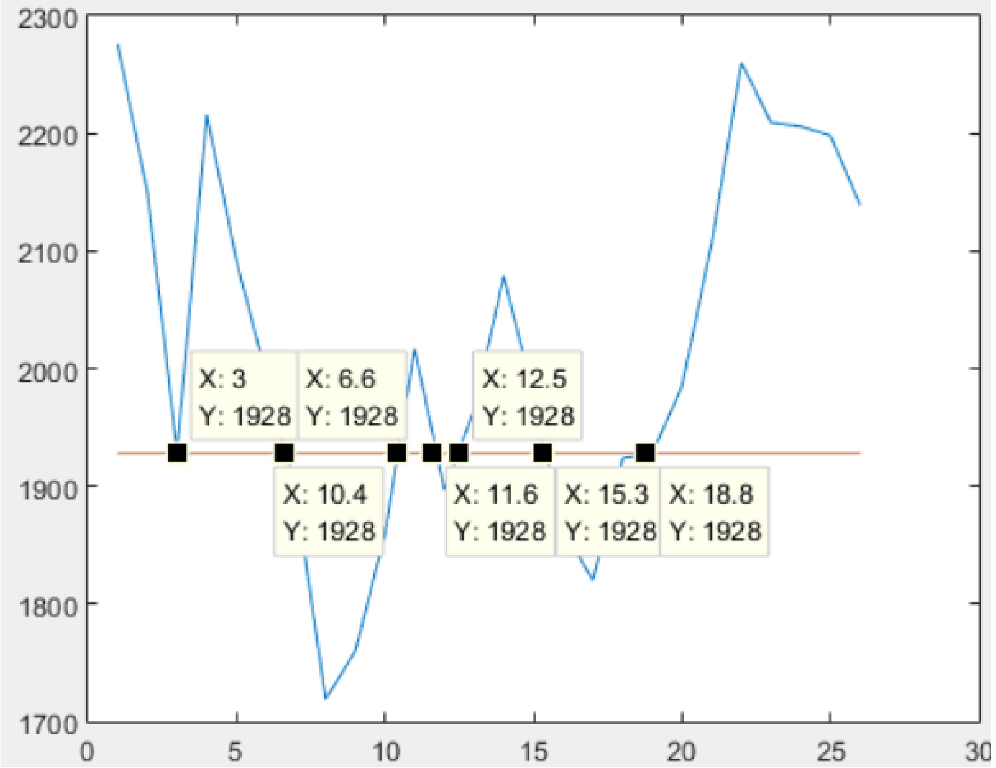
2. 以最低点和最高点为界限，等距离的取等高线

$\xi_1=1719.81$，$\xi_2=1789.42$，$\xi_3=1859.03$，$\xi_4=1928.63$，$\xi_5=1998.24$，

$\xi_6=2067.85$，$\xi_7=2137.06$，$\xi_8=2207.06$，$\xi_9=2276.67$

3. 去掉对应时刻点较少的等高线 $\xi_1 = 1719.81$，$\xi_2 = 1789.42$，$\xi_1 = 2276.67$

列出余下等高线对应的等高时刻序列



$\xi_3 = 1859.03$，$Q_3^{(0)} = \{q_3(k)\}_3^4 = (7.20905, 9.99914, 16.1111, 17.3707)$

$\xi_4 = 1928.63$，$Q_4^{(0)} = \{q_4(k)\}_4^6 = (6.66806, 10.439, 11.7429, 12.4554, 15.4264, 18.9511)$，

$\xi_5 = 1998.24$，$Q_5^{(0)} = \{q_5(k)\}_5^8 = (2.68793, 3.24, 5.96, 10.87, 11.16, 13.28, 14.29, 20.1077)$，

$\xi_6 = 2067.85$，$Q_6^{(0)} = \{q_6(k)\}_6^6 = (2.37397, 3.4823, 5.2498, 13.9009, 14.1102, 20.6749)$，

$\xi_7 = 2137.45$，$Q_7^{(0)} = \{q_7(k)\}_7^4 = (2.06001, 3.72423, 4.63693, 21.1941)$

$\xi_8 = 2207.06$，$Q_8^{(0)} = \{q_7(k)\}_8^5 = (1.55284, 3.96613, 4.07824, 21.6488, 23.8503)$.

以 No Image 为例，在波形图上作等高线，取等高线与波形图交点的横坐标，得到等高时刻序列：

$\xi_5 = 1998.24$，$Q_5^{(0)} = \{q_5(k)\}_5^8 = (2.68793, 3.24, 5.96, 10.87, 11.16, 13.28, 14.29, 20.1077)$，

4. 对$Q_i^{(0)}(i=3,4,\cdots,8)$作一次累加生成，得到$Q_i^{(1)}(i=3,4,\cdots,8)$，利用GM(1,1)模型预测等高序列响应式

$$\hat{q}_3^{(1)}(k+1)=41.2379e^{0.2395k}-34.0365,\quad \hat{q}_4^{(1)}(k+1)=63.93936e^{0.1563k}-57.2713,$$

$$\hat{q}_5^{(1)}(k+1)=22.9902e^{0.2157k}-20.3023,\quad \hat{q}_6^{(1)}(k+1)=11.67157e^{0.3619k}-9.2976,$$

$$\hat{q}_7^{(1)}(k+1)=3.98141e^{1.0834k}-1.92140,\quad \hat{q}_8^{(1)}(k+1)=7063774e^{0.5407k}-6.0849.$$

5. 利用逆生成公式 $\hat{q}_i(k+1)=\hat{q}_i^{(1)}(k+1)-\hat{q}_i^{(1)}(k)$得到$\xi_i$等高预测序列

$$\hat{Q}_3^{(0)}=(22.8875,29.0798,36.9474,46.9437),\quad \hat{Q}_4^{(0)}=(21.418,25.042,29.2793,34.2335,40.0259,46.7985),$$

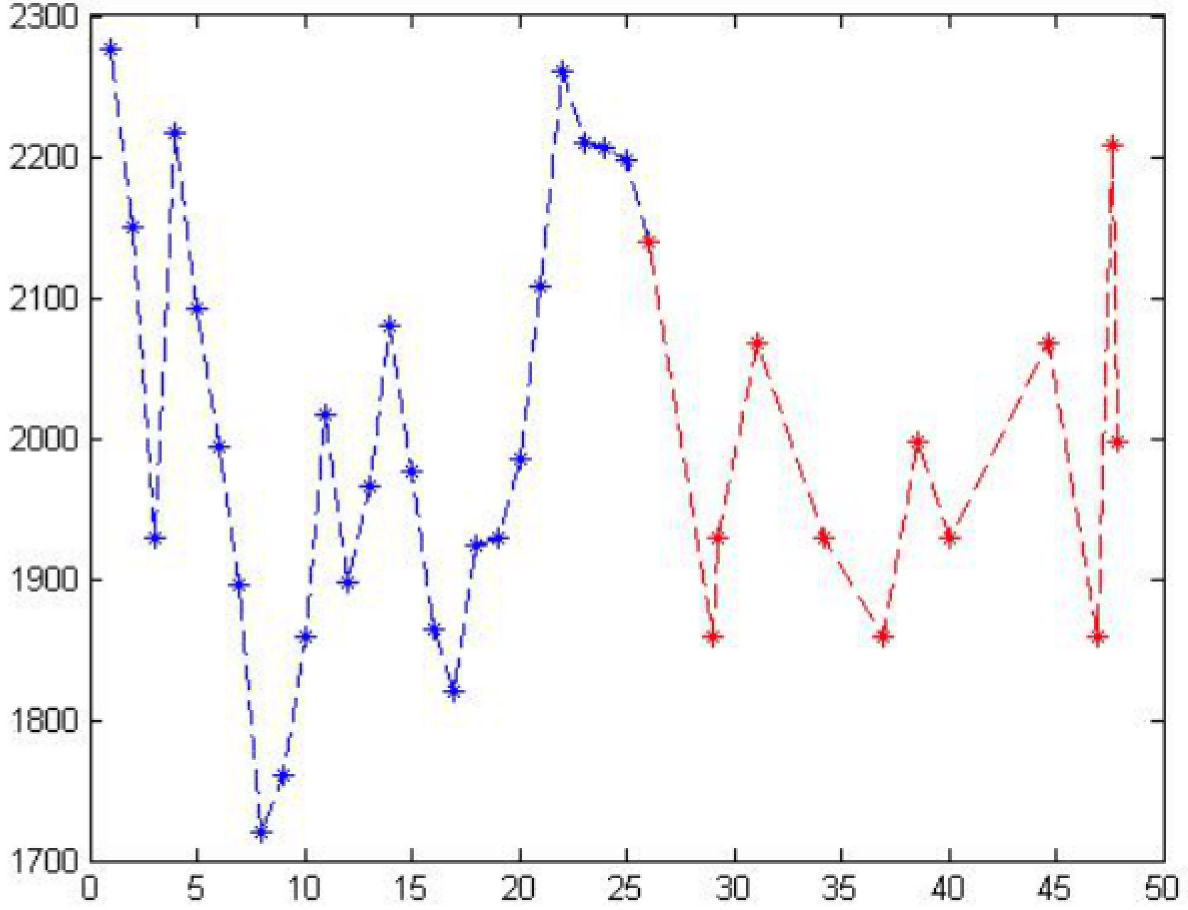
$$\hat{Q}_5^{(0)}=(25.0452,31.0735,38.5528,47.8324),\quad \hat{Q}_6^{(0)}=(31.0831,44.6371),$$

$$\hat{Q}_7^{(0)}=(6.99641,20.6731),\quad \hat{Q}_8^{(0)}=(47.6322).$$

6. 剔除无效点

观察上一步中得到的等高预测序列中是否存在相同值，若存在即意味着该时刻对应两个不同预测值，该点无效，应当剔除。

可以发现，本例中不存在无效点，因而只需对等高预测序列得到的时刻按从小到大排序，最后将每个时刻与其所在序列的等高线数值对应，作出预测波形。



灰色模型的检验

1. 残差检验

残差：$q(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)$

相对误差：$\varepsilon(k)=\dfrac{q(k)}{x^{(0)}(k)}\times 100\%=\dfrac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\times 100\%$

平均相对误差 $\varepsilon(avg)=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\left|\varepsilon(k)\right|$

精度

$$P=\left(1-\varepsilon(avg)\right)\times 100\%$$

一般要求 $\varepsilon(k)<20\%$，最好 $\varepsilon(k)<10\%$；

一般要求 $p>80\%$，最好 $p>90\%$；

2. 关联度检验

绝对差 $\Delta(k)=\left|x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)\right|$关联系数 $\xi(k)=\dfrac{\Delta_{min}+\rho\Delta_{max}}{\Delta(k)+\rho\Delta_{max}}$

关联度 $r=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\xi(k)$

通常 $\rho=0.5$，$\omega_k=\dfrac{1}{k}$，$k=1,2,\ldots,n$，$\Delta_{max}=\max\Delta(k)$，$\Delta_{min}=\min\Delta(k)$

3. 后验差检验

原始序列均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x^{(0)}(k)$ 方差 $S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x^{(0)}(k)-\bar{x}\right)^2$

残差序列均值 $\bar{q}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(k)$ 方差 $S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(q(k)-\bar{q}\right)^2$

后验差比值 $C=\frac{S_2}{S_1}$ 小误差频率 $P=\left\{\left|q(k)-\bar{q}\right|<0.6745S_1\right\}$

精度等级	P	C
1级（好）	P≥0.95	C≤0.35
2级（合格）	0.80≤P<0.95	0.35<C≤0.5
3级（勉强）	0.70≤P<0.80	0.35<C≤0.5
4级（不合格）	P<0.70	0.65<C

五、* GM(2,1)模型

- 模型的提出：

　　将离散的随机数列分别进行一次累加、一次累减生成新序列，再对其进行建模计算，得到预测值。该模型主要用来描述非单调摆动发展序列。（ DGM(2,1)模型同理）。

模型的基本定义

1.原始数列（非负）： $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$

2.一次累加生成数列: $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$，其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{m=1}^{k}x^{(0)}(m)$.

3.一次累减生成数列: $\alpha^{(1)}X^{(0)}=(\alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\cdots,\alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$

其中，$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1),\quad (k=1,2,\cdots,n)$

4. $x^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列: $Z^{(1)}=\{z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n)\}$，其中

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),\quad k=2,3,\cdots,n.$$

模型算法

1. 构造GM(2,1)模型为

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+a_1x^{(0)}(k)+a_2z^{(1)}(k)=b$$

2. 引入矩阵记号

$$P=(a_1,a_2,b)^T \quad B=\begin{pmatrix} -x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x^{(0)}(n) & -z^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} \alpha^{(1)}x^{(0)}(2) \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^{(0)}(2)-x^{(0)}(1) \\ x^{(0)}(3)-x^{(0)}(2) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n)-x^{(0)}(n-1) \end{pmatrix}$$

利用最小二乘法求得参数 $P=(B^TB)^{-1}B^TY.$

模型算法

3. 构造GM(2,1)模型的白化方程： $\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=b$

4. 关于GM(2,1)白化方程的解：

若 $x^{(1)*}$ 是 $\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=b$ 的特解，$\overline{x}^{(1)}$ 是对应齐次方程 $\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=0$ 的通解，则 $x^{(1)*}+\overline{x}^{(1)}$ 是白化方程的通解。

5. 对模型作IAGO还原处理：

$$\hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1)$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$$

六、* DGM(2,1)模型

模型的基本定义

1.原始数列（非负）：$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$

2.一次累加生成数列：$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$，其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{m=1}^{k}x^{(0)}(m)$.

3.一次累减生成数列：$\alpha^{(1)}X^{(0)}=(\alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\cdots,\alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$

其中，$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1),\quad (k=1,2,\cdots,n)$

模型算法

1. 构造DGM(2,1)模型为

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+ax^{(0)}(k)=b$$

2. 引入矩阵记号

$$P=(a,b)^T, \qquad B=\begin{pmatrix} -x^{(0)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -x^{(0)}(n) & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix} \alpha^{(1)}x^{(0)}(2) \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^{(0)}(2)-x^{(0)}(1) \\ x^{(0)}(3)-x^{(0)}(2) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n)-x^{(0)}(n-1) \end{pmatrix}$$

利用最小二乘法求得参数 $P=(B^TB)^{-1}B^TY.$

模型算法

3. 构造DGM(2,1)模型的白化方程：
$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt}+a\frac{dx^{(1)}}{dt}=b$$

4. 得出时间响应式：
$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(\frac{b}{a^2}-\frac{x^{(0)}(1)}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}(k+1)+\frac{1+a}{a}(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})$$

5. 还原值：
$$\hat{x}^{(0)}(k+1)==\alpha^{(1)}\hat{x}^{(1)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$$

7、案例分析
2005年全国大学生数学建模A题　　长江水质的预测

长江的水质问题是一个复杂的非线性系统，但是由于数据样本少，需要预测的时间长，直接应用神经网络很难取得理想的效果。考虑到污水排放量的变化规律是一个不确定的系统且本题给出污水排放量数据样本比较少，还要求做出长达10年的预测，因此\采用灰色预测方法来预测未来的污水排放量。

对原题附件4中的数据进行整理可以得到10年的长江污水量排放数据，如下表所列：

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
污水量/亿吨	174	179	183	189	207	234	220.5	256	270	285