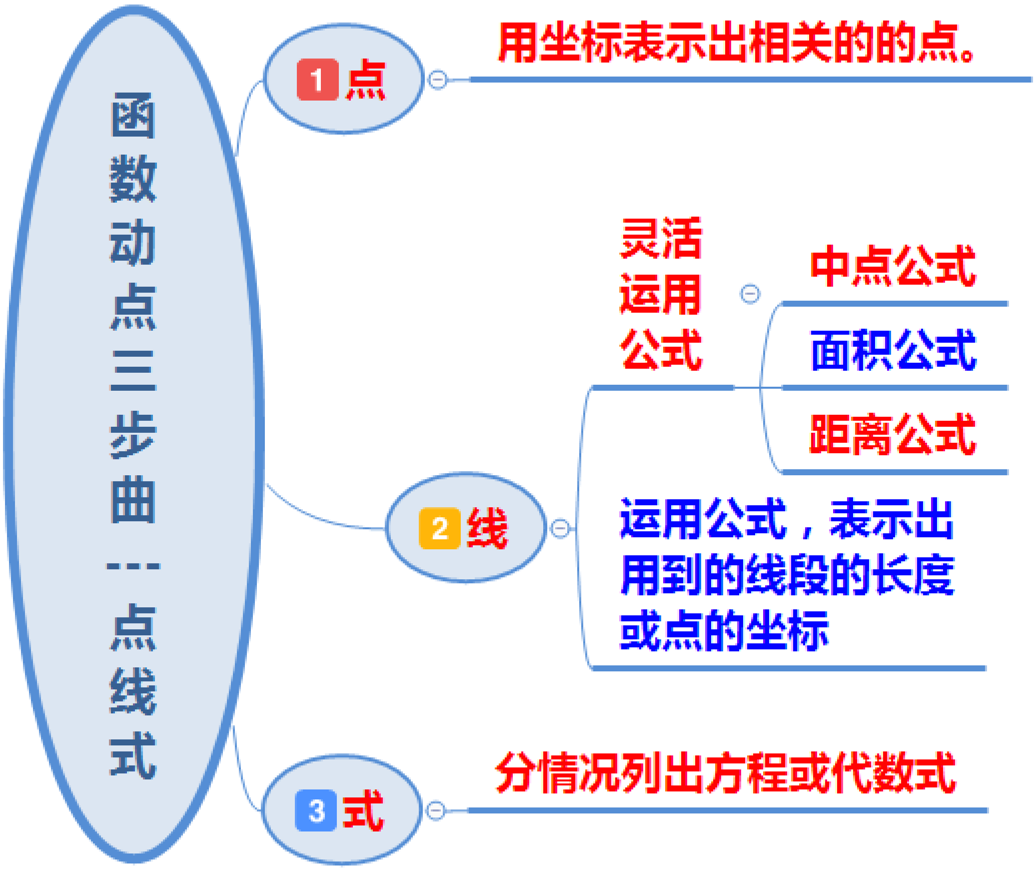
专题05 函数动点最值之线段与面积

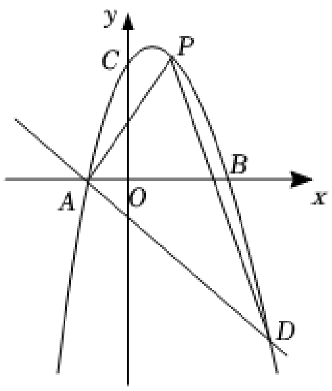


典例分析：

典例 1 如图，抛物线 $y=ax^2+2x+c$．与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C（0，3），直线 $y=-x-1$ 经过点 A 且与抛物线交于另一点 D．

（1）求抛物线的解析式；

（2）若 P 是位于直线 AD 上方的抛物线上的一个动点，连接 PA，PD，求△PAD 的面积的最大值．



解题思路：:（1）根据 $y=-x-1$ 经过点 A，可求出点 A 的坐标，将点 A、C 的坐标代入 $y=ax^2+2x+c$ 即可求出抛物线的解析；

（2）联立抛物线和一次函数 $y=-x-1$ 的解析式列方程解出可得点 D 的坐标，过点 P 作 $PE\parallel y$ 轴，交 AD 于 E，设 $P(t,\ -t^2+2t+3)$，则 $E(t,\ -t-1)$（点），表示 PE 的长（线），根据三角形面积公式可得△APD 的面积(式)，配方后可得结论．

答案详解：解：（1）∵直线 $y=-x-1$ 经过点 A，

∴令 $y=0$，则 $0=-x-1$，

∴$x=-1$，

∴$A(-1,0)$，

将 $A(-1,0)$，$C(0,3)$ 代入 $y=ax^2+2x+c$ 得：

$$\begin{cases}a-2+c=0\\c=3\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}a=-1\\c=3\end{cases}$，

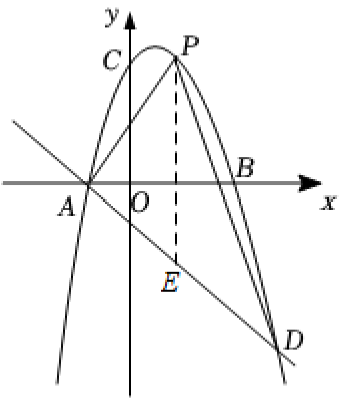
∴抛物线的解析式为：$y=-x^2+2x+3$；

（2）$-x^2+2x+3=-x-1$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=4$，

∴$D(4,\ -5)$，

过点 P 作 $PE\parallel y$ 轴，交 AD 于 E，



设 P（t，$-t^2+2t+3$），则 E（t，$-t-1$），

∴$PE=(-t^2+2t+3)-(-t-1)=-t^2+3t+4$，

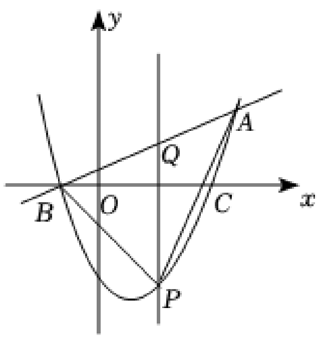
∴△PAD 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot PE\cdot(4+1)=\frac{5}{2}(-t^2+3t+4)=-\frac{5}{2}(t-\frac{3}{2})^2+\frac{125}{8}$，

当 $t=\frac{5}{2}$ 时，△PAD 的面积最大，且最大值是 $\frac{125}{8}$．

典例2 如图，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 B、C 两点（点 B 在点 C 的左侧），一次函数 $y=kx+1$ 的图象经过点 B 和二次函数图象上另一点 A．其中点 A 的坐标为（4，3）．

（1）求二次函数和一次函数的解析式；

（2）若抛物线上的点 P 在第四象限内，过点 P 作 x 轴的垂线 PQ，交直线 AB 于点 Q，求线段 PQ 的最大值．



解题思路：（1）先把 A 点坐标代入 $y=kx+1$ 可求出 k，从而得到一次函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$，则易得 B（-2，0），然后利用待定系数法求抛物线解析式；

（2）利用二次函数图象上点的坐标特征和一次函数图象上点的坐标特征，设 P（x，

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$)，$Q$（$x$，$\frac{1}{2}x+1$），（点）则 $PQ=\frac{1}{2}x+1-$（$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$），（线）把解析式配成顶点式得到 $PQ=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{9}{2}$，（式）然后根据二次函数的性质求 PQ 的最大值．

答案详解：解：（1）把 A（4，3）代入 $y=kx+1$ 得：

$4k+1=3$，

解得：$k=\frac{1}{2}$，

∴一次函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$，

当 $y=0$ 时，$\frac{1}{2}x+1=0$，

解得 $x=-2$，

则 B（-2，0），

把 B（-2，0），A（4，3）代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 得：

$\begin{cases}2-2b+c=0\\8+4b+c=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\\c=-3\end{cases}$

∴抛物线解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$；

（2）设 P（x，$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$），则 Q（x，$\frac{1}{2}x+1$），

∴$PQ=\frac{1}{2}x+1-$（$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$）

$=-\frac{1}{2}x^2+x+4$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{9}{2}$，

∴当 $x=1$ 时，PQ 最大，最大值为 $\frac{9}{2}$.

实战训练

一．线段最值之纵差法

1．如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 的左边），与 y 轴交于点 C，点 D 为抛物线的顶点，B，C 两点的坐标分别为（3，0）和（0，3）.

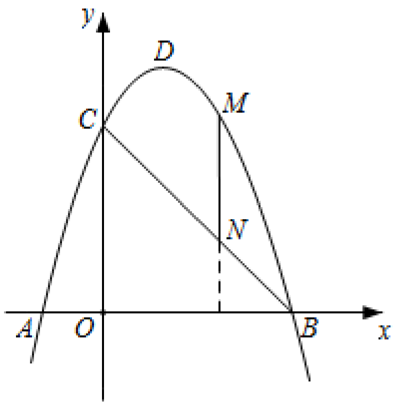
（1）直线 BC 的解析式为 ___$y=-x+3$___.

（2）求抛物线所对应的函数解析式.

（3）①顶点 D 的坐标为 ___（1，4）___；

②当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，二次函数的最大值为 ___4___，最小值为 ___-5___.

（4）若点 M 是第一象限的抛物线上的点，过点 M 作 x 轴的垂线交 BC 于点 N，求线段 MN 的最大值.



试题分析：（1）用待定系数法求函数解析式即可；

（2）把 B（3，0），和 C（0，3）代入 $y=-x^2+bx+c$，即可求函数解析式；

（3）①由 $y=-(x-1)^2+4$，即可求顶点坐标；

②当 $x=1$ 时，函数有最大值 4，当 $x=4$ 时，函数有最小值 -5；

（4）设点 M（t，$-t^2+2t+3$），则 N（t，$-t+3$），可得 $MN=-(t-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，即可求 MN

的最大值．

答案详解：解：（1）设直线 BC 的解析式为 $y=kx+m$，

∴ $\begin{cases}3k+m=0\\m=3\end{cases}$，

∴ $\begin{cases}k=-1\\m=3\end{cases}$，

∴$y=-x+3$，

所以答案是：$y=-x+3$；

（2）把 B（3，0），和 C（0，3）代入 $y=-x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}-9+3b+c=0\\c=3\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$，

∴$y=-x^2+2x+3$；

（3）①∵$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，

∴顶点 D（1，4），

所以答案是：（1，4）；

②∵函数的对称轴为直线 $x=1$，

∴当 $x=1$ 时，函数有最大值 4，

∵$0\leqslant x\leqslant 4$，

∴当 $x=4$ 时，函数有最小值－5，

所以答案是：4，－5；

（4）设点 M（t，$-t^2+2t+3$），则 N（t，$-t+3$），

∴$MN=-t^2+3t=-(t-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，

∴线段 MN 的最大值是 $\frac{9}{4}$．

2．如图，直线 $y=-\frac{2}{3}x+c$ 与 x 轴交于点 A（3，0），与 y 轴交于点 B，抛物线 $y=-\frac{4}{3}x^2+bx+c$ 经过点

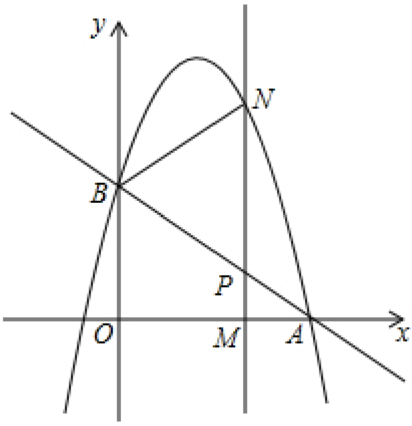
A，B．

（1）求点 B 的坐标和抛物线的解析式；

（2）M（m，0）为线段 OA 上一个动点，过点 M 垂直于 x 轴的直线与直线 AB 和抛物线分别交于点 P、N．

①试用含 m 的代数式表示线段 PN 的长；

②求线段 PN 的最大值．



试题分析：（1）把 A 点坐标代入直线解析式可求得 c，则可求得 B 点坐标，由 A、B 的坐标，利用待定系数法可求得抛物线解析式；

（2）①M（m，0），则 P（m，$-\frac{2}{3}m+2$），N（m，$-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2$），即可求出 PN 的长；

②根据二次函数的性质可得线段 PN 的最大值．

答案详解：解：（1）∵$y=-\frac{2}{3}x+c$ 与 x 轴交于点 A（3，0），与 y 轴交于点 B，

∴0＝﹣2+c，解得 c＝2，

∴B（0，2），

∵抛物线 $y=-\frac{4}{3}x^2+bx+c$ 经过点 A，B，

∴$\begin{cases}-12+3b+c=0\\c=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=\frac{10}{3}\\c=2\end{cases}$，

∴抛物线解析式为 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{10}{3}x+2$；

（2）①M（m，0），则 P（m，$-\frac{2}{3}m+2$），N（m，$-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2$），

∴$PN=(-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2)-(-\frac{2}{3}m+2)=-\frac{4}{3}m^2+4m$（$0\leqslant m\leqslant 3$）；

②∵$PN=-\frac{4}{3}m^2+4m=-\frac{4}{3}(m-\frac{3}{2})^2+3$，

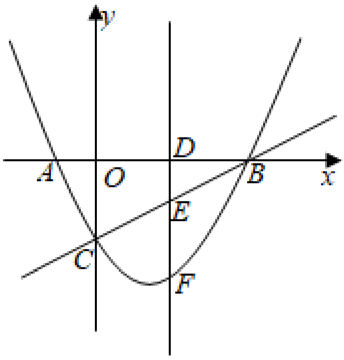
∴$m=\frac{3}{2}$时，线段 PN 有最大值为 3．

3．如图，已知二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$的图象与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C 点．

（1）求 A、B、C 三点的坐标；

（2）求直线 BC 的函数表达式；

（3）若 D 是线段 OB 上一个动点，过 D 作 x 轴的垂线交直线 BC 于 E 点，交抛物线于 F 点，求线段 EF 的最大值．



试题分析：（1）将 $x=0$ 代入函数解析式即可求出 C 点坐标，将 $y=0$ 代入函数解析式即可求出 A、B 的坐标；

（2）利用一次函数的待定系数法直接求解即可；

（3）设点 D 的坐标，再利用两点之间的距离公式求解即可．

答案详解：（1）解：∵二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$，

令 $y=0$，即 $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=0$，

∴$x_1=3$，$x_2=-1$，

由图可得，B 在 A 的右边，

∴B（3，0），A（﹣1，0），

令 $x=0$，则 $y=-\frac{3}{2}$，即 $C(0,\ -\frac{3}{2})$；

（2）解：设直线 BC 解析式为 $y=kx+b$，

把 B（3，0），C（0，﹣2）代入得，

$$\begin{cases}3k+b=0\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$,

∴直线 BC 解析式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$;

（3）解：设 D（x，0），$0\leqslant x\leqslant 3$，$DF\perp x$ 轴，

∴$x_D=x_E=x_F=x$，

∵E 在直线 BC 上，

∴ $y_E=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，即 $E(x,\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2})$，

∵F 在抛物线上，

∴ $y_F=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$，即 $F(x,\ \frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})$，

∴ $EF=|y_E-y_F|=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$，

∴ $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$，

∴ $0\leq x\leq\frac{3}{2}$，y 随 x 的增大而增大，$\frac{3}{2}<x\leq 3$，y 随 x 的增大而减小，

∴ $x=\frac{3}{2}$ 时，EF 有最大值，

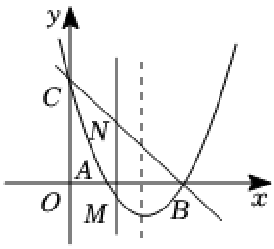
$\therefore EF=-\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^2+\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$；

$\therefore EF$ 的最大值是 $\frac{9}{8}$.

4．如图所示，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B（5，0），与 y 轴交于点 C（0，5）.

（1）求抛物线的表达式；

（2）若点 M 是抛物线在 x 轴下方的动点，过点 M 作 $MN/\!/y$ 轴交直线 BC 于点 N，求线段 MN 的最大值.



试题分析：（1）通过待定系数法求解.

（2）由 B，C 坐标求出直线 BC 解析式，设点 M 坐标为（m，m^2-6m+5），从而可得点 N 坐标，进而求解.

答案详解：解：（1）将（5，0），（0，5）代入 $y=x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases}25+5b+c=0\\c=5\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}b=-6\\c=5\end{cases}$，

$\therefore y=x^2-6x+5$.

（2）设直线 BC 解析式为 $y=kx+n$，

将（5，0），（0，5）代入 $y=kx+n$ 得 $\begin{cases}5k+n=0\\n=5\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=-1\\n=5\end{cases}$，

$\therefore y=-x+5$，

设点 M 坐标为（m，m^2-6m+5），则点 N 坐标为（m，$-m+5$），

$\therefore MN=-m+5-(m^2-6m+5)=-m^2+5m=-(m-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{4}$，