

# 目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第一章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 论文研究内容及结构安排	5
第二章 预备知识	7
2.1 张量的相关预备知识	7
2.2 矩阵和向量的相关预备知识	10
第三章 关于三种非凸张量模型补全恢复的RIP研究	13
3.1 基于张量 $\ \mathcal{X}\ _* - \ \mathcal{X}\ _F$ 模型补全的RIP条件	13
3.2 基于张量 $\ \mathcal{X}\ _* - \ \mathcal{X}\ _F$ 模型部分支集已知的恢复条件	21
3.3 基于 $\ \mathcal{X}\ _* - \alpha\ \mathcal{X}\ _F$ 模型张量恢复的 $(L_2, L_1)$ -RIP 条件	26
3.4 本章小结	31
第四章 总结与展望	33
参考文献	35
在学期间取得的科研成果	39
致 谢	41

## 摘 要

现代计算机技术的飞速发展导致了多维数据(张量数据)的广泛存在. 传统的基于向量和矩阵的数据分析其本质上是一维和二维的, 这限制了它从多维角度提取信息的有效性. 另一方面, 基于张量的多线性数据分析表明, 张量模型能够充分利用多线性结构, 提供更好的理解和更高的精度. 张量作为向量和矩阵的一个自然推广, 从一些含有噪声的线性测量中进行张量补全恢复是目前机器学习, 信号处理, 图像处理等多个领域中的一个活跃课题. 本文在低Tucker秩情况下, 提出了三种基于非凸张量模型补全恢复的充分条件. 本文主要研究内容如下:

第一部分主要介绍了张量补全问题的背景及国内外研究现状. 第二部分主要介绍了本文涉及的张量, 矩阵和向量的预备知识. 第三部分主要介绍了相关的理论成果. 限制等距条件在稀疏优化中具有重要的意义, 它是信号稀疏性恢复的保证. 在压缩感知和矩阵补全中, 基于 $L_1$ ,  $L_*$ 以及 $L_1 - L_2$ 和 $L_* - L_F$ 优化模型的限制等距条件已经获得较丰富的成果. 本文将推广到张量模型上. 首先在基于Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 的优化模型下, 研究低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的限制等距性质(RIP), 给出了限制等距性的常数 $\delta_{2r_n}$ 的一个界, 以及张量补全恢复的一个误差界限. 其次建立了在Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 的优化模型下部分先验支撑已知情况下进行的鲁棒恢复, 并获得了恢复误差估计. 最后基于Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \alpha\|\mathcal{X}\|_F$  ( $0 < \alpha \leq 1$ )的优化模型下, 在脉冲噪声的情况下研究低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的广义 $(L_2, L_1)$ -限制等距性质( $(L_2, L_1)$ -RIP), 并给出了低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的充分条件以及恢复的误差. 第四部分进行了全文的总结与展望.

**关键词:**  $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 最小化; 限制等距性; 低秩张量恢复; 先验支撑; 脉冲噪声



## ABSTRACT

The rapid development of modern computer technology has led to the widespread existence of multidimensional data (tensor data). Traditional vector and matrix-based data analysis is one-dimensional and two-dimensional in nature, which limits its effectiveness in extracting information from multi-dimensional perspectives. On the other hand, tensor-based multilinear data analysis shows that tensor models can make full use of multilinear structures, providing better understanding and higher accuracy. As a natural generalization of vectors and matrices, tensor completion recovery from some linear measurements containing noise is an active topic in many fields such as machine learning, signal processing, and image processing. In this paper, in the case of low Tucker rank, three sufficient conditions for completion recovery based on non-convex tensor models are proposed. The main research contents of this paper are as follows:

The first part introduces the background of the tensor complementary problem and the current state of research in China and abroad. The second part introduces the preparatory knowledge of tensors, matrices and vectors involved in this paper. The third part introduces the related theoretical results. Restricted isometric conditions are important in sparse optimisation as a guarantee of signal sparsity recovery. In compressed sensing and matrix complementary, the restricted isometry condition based on  $L_1$ ,  $L_*$  and  $L_1 - L_2$  and  $L_* - L_F$  optimisation models has yielded rich results. In this paper, we extend them to tensor models. Firstly, we study the restricted isometric property (RIP) of low-rank tensor  $\mathcal{X}$  recovery under the optimisation model based on the Tucker rank sum  $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ , and give a bound on the constant  $\delta_{2r_n}$  for restricting isometric properties and an error condition for tensor complementary recovery. An error bound for tensor complement recovery is given. Secondly, the robust recovery under the optimisation model of Tucker rank sum  $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$  with partially known a priori support is established, and an estimate of the recovery error is obtained. Finally, the generalised  $(L_2, L_1)$ -restriction isometric property of low-rank tensor  $\mathcal{X}$  recovery is investigated in the presence of impulsive noise based on the optimisation model with Tucker rank sum  $\|\mathcal{X}\|_* - \alpha\|\mathcal{X}\|_F$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) restricted isometric property ( $(L_2, L_1)$ -RIP), and gives sufficient conditions for the recovery of the low-rank tensor  $\mathcal{X}$  as well as the error of the recovery. The fourth part concludes the paper with an outlook.

**Key words:**  $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$  minimisation; restricted isometry property; low-rank tensor recovery; partially support; impulsive noise



## 主要符号表

符号	含义
$R$	实数集
$R^{m \times n}$	实矩阵集
$\mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$	$N$ 阶实张量集
$\mathfrak{F}$	测量算子
$T$	支撑集
$\mathcal{I}$	单位张量
$\text{rank}(X)$	矩阵 $X$ 的秩
$\text{rank}(\mathcal{X})$	张量 $\mathcal{X}$ 的秩
$X^T$	矩阵 $X$ 的转置
$X_{ij}$	矩阵 $X$ 中 $(i, j)$ 处的元素
$\mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_N}$	张量 $\mathcal{X}$ 中 $(i_1 i_2 \cdots i_N)$ 处的元素
$\mathcal{X}_{(i)}$	张量 $\mathcal{X}$ 沿模- $i$ 展开得到的矩阵
$\ X\ _*$	矩阵 $X$ 的核范数
$\ \mathcal{X}\ _*$	张量 $\mathcal{X}$ 的核范数
$\ X\ _F$	矩阵 $X$ 的 Frobenius 范数
$\ \mathcal{X}\ _F$	张量 $\mathcal{X}$ 的 Frobenius 范数
$\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$	由 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ 组成的对角矩阵
$\langle X, Y \rangle$	矩阵 $X$ 和矩阵 $Y$ 的内积
$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$	张量 $\mathcal{X}$ 和张量 $\mathcal{Y}$ 的内积
<b>RIP</b>	限制等距性
$\delta$	限制等距常数
$\theta$	限制正交常数
$b$	观测值
$B$	误差集合
$e$	误差



## 第一章 绪论

### 1.1 研究背景及意义

近年来,随着大数据时代的到来,数据渐渐从一维到二维甚至更高维,同时,这些数据也在以指数级的方式去不断的增加,它的特点包括数量庞大,维度较多,而且这些数据的来源也是多方面的,而张量作为多维数据的一种自然表达,其中一项很重要的意义就是能够用一种数据方式表达这个世界上任意一个物体(因为我们要对这个物体进行运算,就必须先转化成数据),并且已广泛应用于许多领域,如图像处理<sup>[1]</sup>、数据分析<sup>[2]</sup>、信号处理<sup>[3]</sup>、扩散核磁共振<sup>[4]</sup>和超图理论<sup>[5]</sup>.比如一张黑白照片图1.1的(a),众所周知它是一个由黑色像素点和白色像素点两个维度所构成的,当人们需要储存或者恢复这种黑白图片的时候,可以用向量模型或者矩阵模型来进行填充恢复,那如果再给它加一个彩色的维度,就变为一张彩色图片图1.1的(b),这个时候单单靠向量和矩阵来表达或者填充恢复就有点繁琐了,那如果再加一个时间维度呢,这就变为了一个彩色的视频,此时如果人们还要用向量或者矩阵模型来进行储存或者恢复就更加繁琐,甚至可能效果不理想.而张量模型能够充分利用多线性结构,提供更好的理解和更高的精度,此时人们如果要对这个彩色视频进行储存或者恢复就可以使用张量模型来处理解决,这种情况下就体现了张量在处理多维数据的重要性,因此越来越多的学者开始对张量进行大量的研究.而向量可以看为是一个一阶张量,矩阵可以看为是一个二阶张量,那么自然而然许多向量,矩阵上的性质和理论方法也可以推广至张量上.

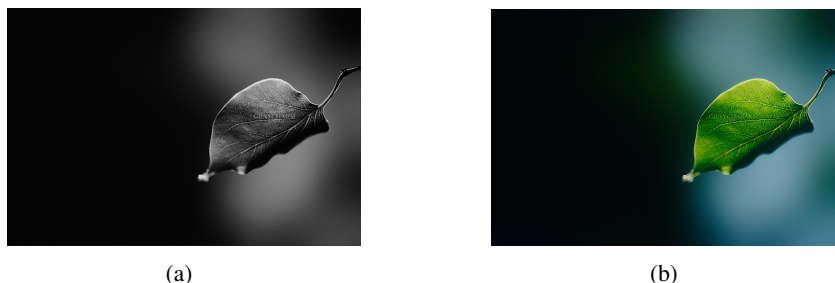


图 1.1: (a) 黑白图片; (b) 彩色图片.

在现实生活中,尤其是在科技,互联网发达的今天,我们无时无刻不和数据打交道,无论是发送数据还是接受数据,往往都会受到一些噪声的干扰,或者设备的问题从而导



致我们发送或者接受到的数据是缺失的, 不完整的, 严重影响了数据的使用. 因此为了尽可能的保证数据的完整性, 以及对数据恢复算法提供必要的保障, 也迎合了当今社会对数据处理的需求, 对张量及其理论的研究是具有重大意义的, 此外深入研究在有噪声干扰环境下保证数据恢复所需的充分条件以及误差估计, 同样对张量填充恢复具有重要意义.

## 1.2 国内外研究现状

压缩感知<sup>[6-8]</sup>是近年来信号领域研究的热点之一, 也是稀疏优化研究的推动力. 压缩感知, 也被称为压缩采样或者稀疏采样, 是一种寻找欠定线性系统的稀疏解的方法. 用于获取和重构稀疏或可以被压缩的信号. 由于Donoho, Candes和Tao的工作, 这个领域有了长足的发展, 近年来已经得到广泛的关注和应用. 压缩感知理论认为, 如果信号是稀疏的, 则可以由远低于经典的采样定理(奈奎斯特采样定理)规定的采样点重建原始信号, 其本质是在采样过程中完成了数据压缩的过程. 稀疏信号或图像可以由不完全信息重构. 基于Candes, Romberg, Tao的开创性研究<sup>[6,9]</sup>和Donoho的开创性研究<sup>[7]</sup>, 压缩感知作为一个新兴领域, 引发了数学、工程和医学成像领域的大量研究. 该理论的关键假设是: 恢复的信号是稀疏的, 或者至少可以用稀疏的信号很好地近似. 其稀疏性通常用它的 $L_0$ 范数来衡量<sup>[7,9,10]</sup>: 它的目标是从一个欠定系统中恢复一个未知信号 $x \in R^n$ :

$$b = Ax + e, \quad (1.1)$$

式中 $b \in R^m$ 是已知的观测向量, 矩阵 $A \in R^{m \times n} (m \ll n)$ 为线性测量矩阵,  $e \in R^m$ 是测量的误差. 要从(1.1)中恢复信号 $x$ , 最直接的方法是通过求解 $L_0$ 最小化问题找到最稀疏的信号:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & b - Ax \in B, \end{aligned} \quad (1.2)$$

式中 $\|x\|_0 := |\text{supp}(x)|$ ,  $|\text{supp}(x)|$ 表示 $x$ 的支撑集或简称为支撑,  $|\text{supp}(x)|$ 表示 $\text{supp}(x)$ 的基数, 也就是集合 $\text{supp}(x)$ 中非零元素的个数,  $B$ 是由误差结构决定的有界集合. 然而, 由于 $L_0$ 范数是非凸且不连续的, 这个问题(1.2)是NP难的, 因此在高维背景下计算上是不可行的. 为了得到(1.2)的(近似)解, 于是Candes和Tao在文献 [11]中提出了用 $L_1$ 最小化问题作为模型(1.2)的凸松弛, 即

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \end{aligned} \quad (1.3)$$

也称为基追踪(BP)<sup>[12]</sup>模型. 在受到噪声干扰的情况下, 即 $e \neq 0$ , 问题(1.3)得到推广. 例如, 当(1.1)中的 $e$ 为 $L_2$ 有界噪声时, 即 $\|e\|_2 \leq \eta$ <sup>[9,13]</sup>, 提出如下模型:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \|b - Ax\|_2 \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.4)$$

式中 $\varepsilon \geq \eta$ 为常数. 对于从(1.1)中恢复 $x$ 的 $L_1$ 最小化方法已经有了很好的研究. 大量关于 $L_1$ 最小化的文献已经出现. 例如, 压缩感知中应用最广泛的框架之一, 基于限制等距性质(RIP)<sup>[11]</sup>的不同充分条件, 已在文献 [6, 7, 9]中得出结果.

最近, Yin等人<sup>[14,15]</sup>提出了 $L_1 - L_2$ 最小化模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x\|_1 - \|x\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \end{aligned} \quad (1.5)$$

由于 $L_1 - L_2$ 范数比 $L_1$ 范数更接近 $L_0$ 范数, 因此使用 $L_1 - L_2$ 范数最小化更具有稀疏性<sup>[14-16]</sup>. 当模型(1.5)受到噪声干扰时:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x\|_1 - \|x\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax - b\|_2 \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.6)$$

另外, 在模型(1.6)的基础上, 利用先验支撑信息正如时间序列信号处理<sup>[17]</sup>, 文献 [17, 18]利用先验支撑信息提出新的逼近模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x_{T^c}\|_1 - \|x_{T^c}\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax - b\|_2 \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.7)$$

式中, 集合 $T$ 是 $x$ 的部分已知支撑集,  $T^c$ 是 $T$ 在 $R^n$ 上的补集.

随后Chartrand和Staneva<sup>[19]</sup>又提出了受限 $p$ ( $0 < p \leq 1$ )-等距性( $L_p$ -RIP), 即:

$$(1 - \delta_s)\|x\|_2^p \leq \|Ax\|_p^p \leq (1 + \delta_s)\|x\|_2^p, \quad (1.8)$$

对于所有 $s$ -稀疏信号 $x$ 都成立. 基于 $L_p$ -RIP, Chartrand<sup>[20]</sup>提供了通过 $L_p$ 最小化方法精确恢复信号的充分条件, 还有Cai等人<sup>[21]</sup>给出了基于 $L_1$ -RIP的精确稳定的恢复低秩矩阵的充分条件.

近年来, Liu和Lou提出了从式(1.1)中恢复 $x \in R^n$ 的非凸 $L_1 - \alpha L_2$  ( $0 < \alpha \leq 1$ )的最小化方法<sup>[22,23]</sup>:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x\|_1 - \alpha \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & b - Ax \in B, \end{aligned} \quad (1.9)$$

显然, 当 $\alpha = 1$ 时, 方法(1.9)可简化为 $L_1 - L_2$ 最小化法<sup>[14,15]</sup>. Yin等人<sup>[14]</sup>和Lou等人<sup>[15]</sup>分别研究了 $B = \{e \mid \|e\|_2 \leq \eta\}$ 和 $B = \{0\}$ 条件下的 $L_1 - L_2$ 最小化问题. 他们通过 $L_1 - L_2$ 最小化法得出了基于RIP从(1.1)中恢复 $x$ 的充分条件. 与(1.2)的解相比,  $L_1, L_1 - \alpha L_2$ 及其变体的方法可以给出更接近(1.2)解的近似, 并提高了解的稀疏性.

张量恢复是根据已有数据对缺失值的影响和低秩假设实现缺失值恢复. 低秩张量恢复正如稀疏信号, 低秩矩阵恢复一样, 其基本问题是从较少的测量值 $\mathfrak{F}(\mathcal{X}) = b$ 中恢复(近似)低秩的张量, 其中 $\mathfrak{F}$ 是一个线性算子,  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 是一个 $N$ 阶张量. 由此可见, 最为直接的求解方法为秩最小化模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}} \quad & \text{rank}(\mathcal{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathfrak{F}(\mathcal{X}) = b, \end{aligned} \quad (1.10)$$

式中 $b$ 为测量值. 由于秩函数是非凸且不连续的, 因而这个模型的求解一般来说是NP难的. 因此, 正如矩阵恢复一样<sup>[24]</sup>, 对模型(1.10)用核范数进行凸优化来逼近秩函数最小化, 见文献[3,25]. 即:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}} \quad & \|\mathcal{X}\|_* \\ \text{s.t.} \quad & \mathfrak{F}(\mathcal{X}) = b, \end{aligned} \quad (1.11)$$

式中,  $\|\mathcal{X}\|_* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathcal{X}_{(i)}\|_*$ ,  $\mathcal{X}_{(i)}$ 是张量 $\mathcal{X}$ 的模- $i$ 展开,  $\|\mathcal{X}_{(i)}\|_*$ 是矩阵 $\mathcal{X}_{(i)}$ 的核范数, 即 $\mathcal{X}_{(i)}$ 的奇异值之和. 最近, Shi和Han<sup>[26]</sup>在Lai和Yin<sup>[27]</sup>等人研究的矩阵模型下:

$$\begin{aligned} \min_{X \in R^{m \times n}} \quad & \|X\|_* + \frac{1}{2\alpha} \|X\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & AX = b, \end{aligned} \quad (1.12)$$

将此模型推广至张量补全模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}} \quad & \|\mathcal{X}\|_* + \frac{1}{2\alpha} \|\mathcal{X}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathfrak{F}(\mathcal{X}) = b, \end{aligned} \quad (1.13)$$

研究了该模型的恢复保证及相关理论(如其零空间性质,受限等距性质和球面截面性质),证明了它们可以有效地恢复低秩张量.

### 1.3 论文研究内容及结构安排

由于测量算子 $\mathfrak{S}$ 需要满足某些特性就可以保证原始数据稳定或鲁棒地恢复(即张量补全模型恢复的充分条件),所以本文主要使用张量补全的 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 模型基于测量算子 $\mathfrak{S}$ 的限制等距性展开研究.

第一章为绪论,首先介绍了课题研究的背景及意义,其次详细介绍了从压缩感知到张量模型恢复的研究现状,最后是论文研究内容及结构安排.

第二章主要介绍本文涉及的张量,矩阵和向量的预备知识.

第三章主要介绍相关的理论成果,本文在基于 $L_1, L_*$ 以及 $L_1 - L_2$ 和 $L_* - L_F$ 优化模型的限制等距条件的基础上.将其推广到张量上,首先在基于Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 的优化模型下,研究低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的限制等距性质(RIP),给出了限制等距性的常数 $\delta_{2r_n}$ 的一个界,以及张量补全恢复的一个误差界限.其次建立了在Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 的优化模型下部分先验支撑已知情况下进行的鲁棒恢复,并获得了恢复误差估计,并且举例与已有的RIP常数进行了比较.最后基于Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \alpha\|\mathcal{X}\|_F(0 < \alpha \leq 1)$ 的优化模型下,在脉冲噪声的情况下研究低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的广义 $(L_2, L_1)$ -限制等距性质 $((L_2, L_1)$ -RIP),并给出了低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的充分条件以及恢复的误差.

第四章进行了全文的总结,并对未来工作进行了展望.



## 第二章 预备知识

## 2.1 张量的相关预备知识

本章介绍张量, 矩阵和向量的部分基础知识, 相关理论, 作为后续章节所提模型的基础. 张量在传统代数和物理学中被定义为一种高维数组, 而矩阵中的一些概念如秩、特征值、奇异值分解等都被扩展到张量上来, 因为张量分解的不同, 导致张量秩的定义并不唯一. 这里只介绍本文所用的一种张量分解和秩的定义.

本文中向量用小写字母 $x$ 表示, 矩阵用大写字母 $X$ 表示, 张量则用花体字母 $\mathcal{X}$ 表示. 一个 $N$ 阶秩-1张量由 $N$ 个向量(维数可能不一样)的外积得到, 每个向量空间都有自己的坐标系. 图2.1为一个三阶张量和一个在超对角线上是1, 其它地方是0的单位张量.

张量的F范数为 $\|\mathcal{X}\|_F = \sqrt{\langle \mathcal{X}, \mathcal{X} \rangle} = \sqrt{\sum_{i_1 i_2 \dots i_N} |\mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_N}|^2}$ , 即每个元素的平方之和开根号. 张量的内积为 $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{i_1 i_2 \dots i_N} \mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_N} \mathcal{Y}_{i_1 i_2 \dots i_N}$ , 与矩阵的内积相似.

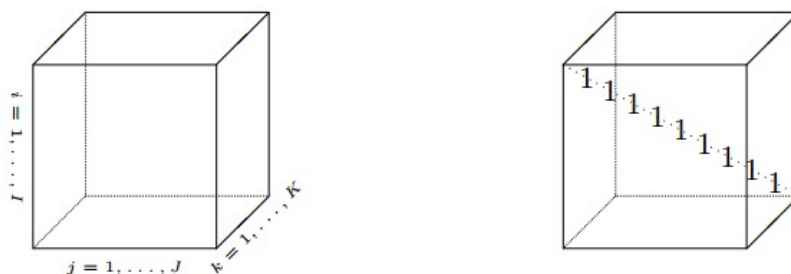


图 2.1: 左图为一个三阶张量, 右图为一个单位张量.

**定义 2.1.1 (张量切片)** [28]: 张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 的切片是一个二维的截面, 通过给定任意两个下标 $i_m$ 和 $i_n$ , 再固定其余下标而得到的.

图2.2表示一个三阶张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 的水平、侧面和前面的切片, 它们分别用 $\mathcal{X}_{i, :, :}$ ,  $\mathcal{X}_{:, j, :}$ ,  $\mathcal{X}_{:, :, k}$ 来表示.

**定义 2.1.2 (张量纤维)** [28]: 张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 的纤维表示为只保留一个下标需要变, 其余的下标均不变而得到的一路阵列, 这是一种从张量中抽取向量的操作. 特别地, 对三阶张量而言, 用 $\mathcal{X}_{:, j, :}$ 表示为竖直纤维或列纤维, 用这个 $\mathcal{X}_{i, :}$ 表示为水平纤维或行纤维, 用这个 $\mathcal{X}_{:, j, :}$ 表示为为纵深纤维或管纤维, 如图2.3所示.

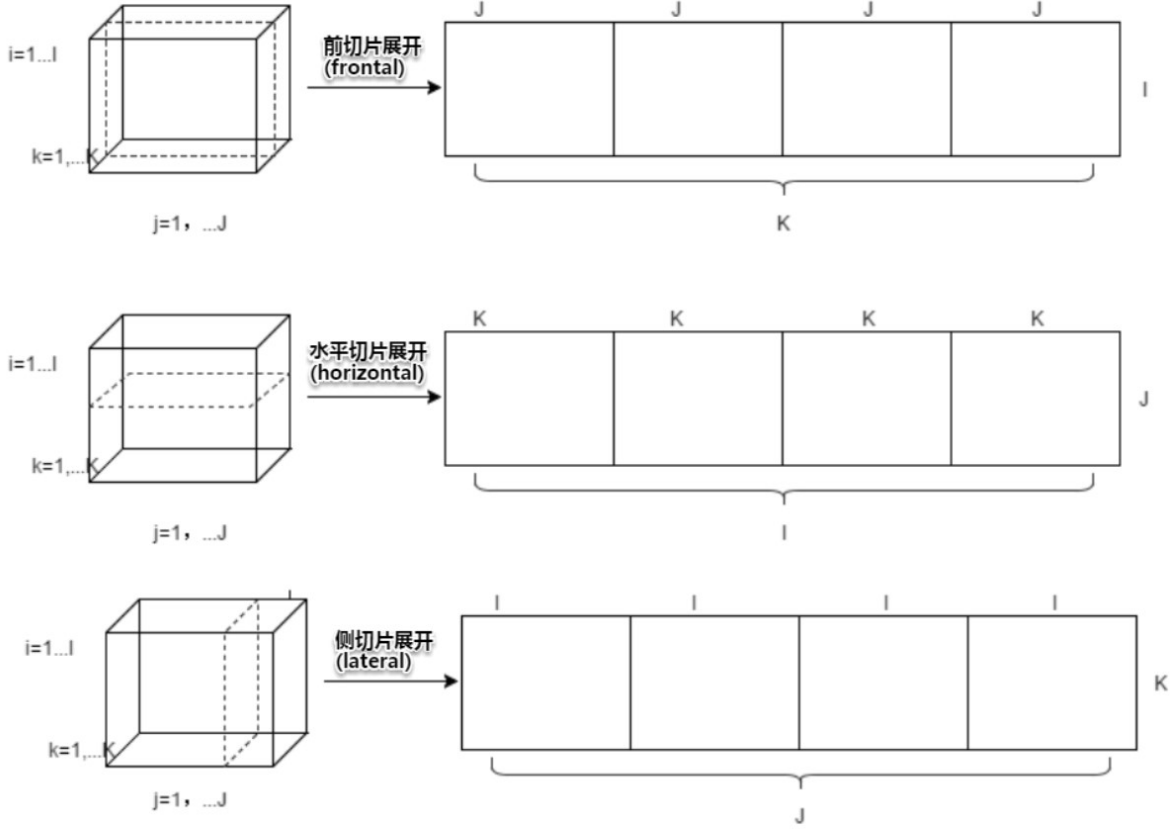


图 2.2: 三阶张量切片.

**定义 2.1.3 (张量的模- $n$ 展开)**<sup>[28]</sup>: 给定张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ , 则张量的模- $n$ 展开的矩阵被定义为  $\mathcal{X}_{(n)} = \text{Unfold}_n(\mathcal{X}) \in \mathbb{R}^{I_n \times J_n}$ , 张量  $\mathcal{X}$  的索引为  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  的元素映射为矩阵  $\mathcal{X}_{(n)}$  的第  $(i, j)$  个元素, 其中  $i = i_n, j = 1 + \prod_{k=1, k \neq n}^N (i_k - 1)J_k, J_k = \prod_{m=1, m \neq n}^{k-1} I_m$ .

张量的模- $n$ 展开的逆运算是矩阵模- $n$ 折叠  $\text{Fold}_n(\mathcal{X}_{(n)}) = \mathcal{X}$ , 即矩阵折叠为张量. 下面是张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2}$  以模-1、模-2、模-3展开的例子.

$$\mathcal{X}_{(:, :, 1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathcal{X}_{(:, :, 2)} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \mathcal{X}_{(:, :, 3)} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{X}_{(:, :, 1)}, \mathcal{X}_{(:, :, 2)}, \mathcal{X}_{(:, :, 3)}$  分别表示张量前面切片的第一面, 前面切片的第二面, 前面切片的第三面, 则张量  $\mathcal{X}$  的模-1、模-2、模-3展开分别为:

$$\mathcal{X}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \mathcal{X}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \mathcal{X}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

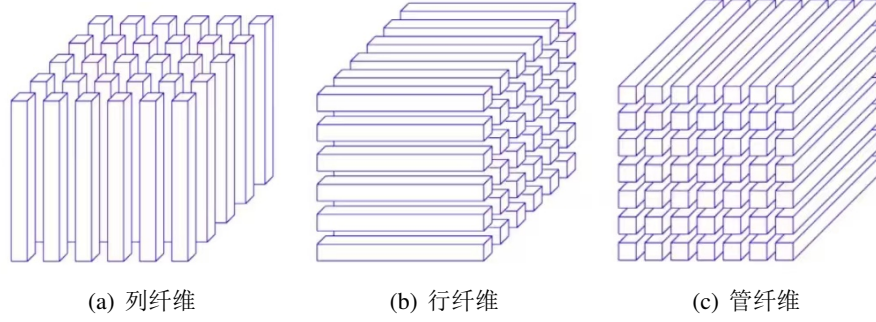


图 2.3: 三阶张量纤维图.

**定义 2.1.4 (张量与矩阵的 $n$ 模积)** [28]: 给定张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  与矩阵  $U \in \mathbb{R}^{J \times I_n}$ , 则它们的 $n$ 模积表示为:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times_n U \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times J \times I_{n+1} \times \dots \times I_N}$$

, 其中  $\mathcal{Z}_{i_1 \dots i_{n-1} j i_{n+1} \dots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_N} U_{j i_n}$ .

对于张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  和一组矩阵  $U^{(k)} : k = 1, 2, \dots, N$  的所有模积可以表示为:

$$\mathcal{X} \times_n \{U\} = \mathcal{X} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \times_3 \dots \times_N U^{(N)}.$$

张量与矩阵的 $n$ 模积有如下性质: 设一个 $N$ 张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ ,

(a) 给定矩阵  $A \in \mathbb{R}^{I_m \times J_m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{I_n \times J_n}$ ,  $m \neq n$ , 则

$$(\mathcal{X} \times_m A) \times_n B = (\mathcal{X} \times_n B) \times_m A = \mathcal{X} \times_m A \times_n B.$$

(b) 给定矩阵  $A \in \mathbb{R}^{I \times J_n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{K \times L}$ , 则

$$(\mathcal{X} \times_n A) \times_n B = \mathcal{X} \times_n (BA).$$

**定义 2.1.5 (Tucker分解)** [29,30]: 对于一个给定的 $N$ 阶张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ , 其Tucker分解定义如下:

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \times_3 \dots \times_N U^{(N)}$$

, 式中  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \times \dots \times r_N}$  表示核张量,  $U^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times r_n}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) 为因子矩阵.

**定义 2.1.6 (Tucker秩)** [29,30]: 对于给定的张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ , 其Tucker秩定义如下:



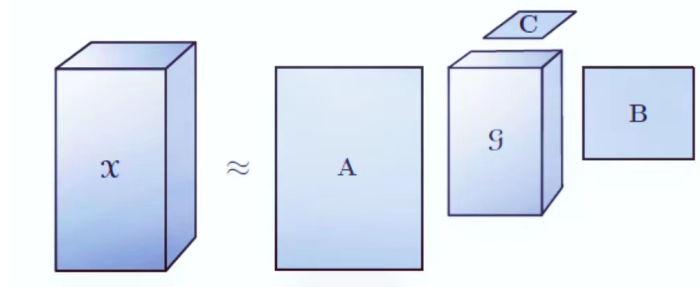


图 2.4: 一个三阶张量的 Tucker 分解示意图

$$\text{rank}_{\text{Tucker}}(\mathcal{X}) = (\text{rank}(\mathcal{X}_{(1)}), \text{rank}(\mathcal{X}_{(2)}), \dots, \text{rank}(\mathcal{X}_{(N)})) = (r_1, r_2, \dots, r_N).$$

**定义 2.1.7 (秩一张量)**<sup>[33]</sup>: 一个  $N$  阶秩一张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  定义为  $N$  个向量  $u$  的外积: 即

$$\mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_N} = u_{i_1}^{(1)} u_{i_2}^{(2)} \dots u_{i_N}^{(N)}.$$

**定义 2.1.8 (Kronecker积)**<sup>[34]</sup>: 矩阵  $A \in R^{I \times J}$  和矩阵  $B \in R^{K \times L}$  的 Kronecker 积用  $A \otimes B$  表示, 其大小为  $(IK) \times (JL)$ , 如下:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1J}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2J}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}B & a_{I2}B & \dots & a_{IJ}B \end{pmatrix}.$$

## 2.2 矩阵和向量的相关预备知识

**定义 2.2.1 (奇异值分解 SVD)**<sup>[31,32]</sup>: 设矩阵  $F \in R^{I_1 \times I_2}$  是一个秩为  $r$  的矩阵, 则存在两个正交矩阵  $U \in R^{I_1 \times r}$  和  $V \in R^{I_2 \times r}$ , 满足:

$$F = USV^T,$$

式中  $S = \Sigma(F) = \text{diag}(\sigma_1(F), \dots, \sigma_r(F)), \sigma_i(F), i = 1, \dots, r$ , 表示矩阵  $F$  的第  $i$  大的奇异值,  $\sigma_1(F) \geq \sigma_2(F) \geq \dots \geq \sigma_r(F) \geq 0$ .

**定义 2.2.2**<sup>[8]</sup>: 设  $0 \leq p \leq 1$  或  $p = 2$ , 对任意的  $s$ -稀疏信号  $x$  (信号中的非零元素个数最多为  $s$  个), 使得

$$(1 - \delta_s^{lb}) \|x\|_2^p \leq \|Ax\|_p^p \leq (1 + \delta_s^{ub}) \|x\|_2^p,$$

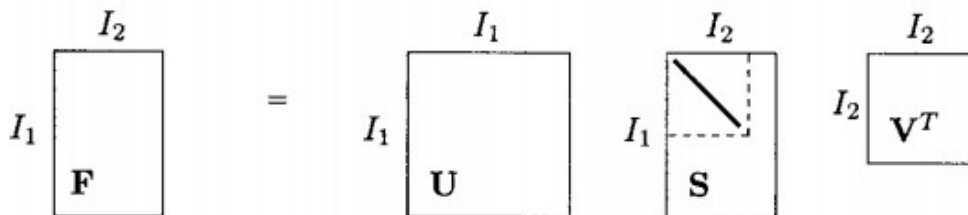


图 2.5: 矩阵的SVD分解

有最小的 $\delta_s^{lb}$ 和 $\delta_s^{ub}$ 存在, 则称测量矩阵 $A$ 的 $s$ 阶 $(L_2, L_p)$ 限制等距常数对 $(\delta_s^{lb}, \delta_s^{ub})$ . 若对于相当大的 $s$ , 上式中的 $\delta_s^{lb}$ 和 $\delta_s^{ub}$ 是最小的, 则称 $A$ 满足 $(L_2, L_p)$ -限制等距性(简称:  $(L_2, L_p)$ -RIP).

**定义2.2.3**<sup>[11]</sup>: 对所有 $k$ -稀疏信号 $x \in R^n$ (即最多有 $k$ 个非零项), 如果存在最小常数 $\delta_k \in (0, 1)$ 使得

$$(1 - \delta_k)\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_k)\|x\|_2^2,$$

成立, 则称矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 满足 $k$ 阶限制等距性(RIP),  $\delta_k$ 为 $k$ 阶的限制等距常数(RIC).

**定义2.2.4**<sup>[11]</sup>: 对每个 $k_1$ -稀疏信号 $x$ 和 $k_2$ -稀疏信号 $y$ , 若存在一个最小的常数 $\theta_{k_1, k_2} \geq 0$ , 使得

$$|\langle Ax, Ay \rangle| \leq \theta_{k_1, k_2} \|x\|_2 \|y\|_2,$$

成立, 则称矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 满足 $(k_1, k_2)$ 阶限制正交性(ROP),  $\theta_{k_1, k_2}$ 是 $(k_1, k_2)$ 阶的限制正交常数(ROC).



### 第三章 关于三种非凸张量模型补全恢复的RIP研究

本章主要介绍了相关的理论成果, 限制等距条件在稀疏优化中具有重要的意义, 它是稀疏性的保证. 在压缩感知和矩阵补全中, 基于 $L_1$ ,  $L_*$ 以及 $L_1 - L_2$ 和 $L_* - L_F$ 优化模型的限制等距条件已经获得较丰富的成果. 本章将其推广到张量上. 首先在基于Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 的优化模型下, 研究低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的限制等距性质(RIP), 给出了限制等距性的常数 $\delta_{2r_n}$ 的一个界, 以及张量补全恢复的一个误差界限. 其次建立了在Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 的优化模型下部分先验支撑已知情况下进行的鲁棒恢复, 并获得了恢复误差估计. 最后基于Tucker秩和 $\|\mathcal{X}\|_* - \alpha\|\mathcal{X}\|_F$  ( $0 < \alpha \leq 1$ )的优化模型下, 在脉冲噪声的情况下研究低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的广义 $(L_2, L_1)$ -限制等距性质 $((L_2, L_1)$ -RIP), 并给出了低秩张量 $\mathcal{X}$ 恢复的充分条件以及恢复的误差.

#### 3.1 基于张量 $\|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F$ 模型补全的RIP条件

本文将模型(1.5)推广至低Tucker秩张量补全情形, 针对张量Tucker秩极小化问题建立如下松弛模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}} \quad & \|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F \\ \text{s.t.} \quad & \mathfrak{F}(\mathcal{X}) = b, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

对于有噪声的情况, 上述模型更改如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}} \quad & \|\mathcal{X}\|_* - \|\mathcal{X}\|_F \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathfrak{F}(\mathcal{X}) - b\|_2 \leq \tau, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

式中 $\tau$ 为一个误差, 这是向量和矩阵<sup>[27]</sup>到张量的一个直接推广.

对于模型(1.5)的限制等距条件已经被给出, 而且当测量算子 $A$ 满足较好的限制等距性时, 该模型也可以精确或者稳定的恢复信号 $x$ , 甚至比原来的 $L_1$ 模型效果更好<sup>[4]</sup>. 本文讨论模型(3.1.1)中的测量算子 $\mathfrak{F}$ 的限制等距条件, 当测量算子 $\mathfrak{F}$ 满足较好的限制等距性时, 模型(3.1.1)也可以精确或者稳定的恢复低秩张量 $\mathcal{X}$ .

一个 $N$ 阶张量的 $n$ -秩 $\text{rank}_n(\mathcal{X})$ 定义为模- $i$ 展开矩阵 $\mathcal{X}_{(i)}$ 的秩, 即秩为 $(r_1, \dots, r_N)$ , 其中,  $r_i = \text{rank}_i(\mathcal{X})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . 引入张量秩的序关系;  $\text{rank}(\mathcal{X}) \leq \text{rank}(\mathcal{Y}) \Leftrightarrow (\text{rank}_1(\mathcal{X}), \dots, \text{rank}_N(\mathcal{X})) \leq (\text{rank}_1(\mathcal{Y}), \dots, \text{rank}_N(\mathcal{Y})) \Leftrightarrow \text{rank}_i(\mathcal{X}) \leq \text{rank}_i(\mathcal{Y})$ ,  $i = 1, \dots, N$ .  $\|\mathcal{X}\|_F =$

$\sqrt{\langle \mathcal{X}, \mathcal{X} \rangle}$ ,  $\Sigma(X) = \text{diag}(\sigma_1(X), \dots, \sigma_n(X))$ ,  $\sigma_i(X)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 表示矩阵  $X$  的第  $i$  大的奇异值,  $\|X\|_2 = \sigma_1(X)$ .

张量高阶奇异值分解(HOSVD)<sup>[33]</sup>: 任意一个  $N$  阶张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  都可以写成以下乘积的形式:

$$\mathcal{X} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)}. \quad (3.1.3)$$

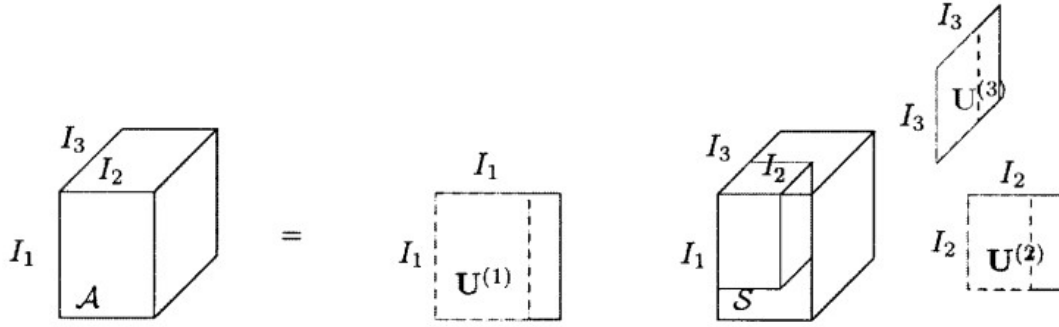


图 3.1: 三阶张量的HOSVD分解.

这个张量的HOSVD分解方式和张量的Tucker分解, 有点类似, 但它们的矩阵  $U$  并不一样, 下文会有所提到. 换个角度来看张量的HOSVD分解, 一个  $N$  阶张量的HOSVD 其实可以归结为  $N$  个矩阵的SVD. 因此, 一些矩阵上的性质就可以对应到张量上也同样适用. 其中  $\mathcal{S} \times_N U^{(N)}$  表示张量  $\mathcal{S}$  与矩阵  $U$  的  $n$  模积<sup>[28]</sup>.

注:

1.  $U^{(n)}$  是一个  $I_n \times I_n$  的正交矩阵 ( $n = 1, \dots, N$ ).
2.  $\mathcal{S}$  是一个核心子张量  $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$ , 通过将第  $n$  个索引固定到索引集  $\alpha$  而得到的张量,  $\mathcal{S}_{i_n}$  具有以下性质:
  - (1) 正交性: 对于任意的  $n$ ,  $\alpha \neq \beta$  的两个核心子张量  $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$  和  $\mathcal{S}_{i_n=\beta}$ , 都有  $\langle \mathcal{S}_{i_n=\alpha}, \mathcal{S}_{i_n=\beta} \rangle = 0$ .
  - (2) 有序性: 对于任意的  $n$  都有,  $\|\mathcal{S}_{i_n=1}\|_F \geq \|\mathcal{S}_{i_n=2}\|_F \geq \dots \geq \|\mathcal{S}_{i_n=I_n}\|_F \geq 0$ .

下面列出本文后续会用到的相关引理.

**引理3.1.2**<sup>[33]</sup>: 若张量  $\mathcal{X}$  的HOSVD如(3.1.3)所示, 当  $r_k$  为  $\|\mathcal{S}_{i_k=r_k}\|_F \geq 0$  的最大值时, 那么有  $\text{rank}(\mathcal{X}_{(k)}) = r_k$ .

**引理3.1.2**<sup>[33]</sup>: 张量  $\mathcal{X}$  的HOSVD如(3.1.3)所示, 由  $F$  范数的酉不变性可以得到,  $\|\mathcal{X}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{I_1} (\sigma_i^{(1)})^2 = \dots = \sum_{i=1}^{I_N} (\sigma_i^{(N)})^2 = \|\mathcal{S}\|_F^2$ .

**引理3.1.3** [35]: 若向量 $x$ 与向量 $x'$ 的支持集交集为空集,  $T, T' \subseteq \{1, \dots, N\}$ 且 $|T| \leq |s|$ ,  $|T'| \leq |s'|$ , 则 $|\langle \Phi x, \Phi x' \rangle| \leq \delta_{s+s'} \|x\|_2 \|x'\|_2$ .

下面主要讨论模型(3.1.1)与(3.1.2)低秩张量恢复的充分条件, 即RIP条件.

**定义3.1.1** [26]: (张量RIP) 设 $\mathcal{T}_{(r_1, r_2, \dots, r_N)} = \{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N} : \text{rank}(\mathcal{X}_{(i)}) \leq r_i, i = 1, \dots, N\}$  对于任意的 $\mathcal{X} \in \mathcal{T}_{(r_1, r_2, \dots, r_N)}$ , 若存在一个正常数 $\delta_{(r_1, r_2, \dots, r_N)}$ , 使得

$$(1 - \delta_{(r_1, r_2, \dots, r_N)}) \|\mathcal{X}\|_F^2 \leq \|\mathfrak{F}(\mathcal{X})\|_2^2 \leq (1 + \delta_{(r_1, r_2, \dots, r_N)}) \|\mathcal{X}\|_F^2 \quad (3.1.4)$$

成立, 则测量算子 $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足 $\delta_{(r_1, r_2, \dots, r_N)}$ 阶的RIP条件.

众所周知, 对任意一个非零张量 $\mathcal{H}$ , 有 $\|\mathcal{H}\|_F > 0$ , 设 $\mathcal{H}$ 做HOSVD分解得到 $\mathcal{H} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)}$ , 从文献 [36,37]可知,  $\text{rank}(\mathcal{H}) \leq \text{rank}(\mathcal{S})$ , 接着分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \dots$ , 其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \mathcal{S}_{\{i_n:1, \dots, r_n\}} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)}, \\ \mathcal{H}_1 &= \mathcal{S}_{\{i_n:r_n+1, \dots, 2r_n\}} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

式中 $\mathcal{S}_{\{i_n:\alpha\}}$ 是通过将第 $n$ 个索引固定到索引集 $\alpha$ 而得到的张量, 其他为0, 而且 $\text{rank}(\mathcal{H}_i) \leq \text{rank}(\mathcal{S}_{\{i_n:ir_n+1, \dots, (i+1)r_n\}}) \leq (I_1, \dots, r_n, \dots, I_n)$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ). 由于 $F$ 范数的酉不变性,  $\|\mathcal{H}_0\|_F = \|\mathcal{S}_{\{i_n:1, \dots, r_n\}}\|_F$ ,  $\|\mathcal{H}_1\|_F = \|\mathcal{S}_{\{i_n:r_n+1, \dots, 2r_n\}}\|_F, \dots$ , 令 $h = (\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{I_n}^{(n)})$ ,  $h_0 = (\sigma_1^{(n)}, \dots, \sigma_{r_n}^{(n)})$ ,  $h_1 = (\sigma_{r_n+1}^{(n)}, \dots, \sigma_{2r_n}^{(n)})$ ,  $h_2 = (\sigma_{2r_n+1}^{(n)}, \dots, \sigma_{3r_n}^{(n)})$ ,  $\dots, \sigma_i^{(n)}$ 是模- $n$ 展开的第 $i$ 大奇异值. 通过HOSVD和引理3.1.2可以得到:

$$\|\mathcal{H}_i\|_F^2 = \|\mathcal{S}_{\{i_n:ir_n+1, \dots, (i+1)r_n\}}\|_F^2 = \sum_{j=ir_n+1}^{(i+1)r_n} (\sigma_j^{(n)})^2 = \|h_i\|_2^2, (i = 0, 1, \dots), \quad (3.1.5)$$

同理可以得到

$$\|\mathcal{H}_i\|_* = \|h_i\|_1, (i = 0, 1, \dots). \quad (3.1.6)$$

将引理3.1.3推广至张量情况如下:

**推论3.1.1:** 若存在两个不同的张量 $\mathcal{H}_m$ 和张量 $\mathcal{H}_n$ , 且它们的支持集的交集为空集,  $r_n, r_n' \subseteq \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ 且 $\text{rank}(\mathcal{H}_m) \leq r_n, \text{rank}(\mathcal{H}_n) \leq r_n'$ , 则有 $|\langle \mathfrak{F}(\mathcal{H}_m), \mathfrak{F}(\mathcal{H}_n) \rangle| \leq \delta_{r_n+r_n'} \|\mathcal{H}_m\|_F \|\mathcal{H}_n\|_F$ .

**证明:** 假设 $\mathcal{H}_m$ 和 $\mathcal{H}_n$ 是两个支持集不相交的单位张量, 则

$$2(1 - \delta_{r_n+r_n'}) \leq \|\mathfrak{F}(\mathcal{H}_m) \pm \mathfrak{F}(\mathcal{H}_n)\|_2^2 \leq 2(1 + \delta_{r_n+r_n'}),$$

由平行四边形恒等式可以得到

$$|\langle \mathfrak{F}(\mathcal{H}_m), \mathfrak{F}(\mathcal{H}_n) \rangle| \leq \frac{1}{4} \left| \|\mathfrak{F}(\mathcal{H}_m) + \mathfrak{F}(\mathcal{H}_n)\|_2^2 - \|\mathfrak{F}(\mathcal{H}_m) - \mathfrak{F}(\mathcal{H}_n)\|_2^2 \right| \leq \delta_{r_n+r_n'}.$$

**证毕.**

将文献 [38] 中对向量的结果改进并推广到张量, 我们获得如下定理.

**定理3.1.1:** 设任意的一个秩为 $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ 的 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 的张量, 如上述 $\mathcal{H}$ 的分解方式类似分解 $\mathcal{T}$ 而得到 $\mathcal{T}_0$ , 假设

$$\delta_{2r_n} < \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r_n}-1}}, \quad (3.1.7)$$

那么, 以下结论成立:

1. 设 $b = \mathfrak{F}(\mathcal{T})$ , 那么模型(3.1.1)的解 $\mathcal{T}^*$ 满足:

$$\|\mathcal{T}^* - \mathcal{T}\|_F \leq C_{2,r_n} \|\mathcal{T} - \mathcal{T}_0\|_*.$$

2. 设 $b = \mathfrak{F}(\mathcal{T}) + e$ , 这里的 $e$ 是任意小的误差参数,  $\|e\|_2 \leq \tau$ , 那么模型(3.1.2)的解 $\mathcal{T}^*$ 满足:

$$\|\mathcal{T}^* - \mathcal{T}\|_F \leq C_{1,r_n} \tau + C_{2,r_n} \|\mathcal{T} - \mathcal{T}_0\|_*.$$

式中,

$$r_n = \min\{r_i : i = 1, \dots, N\},$$

$$C_{1,r_n} = \frac{4\sqrt{r_n(1 + \delta_{2r_n})}}{\sqrt{r_n} - 1 - [(\sqrt{2} + 1)\sqrt{r_n} + \sqrt{2} - 1]\delta_{2r_n}}, \quad (3.1.8)$$

$$C_{2,r_n} = \frac{2 + (2\sqrt{2} - 2)\delta_{2r_n}}{\sqrt{r_n} - 1 - [(\sqrt{2} + 1)\sqrt{r_n} + \sqrt{2} - 1]\delta_{2r_n}}. \quad (3.1.9)$$

**证明:** 因为结论1是结论2的一种特殊情况, 即当误差 $\tau = 0$ 时. 因此, 只需证明结论2即可.

令 $\mathcal{H} = \mathcal{T}^* - \mathcal{T}$ , 将其分解为 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \dots$ , 同理, 分解 $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \dots$ ,  $\mathcal{T}^*$ 为求解出来的张量,  $\mathcal{T}$ 为原始张量, 则由模型(3.1.2)可知

$$\|\mathfrak{F}(\mathcal{T}^* - \mathcal{T})\|_2 \leq \|\mathfrak{F}(\mathcal{T}^*) - b\|_2 + \|b - \mathfrak{F}(\mathcal{T})\|_2 \leq 2\tau, \quad (3.1.10)$$

由推论3.1.1及上述几个事实可以得到

$$|\langle \mathfrak{F}\mathcal{H}, \mathfrak{F}\mathcal{H}' \rangle| \leq \delta_{r_n+r_{n'}} \|\mathcal{H}\|_F \|\mathcal{H}'\|_F, \quad (3.1.11)$$

当 $j \geq 2$ 时,

$$\|\mathcal{H}_j\|_F = \|h_j\|_2 \leq \sqrt{r_n} \|h_j\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{r_n}} \|h_{j-1}\|_1 = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \|\mathcal{H}_{j-1}\|_*, \quad (3.1.12)$$

得到

$$\sum_{j \geq 2} \|\mathcal{H}_j\|_F = \sum_{j \geq 2} \|h_j\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{r_n}} \|h_{\bar{0}}\|_1 = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \|\mathcal{H}_{\bar{0}}\|_*, \quad (3.1.13)$$

这里的 $\mathcal{H}_{\bar{0}}$ 表示的是 $\sum_{j=1} \mathcal{H}_j$ , 同理,  $\mathcal{H}_{(\overline{0 \cup 1})}$ 表示的是 $\sum_{j=2} \mathcal{H}_j$ , 另一方面

$$\|\mathcal{H}_{(\overline{0 \cup 1})}\|_F = \left\| \sum_{j \geq 2} \mathcal{H}_j \right\|_F \leq \frac{1}{\sqrt{r_n}} \|\mathcal{H}_{\bar{0}}\|_*, \quad (3.1.14)$$

由于 $\mathcal{T}^*$ 是模型(3.1.2)的最优解, 且 $\|(\mathcal{T} + \mathcal{H})_0\|_* \geq \|\mathcal{T}_0\|_* - \|\mathcal{H}_0\|_*$ ,  $\|(\mathcal{T} + \mathcal{H})_{\bar{0}}\|_* \geq \|\mathcal{T}_{\bar{0}}\|_* - \|\mathcal{H}_{\bar{0}}\|_*$  则

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}\|_F + \|\mathcal{T}\|_* &\geq \|\mathcal{T}^*\|_* = \|\mathcal{T} + \mathcal{H}\|_* = \|(\mathcal{T} + \mathcal{H})_0 + (\mathcal{T} + \mathcal{H})_{\bar{0}}\|_* \\ &\geq \|(\mathcal{T} + \mathcal{H})_0\|_* - \|(\mathcal{T} + \mathcal{H})_{\bar{0}}\|_* \\ &\geq \|\mathcal{T}_0\|_* - \|\mathcal{H}_0\|_* + \|\mathcal{H}_{\bar{0}}\|_* - \|\mathcal{T}_{\bar{0}}\|_*, \end{aligned}$$

即

$$\|\mathcal{H}_{\bar{0}}\|_* \leq \|\mathcal{H}_0\|_* + 2\|\mathcal{T}_{\bar{0}}\|_* + \|\mathcal{H}\|_F, \quad (3.1.15)$$

将(3.1.15)代入(3.1.14)并结合 $\|\mathcal{H}_0\|_* \leq \sqrt{r_n} \|\mathcal{H}_0\|_F$ 可以得到

$$\|\mathcal{H}_{(\overline{0 \cup 1})}\|_F \leq \|\mathcal{H}_0\|_F + 2\frac{1}{\sqrt{r_n}} \|\mathcal{T}_{\bar{0}}\|_* + \frac{1}{\sqrt{r_n}} \|\mathcal{H}\|_F, \quad (3.1.16)$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/288121036044007005>