

三校联考高考数学模拟试卷（文科）（解析版）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 < 0\}$, 集合 $N = \{x | (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()

- A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$ C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | x \leq -2\}$

2. 命题 $p: \exists x \in \mathbb{N}, x^3 < x^2$; 命题 $q: \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 函数 $f(x) = \log_a(x-1)$ 的图象过点 $(2, 0)$, 则下列命题是真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge \neg q$ C. $\neg p \wedge q$ D. $\neg p \wedge \neg q$

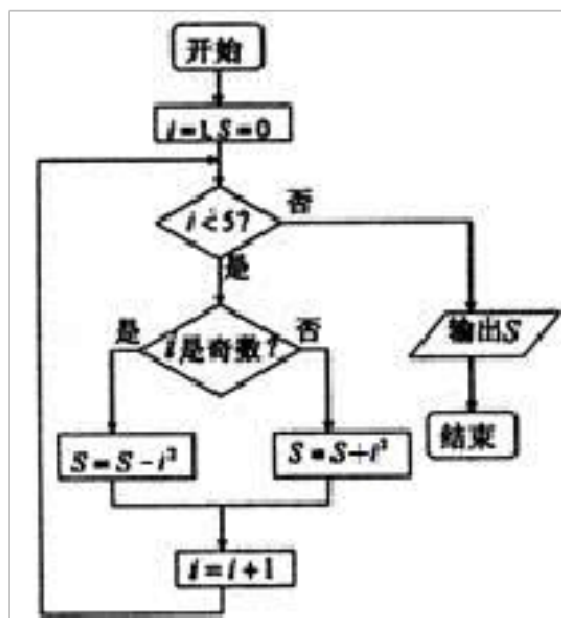
3. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\vec{b}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, 则 $|\vec{a}| =$ ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. 3

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 ()

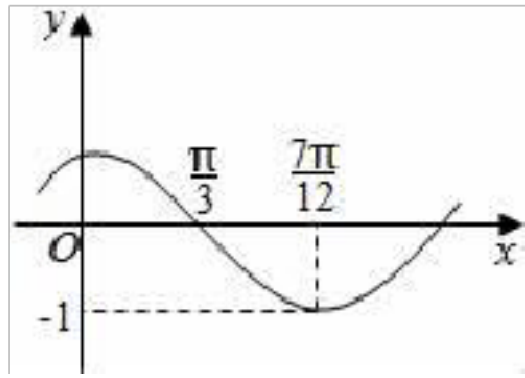
- A. $y = \pm \frac{1}{4}x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

5. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 的值为 ()



- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 关于函数 $g(x)$, 下列说法正确的是 ()



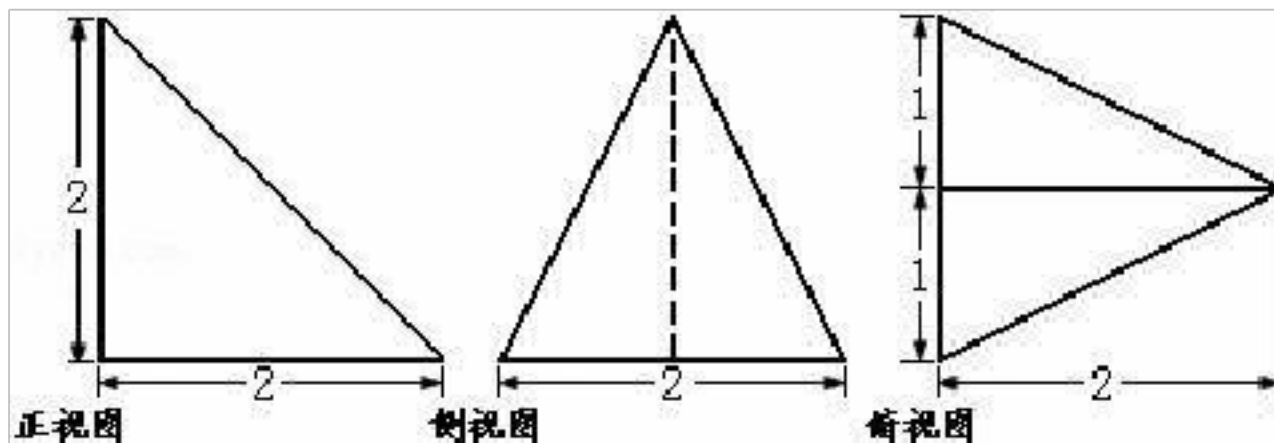
- A. 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数
- B. 其图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称
- C. 函数 $g(x)$ 是奇函数
- D. 当 $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 时, 函数 $g(x)$ 的值域是 $[-1, 2]$

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_3, a_{13} 成等比数列, 若 $a_1 = 1, S_n$ 是数列 $\{a_n\}$

前 n 项的和, 则 $\frac{2S_n + 16}{a_n + 3}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 的最小值为 ()

- A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{3} - 2$ D. $\frac{9}{2}$

8. 一个棱锥的三视图如图(尺寸的长度单位为 m), 则该棱锥的全面积是(单位: m^2). ()



- A. $4 + 2\sqrt{6}$ B. $4 + \sqrt{6}$ C. $4 + 2\sqrt{2}$ D. $4 + \sqrt{2}$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 则方程 $f(x) = ax$ 恰有两个不同实数根时, 实数 a 的取值范围是 () (注: e 为自然对数的底数)

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}]$ C. $(0, \frac{1}{4})$ D. $[\frac{1}{4}, e]$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 正三角形 $\triangle AF_1F_2$ 的顶点 A

在 y 轴上, 边 AF_1 与双曲线左支交于点 B , 且 $|\overrightarrow{AF_1}| = 4|\overrightarrow{BF_1}|$, 则双曲线 C 的离心率的值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{13} + 1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{3} + 1$ D. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

11. 已知一个平放的棱长为 4 的三棱锥内有一小球 O (重量忽略不计), 现从该三棱锥顶端向内注水, 小球慢慢上浮, 若注入的水的体积是该三棱锥体积的 $\frac{7}{8}$ 时, 小球与该三棱锥各侧面均相切 (与水面也相切), 则球的表面积等于 ()

- A. $\frac{7}{6}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{1}{2}\pi$

12. 若定义在区间 $[-2016, 2016]$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1, x_2 \in [-2016, 2016]$, 都有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 2016$, 且 $x > 0$ 时, 有 $f(x) < 2016$, $f(x)$ 的最大值、最小值分别为 M, N , 则 $M+N$ 的值为 ()

- A. 2015 B. 2016 C. 4030 D. 4032

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 设 i 为虚数单位, 则复数 $\frac{2+i}{1-2i}$ = _____.

14. 已知函数 $f(x) = 2x^2 - xf'(2)$, 则函数 $f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程是 _____.

15. 若 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ x+y \leq 1 \end{cases}$ 若 $z=x+my$ 的最大值为 $\frac{5}{3}$, 则实数 m = _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 三内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a^2=b^2+c^2+bc$, $a=\sqrt{3}$, S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 则 $S+\sqrt{3}\cos B\cos C$ 的最大值为 _____.

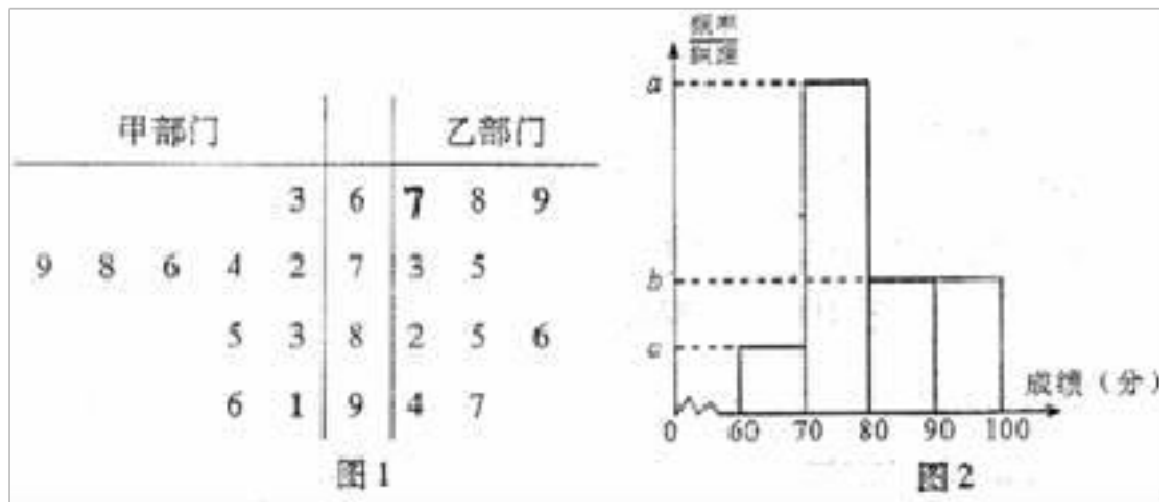
三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n, a_n, \frac{1}{2}$ 成等差数列.

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $b_n = \log_2 a_n + 3$, 求数列 $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 从甲、乙两部门中各任选 10 名员工进行职业技能测试, 测试成绩 (单位: 分) 数据的茎叶图如图 1 所示:



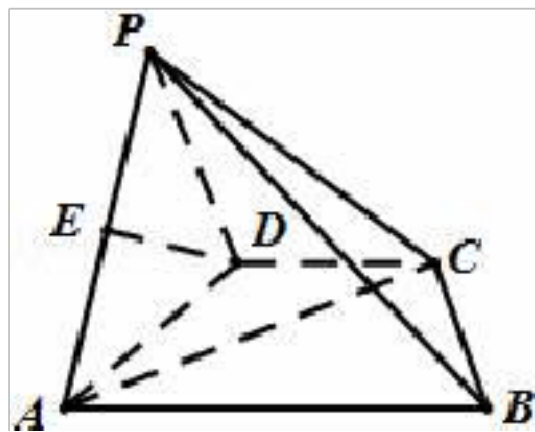
(I) 分别求出甲、乙两组数据的中位数，并从甲组数据频率分布直方图如图 2 所示，求 a, b, c 的值；

(II) 从甲、乙两组数据中各任取一个，求所取两数之差的绝对值大于 20 的概率。

19. 如图所示，在四棱锥 P-ABCD 中，底面是直角梯形 ABCD，其中 AD ⊥ AB, CD // AB, AB=4, CD=2, 侧面 PAD 是边长为 2 的等边三角形，且与底面 ABCD 垂直，E 为 PA 的中点。

(1) 求证：DE // 平面 PBC；

(2) 求三棱锥 A-PBC 的体积。



20. 已知椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b > 0), F₁ (-c, 0), F₂ (c, 0) 为椭圆的两个焦点，M 为椭圆上任意一点，且 |MF₁|, |F₁F₂|, |MF₂| 构成等差数列，过椭圆焦点垂直于长轴的弦长为 3。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 若存在以原点为圆心的圆，使该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A, B, 且 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, 求出该圆的方程。

21. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+b)x + ab \ln x$ (其中 e 为自然对数的底数, a ≠ e, b ∈ R),

曲线 y=f(x) 在点 (e, f(e)) 处的切线方程为 $y = -\frac{1}{2}e^2$ 。

(1) 求 b;

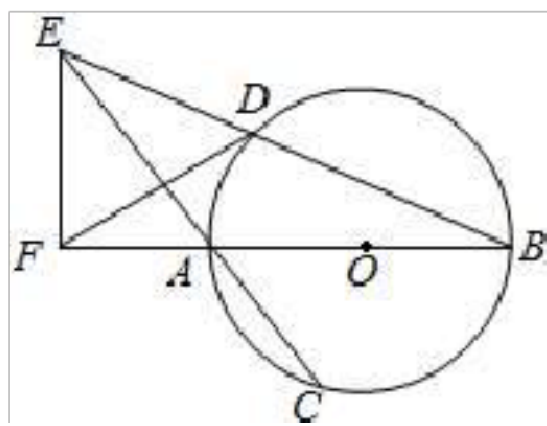
(2) 若对任意 $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$, $f(x)$ 有且只有两个零点, 求 a 的取值范围.

请考生在 (22)、(23)、(24) 三题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做第一个题目记分. 作答时, 请写清题号. [选修 4-1: 几何证明选讲]

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CA 、 BD 的延长线相交于点 E , EF 垂直 BA 的延长线于点 F . 求证:

(1) $\angle DEA = \angle DFA$;

(2) $AB^2 = BE \cdot BD - AE \cdot AC$.



[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

23. (2016 福安市校级模拟) 极坐标系与直角坐标系 xOy 有相同的长度单位, 以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴. 已知曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = a$ ($a > 0$), 射线 $\theta = \varphi$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$, $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$, 与曲线 C_1 分别交异于极点 O 的四点 A 、 B 、 C 、 D .

(I) 若曲线 C_1 关于曲线 C_2 对称, 求 a 的值, 并把曲线 C_1 和曲线 C_2 化成直角坐标方程;

(II) 求 $|OA| + |OC| + |OB| + |OD|$ 的值.

[选修 4-5: 不等式选讲]

24. $f(x) = |x+m|$.

(I) 解关于 m 的不等式 $f(1) + f(-2) \geq 5$;

(II) 当 $x \neq 0$ 时, 证明: $f(\frac{1}{x}) + f(-x) \geq 2$.

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{x \mid x^2 + 3x + 2 < 0\}$, 集合 $N = \{x \mid (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()
- A. $\{x \mid x \geq -2\}$ B. $\{x \mid x > -1\}$ C. $\{x \mid x < -1\}$ D. $\{x \mid x \leq -2\}$

【分析】根据题意先求出集合 M 和集合 N, 再求 $M \cup N$.

【解答】解: \because 集合 $M = \{x \mid x^2 + 3x + 2 < 0\} = \{x \mid -2 < x < -1\}$,

集合 $N = \{x \mid (\frac{1}{2})^x \leq 4\} = \{x \mid 2^{-x} \leq 2^2\} = \{x \mid -x \leq 2\} = \{x \mid x \geq -2\}$,

$\therefore M \cup N = \{x \mid x \geq -2\}$,

故选 A.

【点评】本题考查集合的运算, 解题时要认真审题, 仔细解答.

2. 命题 $p: \exists x \in \mathbb{N}, x^3 < x^2$; 命题 $q: \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 函数 $f(x) = \log_a(x-1)$ 的图象过点 $(2, 0)$, 则下列命题是真命题的是 ()
- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge \neg q$ C. $\neg p \wedge q$ D. $\neg p \wedge \neg q$

【分析】分别判断出 p, q 的真假, 从而判断出复合命题的真假.

【解答】解: 命题 $p: \exists x \in \mathbb{N}, x^3 < x^2$, 是假命题;

命题 $q: \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$,

令 $x-1=1$, 解得: $x=2$, 此时 $f(2) = 0$,

故函数 $f(x) = \log_a(x-1)$ 的图象过点 $(2, 0)$, 是真命题;

故 $\neg p \wedge q$ 真是真命题;

故选: C.

【点评】本题考查了不等式以及对数函数的性质, 考查复合命题的判断, 是一道基础题.

3. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\vec{b}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, 则 $|\vec{a}| =$ ()

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. 3

【分析】根据向量的数量积的运算和向量的模计算即可.

【解答】解: $\because |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$,

$$\therefore |\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|+4=12,$$

解得 $|\vec{a}|=2$,

故选: A.

【点评】本题考查了向量的数量积的运算和向量的模的计算, 属于基础题.

4. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 ()

A. $y = \pm \frac{1}{4}x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

【分析】由离心率和 abc 的关系可得 $b^2=4a^2$, 而渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 代入可得答案.

【解答】解: 由双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$),

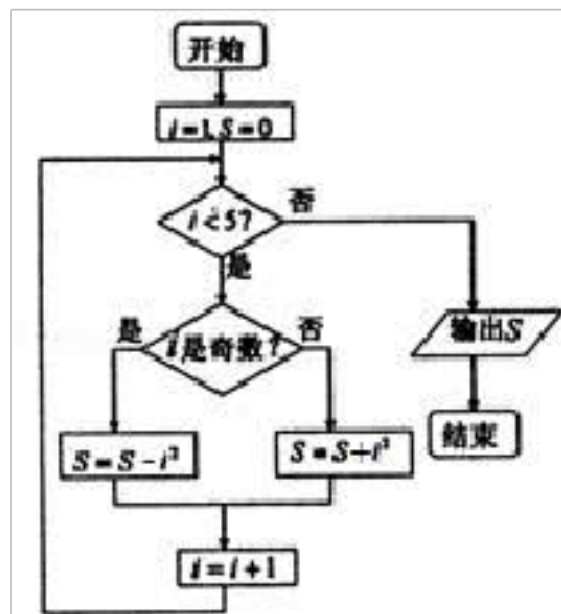
则离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 即 $4b^2=a^2$,

故渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{2}x$,

故选: D.

【点评】本题考查双曲线的简单性质, 涉及的渐近线方程, 属基础题.

5. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 的值为 ()



A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

【分析】由已知中的程序语句可知该框图的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

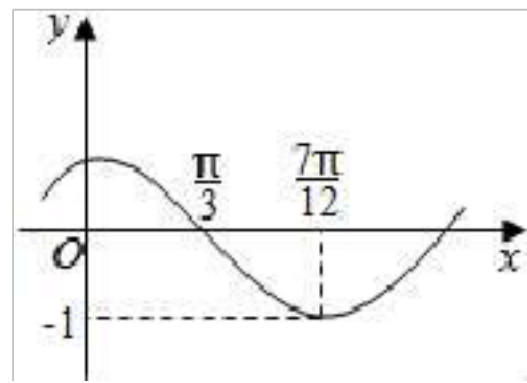
【解答】解：模拟执行程序框图，由程序框图可知该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 $S = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2$ 的值，

$$\therefore S = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 = 10$$

故选：D.

【点评】本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，属于基础题.

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象. 关于函数 $g(x)$ ，下列说法正确的是 ()



- A. 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数
- B. 其图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称
- C. 函数 $g(x)$ 是奇函数
- D. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时，函数 $g(x)$ 的值域是 $[-1, 2]$

【分析】由条件利用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律求得 $g(x)$ 的解析式，再利用余弦函数的图象性质，得出结论.

【解答】解：把函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x) = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\cos 2x$ 的图象，

显然，函数 $g(x)$ 是偶函数，故排除 C.

当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ， $2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ，函数 $g(x)$ 为减函数，故排除 A.

当 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $g(x) = 0$, 故 $g(x)$ 的图象不关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称, 故排除 B.

当 $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 时, $2x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$, $\cos 2x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, 函数 $g(x)$ 的值域是 $[-1, 2]$,

故选: D.

【点评】 本题主要考查函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 余弦函数的图象性质, 属于基础题.

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_3, a_{13} 成等比数列, 若 $a_1 = 1$, S_n 是数列 $\{a_n\}$

前 n 项的和, 则 $\frac{2S_n + 16}{a_n + 3}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 的最小值为 ()

- A. 4 B. 3 C. $2\sqrt{3} - 2$ D. $\frac{9}{2}$

【分析】 由题意得 $(1+2d)^2 = 1+12d$, 求出公差 d 的值, 得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 前 n

项和, 从而可得 $\frac{2S_n + 16}{a_n + 3}$, 换元, 利用基本不等式, 即可求出函数的最小值.

【解答】 解: $\because a_1 = 1, a_1, a_3, a_{13}$ 成等比数列,

$$\therefore (1+2d)^2 = 1+12d.$$

得 $d=2$ 或 $d=0$ (舍去),

$$\therefore a_n = 2n - 1,$$

$$\therefore S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2,$$

$$\therefore \frac{2S_n + 16}{a_n + 3} = \frac{2n^2 + 16}{2n + 2}.$$

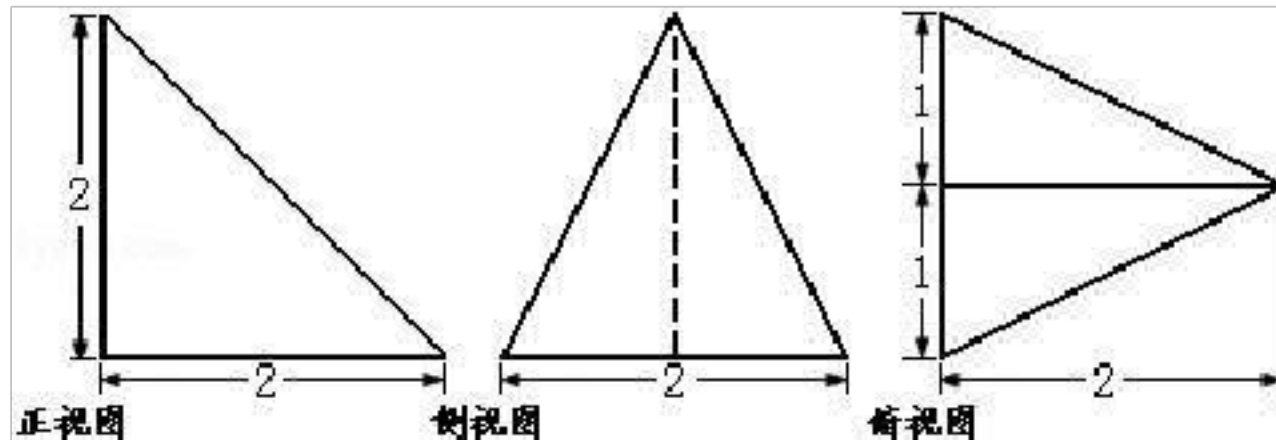
$$\text{令 } t = n + 1, \text{ 则 } \frac{2S_n + 16}{a_n + 3} = t + \frac{9}{t} - 2 \geq 6 - 2 = 4$$

当且仅当 $t=3$, 即 $n=2$ 时, $\therefore \frac{2S_n + 16}{a_n + 3}$ 的最小值为 4.

故选: A.

【点评】本题主要考查等比数列的定义和性质，等比数列的通项公式，考查基本不等式，属于中档题.

8. 一个棱锥的三视图如图(尺寸的长度单位为 m), 则该棱锥的全面积是(单位: m^2). ()



- A. $4+2\sqrt{6}$ B. $4+\sqrt{6}$ C. $4+2\sqrt{2}$ D. $4+\sqrt{2}$

【分析】由三视图可以看出，此几何体是一个侧面与底面垂直的三棱锥，垂直于底面的侧面是一个高为 2，底连长也为 2 的等腰直角三角形，底面与垂直于底面的侧面全等，此两面的面积易求，另两个与底面不垂直的侧面是全等的，可由顶点在底面上的射影作出此两侧面底边的高，将垂足与顶点连接，此线即为侧面三角形的高线，求出侧高与底面的连长，用三角形面积公式求出此两侧面的面积，将四个面的面积加起来即可

【解答】解：由三视图可以看出，此几何体是一个侧面与底面垂直且底面与垂直于底面的侧面全等的三棱锥

由图中数据知此两面皆为等腰直角三角形，高为 2，底面连长为 2，故它们的面积皆为

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2,$$

由顶点在底面的投影向另两侧面的底边作高，由等面积法可以算出，此二高线的长度长度相等，为 $\frac{2}{\sqrt{5}}$,

将垂足与顶点连接起来即得此两侧面的斜高，由勾股定理可以算出，此斜高为 $2\sqrt{\frac{6}{5}}$ ，同理

可求出侧面底边长为 $\sqrt{5}$,

$$\text{可求得此两侧面的面积皆为 } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{6}{5}} \times \sqrt{5} = \sqrt{6},$$

$$\text{故此三棱锥的全面积为 } 2+2+\sqrt{6}+\sqrt{6}=4+2\sqrt{6},$$

故选 A.

【点评】本题考点是由三视图求几何体的面积、体积，考查对三视图的理解与应用，主要考查对三视图与实物图之间的关系，用三视图中的数据还原出实物图的数据，再根据相关的公

式求表面积与体积，本题求的是三棱锥的全面积，做本题时要注意本题中的规律应用，即四个侧面两两相等，注意到这一点，可以大大降低运算量。三视图的投影规则是主视、俯视 长对正；主视、左视高平齐，左视、俯视 宽相等。

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x+1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，则方程 $f(x) = ax$ 恰有两个不同实数根时，实数 a

的取值范围是 () (注: e 为自然对数的底数)

- A. $(0, \frac{1}{e})$ B. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}]$ C. $(0, \frac{1}{4})$ D. $[\frac{1}{4}, e]$

【分析】由题意，方程 $f(x) = ax$ 恰有两个不同实数根，等价于 $y=f(x)$ 与 $y=ax$ 有 2 个交点，又 a 表示直线 $y=ax$ 的斜率，求出 a 的取值范围。

【解答】解: \because 方程 $f(x) = ax$ 恰有两个不同实数根，

$\therefore y=f(x)$ 与 $y=ax$ 有 2 个交点，

又 $\because a$ 表示直线 $y=ax$ 的斜率，

$$\therefore y' = \frac{1}{x},$$

设切点为 (x_0, y_0) ， $k = \frac{1}{x_0}$ ，

\therefore 切线方程为 $y - y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ ，

而切线过原点， $\therefore y_0 = 1$ ， $x_0 = e$ ， $k = \frac{1}{e}$ ，

\therefore 直线 l_1 的斜率为 $\frac{1}{e}$ ，

又 \because 直线 l_2 与 $y = \frac{1}{4}x + 1$ 平行，

\therefore 直线 l_2 的斜率为 $\frac{1}{4}$ ，

\therefore 实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{e})$ 。

故选: B.

【点评】本题考查了函数的图象与性质的应用问题，解题时应结合图象，以及函数与方程的关系，进行解答，是易错题。

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 正三角形 $\triangle AF_1F_2$ 的顶点 A

在 y 轴上, 边 AF_1 与双曲线左支交于点 B , 且 $\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{BF_1}$, 则双曲线 C 的离心率的值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{13}+1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{3} + 1$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

【分析】不妨设 $\triangle AF_1F_2$ 的边长为 4, 求得 $c=2$, 由向量共线可得 $|BF_1|=1$, 在 $\triangle BF_1F_2$ 中, 由余弦定理求得 $|BF_2|=\sqrt{13}$, 再由双曲线的定义和离心率公式计算即可得到所求值.

【解答】解: 不妨设 $\triangle AF_1F_2$ 的边长为 4, 则 $|F_1F_2|=2c=4$, $c=2$.

由 $\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{BF_1}$, 可得 $|BF_1|=1$,

在 $\triangle BF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得 $|BF_2|^2 = |BF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|BF_1||F_1F_2|\cos\angle BF_1F_2$
 $= 1 + 16 - 2 \times 1 \times 4 \times \frac{1}{2} = 13$, $|BF_2| = \sqrt{13}$,

由双曲线的定义可得 $2a = |BF_2| - |BF_1| = \sqrt{13} - 1$,

解得 $a = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$,

则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3}$.

故选: B.

【点评】本题考查双曲线的离心率的求法, 注意运用双曲线的定义和余弦定理, 考查运算能力, 属于中档题.

11. 已知一个平放的棱长为 4 的三棱锥内有一小球 O (重量忽略不计), 现从该三棱锥顶端向内注水, 小球慢慢上浮, 若注入的水的体积是该三棱锥体积的 $\frac{7}{8}$ 时, 小球与该三棱锥各侧面均相切 (与水面也相切), 则球的表面积等于 ()

- A. $\frac{7}{6}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{1}{2}\pi$

【分析】先求出没有水的部分的体积是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 再求出棱长为 2, 可得小球的半径, 即可求出球的表面积.

【解答】解: 由题意, 没有水的部分的体积是正四面体体积的 $\frac{1}{8}$,

∵正四面体的各棱长均为 4,

$$\therefore \text{正四面体体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times \sqrt{16 - \frac{16}{3}} = \frac{16\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \text{没有水的部分的体积是 } \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{设其棱长为 } a, \text{ 则 } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore a=2,$$

$$\text{设小球的半径为 } r, \text{ 则 } 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 r = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore \text{球的表面积 } S = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{2}{3}\pi.$$

故选: C.

【点评】 本题考查球的表面积, 考查体积的计算, 考查学生分析解决问题的能力, 正确求出半径是关键.

12. 若定义在区间 $[-2016, 2016]$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1, x_2 \in [-2016, 2016]$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 2016$, 且 $x > 0$ 时, 有 $f(x) < 2016$, $f(x)$ 的最大值、最小值分别为 M, N , 则 $M+N$ 的值为 ()

A. 2015 B. 2016 C. 4030 D. 4032

【分析】 特殊值法: 令 $x_1 = x_2 = 0$, 得 $f(0) = 2016$, 再令 $x_1 + x_2 = 0$, 将 $f(0) = 2016$ 代入可得 $f(x) + f(-x) = 4032$. 根据条件 $x > 0$ 时, 有 $f(x) < 2016$, 得出函数的单调性, 根据单调性求出函数的最值.

【解答】 解: ∵对于任意的 $x_1, x_2 \in [-2016, 2016]$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 2016$,

$$\therefore \text{令 } x_1 = x_2 = 0, \text{ 得 } f(0) = 2016,$$

再令 $x_1 + x_2 = 0$, 将 $f(0) = 2016$ 代入可得 $f(x) + f(-x) = 4032$.

设 $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [-2016, 2016]$,

$$\text{则 } x_2 - x_1 > 0, f(x_2 - x_1) = f(x_2) + f(-x_1) - 2016,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/298015046026006026>