

山西省运城市盐湖区 2024 届高三下学期一模考试数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

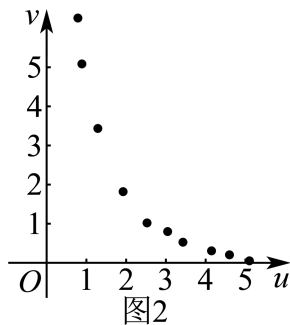
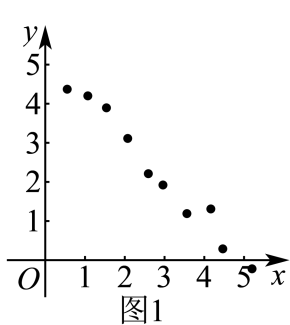
一、单选题

1. 复数 z 满足 $z(1-i)=4+2i$, 则 $z = (\quad)$
 - A. $1+3i$
 - B. $3+3i$
 - C. $\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$
 - D. $3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

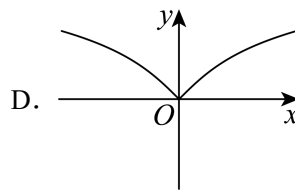
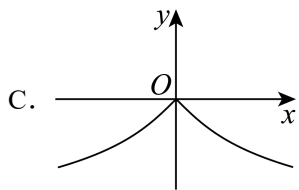
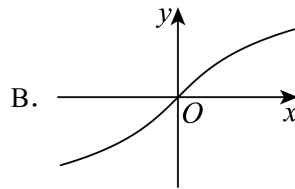
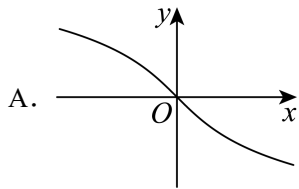
2. 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| \leq k, k \geq 0\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 k 的最大值是 (\quad)
 - A. 4
 - B. 3
 - C. 2
 - D. 1

3. 已知 $\triangle ABC$ 所在平面内一点 P , 满足 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, 则 $\overrightarrow{AP} = (\quad)$
 - A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
 - B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 - C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 - D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

4. 对变量 x, y 有观测数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 10)$, 得散点图 1; 对变量 u, v 有观测数据 $(u_i, v_i) (i=1, 2, \dots, 10)$, 得散点图 2. r_1 表示变量 x, y 之间的样本相关系数, r_2 表示变量 u, v 之间的样本相关系数, 则 (\quad)



- A. $-1 < r_1 < r_2 < 0$
 - B. $-1 < r_2 < r_1 < 0$
 - C. $0 < r_1 < r_2 < 1$
 - D. $0 < r_2 < r_1 < 1$
-
5. 已知符号函数 $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 则函数 $f(x) = \text{sgn}(x) \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的图象大致为 (\quad)



6. $4\sin 140^\circ - \tan 220^\circ = ()$

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. 1 D. -1

7. 直线 $l_1: mx - y + 3m = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 3 = 0$ 相交于点 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{y_0}{x_0 - 5}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right]$ B. $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$
 C. $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ D. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$

8. 某工厂加工一种电子零件, 去年12月份生产1万个, 产品合格率为87%. 为提高产品合格率, 工厂进行了设备更新, 今年1月份的产量在去年12月的基础上提高4%, 产品合格率比去年12月增加0.4%, 计划以后两年内, 每月的产量和产品合格率都按此标准增长, 那么该工厂的月不合格品数达到最大是今年的 ()

- A. 5月份 B. 6月份
 C. 7月份 D. 8月份

二、多选题

9. 设 a 、 b 是两条不同的直线, α 、 β 是两个不同的平面, 则下列命题正确的有 ()

- A. 若 $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel b$
 B. 若 $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, 则 $a \parallel b$
 C. 若 $a \parallel b$, $b \parallel \alpha$, $a \not\subset \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$
 D. 若 $a \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, $a \not\subset \beta$, 则 $a \parallel \beta$

10. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是抛物线上的两个动点, M 是线段 AB 的中点, 过 M 作 C 准线的垂线, 垂足为 N , 则 ()

- A. 若 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$
 B. 若 $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{FB}$, 则 $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$

C. 若 \overline{AF} 和 \overline{FB} 不平行, 则 $|MN| < \frac{1}{2}|AB|$

D. 若 $\angle AFB = 120^\circ$, 则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 以 0/1 码的方式在信道内发送 5 位 0/1 码数据流, 前 4 位为信息码, 最后一位为奇检验码, 使得 5 位 0/1 码数据流中 1 的个数为奇数, 如若信息码为 1100, 则检验码为 1, 所发送数据流为 11001. 每位 0/1 码信号的传输相互独立, 发送 $k (k=0,1)$ 时, 收到 $1-k$ 的概率为 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 收到 k 的概率为 $1-\alpha$. 接收方收到数据后, 若数据流中 1 的个数是偶数个, 则数据传输错误, 要求重新发送该数据, 则 ()

A. 5 位 0/1 码数据流传输无误的概率为 $(1-\alpha)^5$

B. 接收方要求重新发送该数据的概率为 $\frac{1-(1-2\alpha)^5}{2}$

C. 若所接收数据流中 1 的个数是奇数个, 则信息码传输正确的概率为 $\frac{2(1-\alpha)^5}{1+(1-2\alpha)^5}$

D. 若所接收数据流中 1 的个数是偶数个, 则信息码传输正确的概率为 $\alpha(1-\alpha)^4$

三、填空题

12. 已知圆锥的高为 5, 其顶点和底面圆周都在直径为 6 的球面上, 则圆锥的体积为_____.

13. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(ax + \frac{\pi}{3}\right) (a > 0)$, 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{2}{3}$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期是_____.

14. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, P 是椭圆上的一点, 且 $|PF_1| = 3|PF_2|$, $|OP| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$, 则椭圆的离心率 e 等于_____.

四、解答题

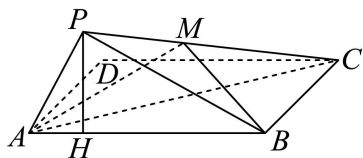
15. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均不为零, 前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{a_n a_{n+1}}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_n ;

(2) 求 S_{2n-1} .

16. 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 2$, 沿 AC 将 $\triangle ADC$ 折起, 使点 D 到

达点 P 的位置，点 P 在平面 ABC 的射影 H 落在边 AB 上.



(1) 求 AH 的长度;

(2) 若 M 是边 PC 上的一个动点，是否存在点 M ，使得平面 AMB 与平面 PBC 的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$? 若存在，求 CM 的长度；若不存在，说明理由.

17. 一袋中有 6 个均匀硬币，其中有 n ($2 \leq n \leq 5, n \in \mathbf{N}^*$) 个普通硬币，普通硬币的一面为面值，另一面为花朵图案，如下图，其余 $6-n$ 个硬币的两面均为面值. 每次试验从袋中随机摸出两个硬币各掷一次，用事件 A 表示“两个硬币均是面值朝上”，用事件 B 表示“两个硬币均是花朵图案朝上”，又把两个硬币放回袋中，如此重复 6 次试验.



(1) 若 $n=3$,

① 求 1 次试验中摸出普通硬币个数 X 的分布列;

② 求 6 次试验中事件 A 发生的次数 Y 的期望;

(2) 设 6 次试验中事件 B 恰好发生 1 次的概率为 P ，当 n 取何值时， P 最大?

18. 已知 F_1 、 F_2 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点，直线 l 经过双曲线的左焦点 F_1 ，与双曲线左、右两支分别相交于 A 、 B 两点.

(1) 求直线 l 斜率的取值范围;

(2) 若 $\overline{F_1B} = \frac{5}{4} \overline{AB}$ ，求 $\triangle AOB$ 的面积.

19. 已知 $a < 1$ ，函数 $f(x) = x \sin x + a \cos x$ ， $x \in (0, \pi)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程;

(2) 证明： $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(3) 若存在 a ，使得 $f(x) < -\frac{1}{2}a + b$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 成立，求实数 b 的取值范围.

参考答案:

1. A

【分析】利用复数的除法化简可得复数 z .

【详解】因为 $z(1-i) = 4+2i$, 则 $z = \frac{2(2+i)}{1-i} = \frac{2(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+3i$.

故选: A.

2. C

【分析】解出集合 A , 由集合的包含关系可得出关于实数 k 的不等式组, 解之即可得出实数 k 的最大值.

【详解】因为 $k \geq 0$, 由 $|x-1| \leq k$ 可得 $-k \leq x-1 \leq k$, 解得 $1-k \leq x \leq 1+k$,

即 $A = \{x | 1-k \leq x \leq 1+k, k \geq 0\}$,

又因为 $B = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $A \subseteq B$, 则 $\begin{cases} 1-k \geq -3 \\ 1+k \leq 3 \\ k \geq 0 \end{cases}$, 解得 $0 \leq k \leq 2$,

故 k 的最大值为 2.

故选: C.

3. B

【分析】由已知条件结合平面向量的加法可得出 \overrightarrow{AP} 关于 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AC} 的表达式.

【详解】因为 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, 即 $-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \vec{0}$, 即 $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

解得 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

故选: B.

4. A

【分析】利用散点图, 结合相关系数知识容易得出答案.

【详解】从图像中看出 y 随 x 增大而减少 (图像下降), u 随 v 增大而减少 (图像下降), 则 y 与 x 呈负相关关系, u 与 v 呈负相关关系, 即 $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ 故 C, D 不正确;

另外对比两图, 容易看出 y 与 x 相关性更强, 故 r_1 越接近 -1,

所以得 $-1 < r_1 < r_2 < 0$, A 正确, B 错误.

故选: A.

5. D

【分析】先得到 $f(x)$ 为偶函数，排除 AB，再计算出 $f(1) = \ln 2 > 0$ ，得到正确答案.

【详解】 $\operatorname{sgn}(x)$ 定义域为 \mathbf{R} ，且为奇函数，故 $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$ ，

故 $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的定义域为 \mathbf{R} ，

且 $f(-x) = \operatorname{sgn}(-x) \cdot \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$= -\operatorname{sgn}(x) \cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = f(x),$$

故 $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为偶函数，AB 错误；

当 $x=1$ 时， $f(1) = \operatorname{sgn}(1) \cdot \ln 2 = \ln 2 > 0$ ，C 错误，D 正确.

故选：D

6. A

【分析】利用诱导公式，余弦和差公式，二倍角公式，辅助角公式等化简求值.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } 4 \sin 140^\circ - \tan 220^\circ &= 4 \sin 40^\circ - \tan 40^\circ = 4 \sin 40^\circ - \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\ &= \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ - \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 40^\circ} \\ &= \frac{2 \cos 10^\circ - \cos(60^\circ - 10^\circ)}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \cos 10^\circ - \cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ} \\ &= \frac{2 \cos 10^\circ - \frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\frac{3}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cos(10^\circ + 30^\circ)}{\cos 40^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

故选：A

7. B

【分析】求出直线 l_1 、 l_2 所过定点的坐标，分析可知 $l_1 \perp l_2$ ，即 $PA \perp PB$ ，求出点 P 的轨迹

方程，分析可知，设 $\frac{y_0}{x_0 - 5} = k$ ，可知直线 $kx - y - 5k = 0$ 与曲线 $x^2 + y^2 = 9 (x \neq -3)$ 有公共点，

利用直线与圆的位置关系可得出关于实数 k 的不等式，解之即可.

【详解】直线 l_1 的方程可化为 $m(x+3) - y = 0$ ，由 $\begin{cases} x+3=0 \\ y=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ ，

对于直线 l_2 , 由 $\begin{cases} x-3=0 \\ y=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$,

所以, 直线 l_1 过定点 $A(-3,0)$, 直线 l_2 过定点 $B(3,0)$,

又因为 $m \times 1 + (-1) \times m = 0$, 则 $l_1 \perp l_2$, 即 $PA \perp PB$,

则 $\overline{AP} = (x_0 + 3, y_0)$, $\overline{BP} = (x_0 - 3, y_0)$,

所以, $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = x_0^2 - 9 + y_0^2 = 0$, 所以, $x_0^2 + y_0^2 = 9$,

当 $x_0 = -3$, $y_0 = 0$, 点 $(-3,0)$ 不在直线 l_2 上,

所以, 点 P 的轨迹是曲线 $x^2 + y^2 = 9 (x \neq -3)$,

设 $\frac{y_0}{x_0 - 5} = k$ 可得 $kx_0 - y_0 - 5k = 0$,

由题意可知, 直线 $kx - y - 5k = 0$ 与曲线 $x^2 + y^2 = 9 (x \neq -3)$ 有公共点,

且圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的圆心为原点, 半径为 3, 所以, $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 3$, 解得 $-\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$,

当 $x_0 = -3$, $y_0 = 0$ 时, $\frac{y_0}{x_0 - 5} = 0$; 当 $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ 时, $\frac{y_0}{x_0 - 5} = 0$.

因此, $\frac{y_0}{x_0 - 5}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

故选: B.

8. C

【分析】 该工厂每月的产量、合格率分别用 a_n 、 b_n 表示, 月份用 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 表示, 求出 $a_n b_n$ 的表达式, 分析数列 $\{a_n b_n\}$, 即可得出结论.

【详解】 设从今年 1 月份起, 每月的产量和产品的不合格率都按题中的标准增长,

该工厂每月的产量、合格率分别用 a_n 、 b_n 表示, 月份用 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 表示,

则 $a_n = 1 \times (1 + 4\%)^n = 1.004^n$, $b_n = 1 - (87\% - n \cdot 0.4\%) = -0.004n + 0.13$, 其中 $n \leq 24$, $n \in \mathbf{N}^*$,

则从今年 1 月份起, 各月不合格产品数量为 $a_n b_n = 1.04^n \times (0.13 - 0.004n)$, 单位: 万台,

因为 $a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n = 1.04^{n+1} \times [0.13 - 0.004(n+1)] - 1.04^n \times (0.13 - 0.004n)$

$= 1.04^n [1.04 \times 0.13 - 1.04 \times 0.004(n+1) - 0.13 + 0.004n]$

$$= 1.04^n (0.00104 - 0.00016n) = \frac{1.04^n}{10^5} (104 - 16n) = \frac{8 \times 1.04^n}{10^5} (3 - 2n),$$

当 $n \leq 6$ 时, $a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n > 0$, 即 $a_{n+1}b_{n+1} > a_nb_n$, 此时, 数列 $\{a_nb_n\}$ 单调递增,

即 $a_1b_1 < a_2b_2 < \dots < a_7b_7$;

当 $7 \leq n \leq 23$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n < 0$, 即 $a_{n+1}b_{n+1} < a_nb_n$, 此时, 数列 $\{a_nb_n\}$ 单调递减,

即 $a_7b_7 > a_8b_8 > \dots > a_{24}b_{24}$,

因此, 当 $n=7$ 时, a_nb_n 最大, 故该工厂的月不合格品数达到最大是今年的 7 月份.

故选: C.

9. BCD

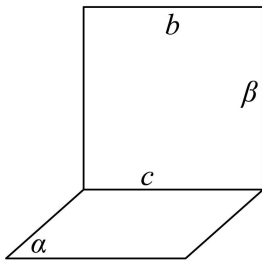
【分析】 根据已知条件直接判断线线位置关系, 可判断 A 选项; 利用线面垂直的性质可判断 B 选项; 利用线面平行的性质结合线面平行的判定可判断 C 选项; 利用线面、面面平行的性质可判断 D 选项.

【详解】 因为 a 、 b 是两条不同的直线, α 、 β 是两个不同的平面,

对于 A 选项, 若 $a // \alpha$, $b // \alpha$, 则 a 、 b 平行、相交或异面, A 错;

对于 B 选项, 若 $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, 则 $a // b$, 由线面垂直的性质可知, B 对;

对于 C 选项, 因为 $a // b$, $b // \alpha$, $a \not\subset \alpha$, 如下图所示:

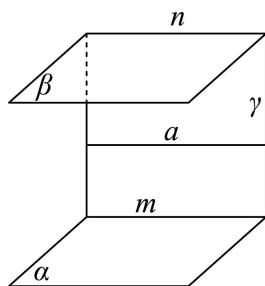


过直线 b 作平面 β , 使得 $\alpha \cap \beta = c$,

因为 $b // \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, 则 $b // c$, 则 $a // c$,

因为 $a \not\subset \alpha$, $c \subset \alpha$, 则 $a // \alpha$, C 对;

对于 D 选项, 过直线 a 作平面 γ , 使得 $\alpha \cap \gamma = m$, $\beta \cap \gamma = n$, 如下图所示:



因为 $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = m$, $\beta \cap \gamma = n$, 则 $m \parallel n$,

因为 $a \parallel \alpha$, $a \subset \gamma$, $\alpha \cap \gamma = m$, 则 $m \parallel a$, 则 $a \parallel n$,

因为 $a \not\subset \beta$, $n \subset \beta$, 则 $a \parallel \beta$, D 对.

故选: BCD.

10. ABD

【分析】设直线 AB 的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$, 将该直线的方程与抛物线的方程联立, 结合韦达定理求出 m 的值, 可判断 A 选项; 利用抛物线的焦点弦公式可判断 B 选项; 利用三角形三边关系可判断 C 选项; 利用余弦定理、基本不等式可判断 D 选项.

【详解】易知抛物线 C 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

对于 A 选项, 若直线 AB 与 y 轴垂直, 则直线 AB 与抛物线 C 只有一个交点, 不合乎题意,

因为 $\overline{AF} = 2\overline{FB}$, 则 F 在直线 AB 上, 设直线 AB 的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \text{ 可得 } y^2 - 2mpy - p^2 = 0, \text{ 则 } \Delta = 4m^2p^2 + 4p^2 > 0,$$

由韦达定理可得 $y_1 + y_2 = 2mp$, $y_1y_2 = -p^2$,

因为 $\overline{AF} = 2\overline{FB}$, 即 $\left(\frac{p}{2} - x_1, -y_1\right) = 2\left(x_2 - \frac{p}{2}, y_2\right)$, 可得 $-y_1 = 2y_2$, 即 $y_1 = -2y_2$,

所以, $y_1 + y_2 = 2mp = -y_2$, 可得 $y_2 = -2mp$, $y_1y_2 = -2y_2^2 = -2 \times 4m^2p^2 = -p^2$, 解得 $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$,

此时, 直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{m} = \pm 2\sqrt{2}$, A 对;

对于 B 选项, 当 $\overline{AF} \parallel \overline{FB}$ 时, 则 F 在直线 AB 上, $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$,

则 $|MN| = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + p) = \frac{1}{2}|AB|$, B 对;

对于 C 选项, 当 \overline{AF} 和 \overline{FB} 不平行时, 则 A 、 F 、 B 三点不共线,

所以, $|MN| = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p}{2} = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) > \frac{1}{2}|AB|$, C 错;

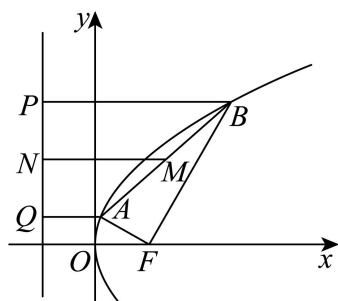
对于 D 选项, 设 $|AF|=a$, $|BF|=b$,

当 $\angle AFB=120^\circ$ 时, $|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab$,

由 C 选项可得 $|MN| = \frac{a+b}{2}$,

$$\text{所以, } \frac{|MN|^2}{|AB|^2} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a^2 + b^2 + ab} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 + ab} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{ab}{a^2 + b^2 + ab} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 1} \right) = \frac{1}{3},$$



即 $\frac{|MN|}{|AB|} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立, 故 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, D 对.

故选: ABD.

【点睛】方法点睛: 圆锥曲线中的最值问题解决方法一般分两种:

一是几何法, 特别是用圆锥曲线的定义和平面几何的有关结论来求最值;

二是代数法, 常将圆锥曲线的最值问题转化为二次函数或三角函数的最值问题, 然后利用基本不等式、函数的单调性或三角函数的有界性等求最值.

11. ABC

【分析】利用独立事件的概率公式可判断 A 选项; 设接收方要求重新发送该数据的概率为 P ,

不用重新发数据的概率为 Q , 利用独立重复试验的概率公式可得出 $\begin{cases} P+Q=1 \\ P-Q=-(1-2\alpha)^5 \end{cases}$, 求

出 P , 可判断 B 选项; 利用条件概率公式可判断 CD 选项.

【详解】对于 A 选项, 每位数据码传输正确的概率均为 $1-\alpha$, 传输错误的概率为 α ,

由独立事件的概率公式可知, 5 位 0/1 码数据流传输无误的概率为 $(1-\alpha)^5$, A 对;

对于 B 选项, 设接收方要求重新发送该数据的概率为 P , 不用重新发数据的概率为 Q ,

接收方要求重新发送该数据，意味着数据码在传输时传错的数码的个数为5或3或1，

$$P = C_5^0 \cdot \alpha^5 + C_5^2 \cdot \alpha^3 (1-\alpha)^2 + C_5^4 \cdot \alpha (1-\alpha)^4,$$

$$Q = C_5^1 \cdot \alpha^4 (1-\alpha) + C_5^3 \cdot \alpha^2 (1-\alpha)^3 + C_5^5 \cdot (1-\alpha)^5,$$

$$\text{所以, } P+Q = (\alpha+1-\alpha)^5 = 1, \quad \textcircled{1}$$

$$P-Q = C_5^0 \cdot \alpha^5 - C_5^1 \cdot \alpha^4 (1-\alpha) + \dots - C_5^5 \cdot (1-\alpha)^5 = [\alpha - (1-\alpha)]^5 = - (1-2\alpha)^5, \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } 2P = 1 - (1-2\alpha)^5, \text{ 则 } P = \frac{1 - (1-2\alpha)^5}{2}, \text{ B 对;}$$

$$\text{对于 C 选项, 由 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 可得 } 2Q = 1 + (1-2\alpha)^5, \text{ 则 } Q = \frac{1 + (1-2\alpha)^5}{2},$$

记事件 A : 所接收数据流中1的个数是奇数个, 事件 C : 信息码传输正确,

$$\text{则 } P(A) = \frac{1 + (1-2\alpha)^5}{2},$$

事件 AC 意味着, 数据流前四位是正确的, 最后一位也是正确的,

$$\text{所以, } P(AC) = (1-\alpha)^5,$$

$$\text{由条件概率公式可得 } P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{(1-\alpha)^5}{\frac{1 + (1-2\alpha)^5}{2}} = \frac{2(1-\alpha)^5}{1 + (1-2\alpha)^5},$$

所以, 若所接收数据流中1的个数是奇数个, 则信息码传输正确的概率为 $\frac{2(1-\alpha)^5}{1 + (1-2\alpha)^5}$, C 对;

$$\text{对于 D 选项, 记事件 } B: \text{ 所接收数据流中1的个数是偶数个, 则 } P(B) = \frac{1 - (1-2\alpha)^5}{2},$$

事件 BC 意味着数据流前四位是正确的, 最后一位是错误的,

$$\text{则 } P(BC) = \alpha(1-\alpha)^4,$$

$$\text{由条件概率公式可得 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\alpha(1-\alpha)^4}{\frac{1 - (1-2\alpha)^5}{2}} = \frac{2\alpha(1-\alpha)^4}{1 - (1-2\alpha)^5}, \text{ D 错.}$$

故选: ABC.

【点睛】 思路点睛: 用定义法求条件概率 $P(B|A)$ 的步骤:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/296140115004010055>