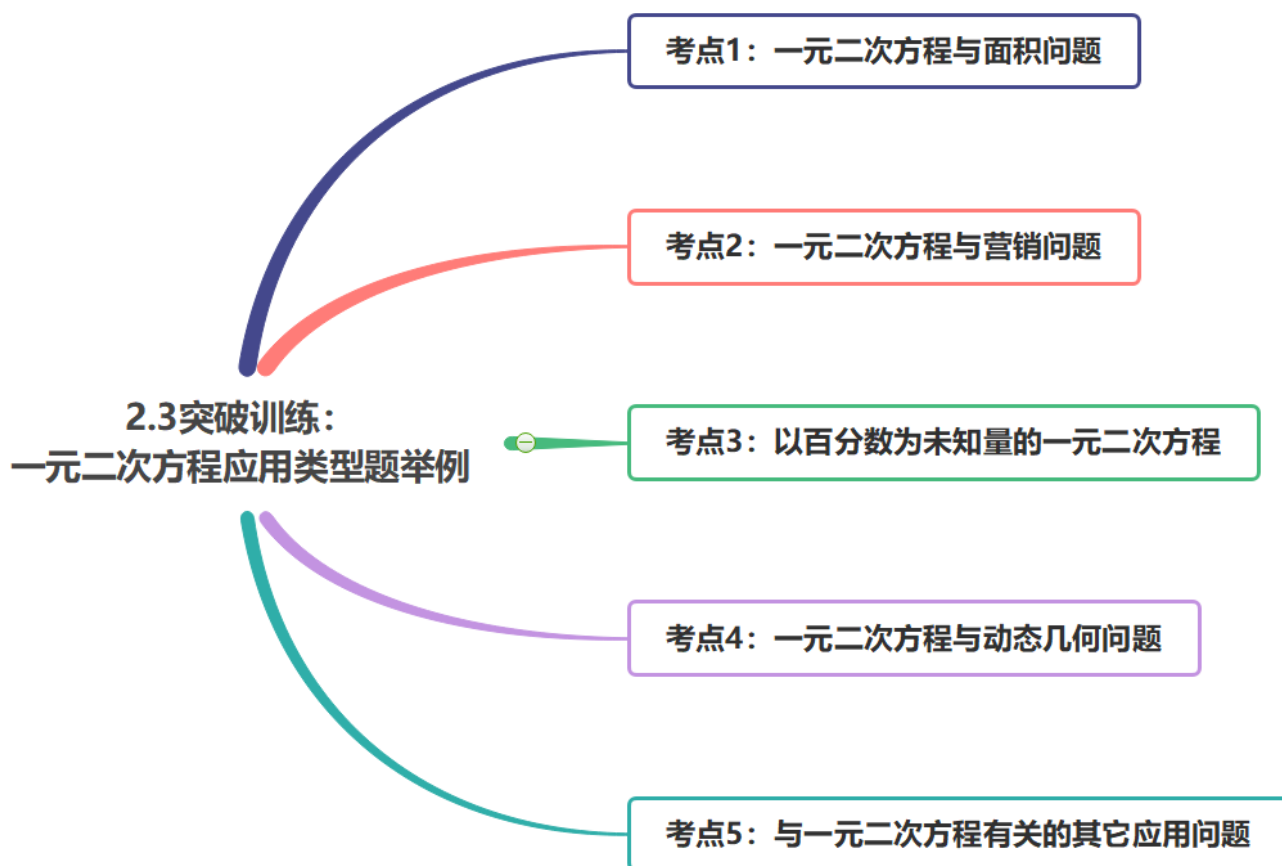


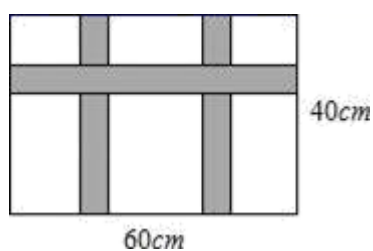
2.3 突破训练：一元二次方程应用类型题举例

类型体系 (本专题共 47 题 41 页)



考点 1：一元二次方程与面积问题

典例：(2020·湖北孝感市·九年级月考)某公司展销如图所示的长方形工艺品，该工艺品长 60cm 宽 40cm，中间镶有宽度相同的三条丝绸花边。



- (1) 若丝绸花边的面积(阴影面积)为 650cm^2 ，求丝绸花边的宽度；
- (2) 已知该工艺品的成本是 40 元/件，如果以单价 100 元/件销售，那么每天可售出 200 件，另每天还需支付各种费用 2000 元，根据销售经验，如果将销售单价降低 1 元，每天可多售出 20 件，同时，为了完成销售任务，该公司每天至少要销售 800 件。
 - (i) 若想每天获利 18000 元，该公司应该把销售单价定为多少元？
 - (ii) 该公司应该把销售单价定为多少元，才能使每天所获销售利润最大?最大利润是多少？

【答案】(1) 5cm; (2) (i) 60 元; (ii) 当售价定为 70 元时，能使所获利润最大，最大利润是 22000 元

【详解】解：(1) 设花边的宽度为 $x\text{cm}$ ，根据题意得：

$$(60-2x)(40-x)=60\times 40-650,$$

解得： $x=5$ 或 $x=65$ (不合题意，舍去)。

答：丝绸花边的宽度为 5cm ；

(2) (i) 设每件工艺品定价 x 元，则

$$(x-40)[200+20(100-x)]-2000=18000,$$

解得： $x_1=60$ ， $x_2=90$ ，

当 $x=60$ 时，销售量 $=200+20\times 40=1000$ 件，

当 $x=90$ 时，销售量 $=200+20\times 10=400$ 件， $400<800$ ，所以 $x=90$ 应舍去；

答：该公司应该把销售单价定为 60 元。

(ii) 设每件工艺品定价 x 元出售，获利 y 元，则根据题意可得：

$$y=(x-40)[200+20(100-x)]-2000=-20(x-75)^2+22500,$$

\because 销售件数至少为 800 件，

$$\therefore 200+20(100-x)\geq 800,$$

解得： $x\leq 70$ ，故 $40<x\leq 70$ ，

\because 抛物线的开口向下，且当 $x<75$ 时， y 随 x 的增大而增大，

\therefore 当 $x=70$ 时， y 有最大值 $=22000$ ，

所以该公司应该把售价定为 70 元，才能使每天所获利润最大，最大利润是 22000 元。

方法或规律点拨

本题主要考查了一元二次方程和二次函数的应用，属于常考题型，正确理解题意、列出一元二次方程和二次函数关系式、熟练掌握二次函数的性质是解题的关键。

巩固练习

1. (2020·西安市第三十一中学九年级其他模拟) 如图 1，有一张长 32cm ，宽 16cm 的长方形硬纸片，裁去角上 2 个小正方形和 2 个小长方形 (图中阴影部分) 之后，恰好折成如图 2 所示的有盖纸盒。若纸盒的底面积是 130cm^2 ，则纸盒的高为 ()

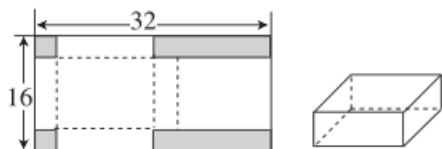


图 1 单位: cm 图 2

- A. 2cm B. 2.5cm C. 3cm D. 4cm

【答案】C

【详解】

依题意，得 $\frac{(32-2x)}{2} \times (16-2x) = 130$ ，

化简，得 $x^2 - 24x + 63 = 0$ ，

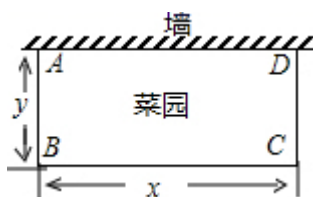
解得 $x_1 = 3, x_2 = 21$ 。

当 $x = 21$ 时， $16 - 2x = -26 < 0$ ，不符合题意，舍去。

故纸盒的高为 3cm，

故选：C。

2. (2012·黑龙江哈尔滨市·中考真题) 李大爷要围成一个矩形菜园，菜园的一边利用足够长的墙，用篱笆围成的另外三边总长应恰好为 24 米。要围成的菜园是如图所示的矩形 ABCD。设 BC 边的长为 x 米，AB 边的长为 y 米，则 y 与 x 之间的函数关系式是()



A. $y = -2x + 24 (0 < x < 12)$

B. $y = -\frac{1}{2}x + 12 (0 < x < 24)$

C. $y = 2x - 24 (0 < x < 12)$

D. $y = \frac{1}{2}x - 12 (0 < x < 24)$

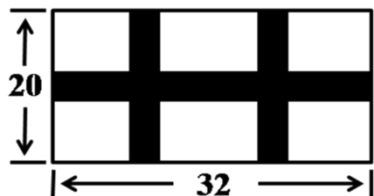
【答案】B

【解析】

由实际问题抽象出函数关系式关键是找出等量关系，本题等量关系为“用篱笆围成的另外三边总长应恰好为 24 米”，结合 BC 边的长为 x 米，AB 边的长为 y 米，可得 $BC + 2AB = 24$ ，即 $x + 2y = 24$ ，即

$y = -\frac{1}{2}x + 12$ 。因为菜园的一边是足够长的墙，所以 $0 < x < 24$ 。故选 B。

3. (2019·全国九年级课时练习) 如图是宽为 20m，长为 32m 的矩形耕地，要修筑同样宽的三条道路(互相垂直)，把耕地分成六块大小相等的试验地，要使试验地的面积为 570m^2 ，问：道路宽为多少米？



【答案】1 米

【详解】

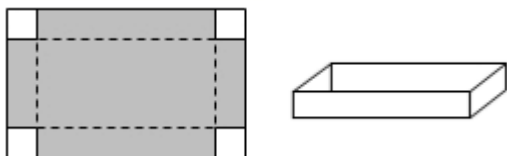
解：设道路宽为 x 米，依题意得：

$$(32 - 2x)(20 - x) = 570$$

解得 $x_1 = 1, x_2 = 35$ (不合题意, 舍去)

答: 道路宽为 1 米.

4. (2020 · 湖北省初三月考) 如图是一张长 20cm 、宽 12cm 的矩形纸板, 将纸板四个角各剪去一个边长相同的正方形, 然后将四周折起, 可制成一个无盖纸盒, 若要制成一个底面积为 180cm^2 的无盖长方体纸盒, 求需要剪去的正方形的边长为多少?



【答案】正方形的边长为 1cm

【解析】

解: 设正方形的边长为 $x\text{ cm}$

则无盖纸盒的长为 $(20 - 2x)\text{cm}$, 宽为 $(12 - 2x)\text{cm}$

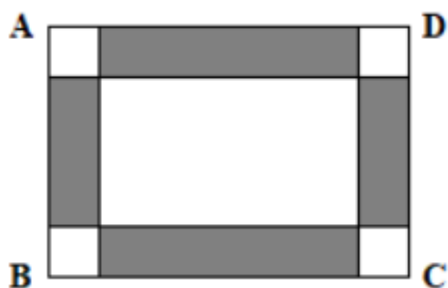
$$(20 - 2x)(12 - 2x) = 180$$

$$x^2 - 16x + 15 = 0$$

解得: $x_1 = 1, x_2 = 15$ (不合题意, 舍去)

答: 正方形的边长为 1cm

5. (2020 · 哈尔滨市松雷中学校初二月考) 某社区进行环境改造, 计划用地面砖铺设楼前矩形广场的地面 $ABCD$, 已知矩形广场地面的长为 100 米, 宽为 80 米, 图案设计如图所示: 广场的四角为边长相同的小正方形, 阴影分为四个矩形, 四个矩形的宽都为小正方形的边长, 阴影部分铺绿色地面砖, 其余部分铺白色地面砖.



(1) 要使铺白色地面砖的面积为 5200 平方米, 并且四个角的小正方形面积的和不超过 500 平方米, 那么这个矩形广场的四个角的小正方形的边长应为多少米?

(2) 在 (1) 的条件下, 为了增加广场的绿化同时节省开支, 现将广场四角的白色正方形地面砖的 85% 中的一部分改为种植绿色景观, 另一部分铺设绿色地面砖. 经过市场调查了解到种植绿色景观每平方米的费用为 30 元, 白色地面砖每平方米的费用为 20 元, 绿色地面砖每平方米的费用为 10 元. 若广场四角的总费用不超过 9400 元, 则最多可以将多少面积的白色地面砖改为种植绿色景观?

【答案】(1) 10米. (2) 最多可以将 $240m^2$ 的白色地面砖改为种植绿色景观.

【解析】

解: (1) 设矩形广场四角的小正方形的边长为 x 米, 根据题意, 得:

$$4x^2 + (100 - 2x)(80 - 2x) = 5200,$$

整理, 得: $x^2 - 45x + 350 = 0,$

解之, 得: $x_1 = 35, x_2 = 10,$

∵ 四个角的小正方形面积的和不超过 500 平方米,

∴ $x = 10$

∴ 要使铺白色地面砖的面积为 5200 平方米,

则矩形广场四角的小正方形的边长为 10 米.

(2) 设最多可以将 am^2 的白色地面砖改为种植绿色景观, 则铺设绿色地面砖的面积为: $(85\% \times 400 - a)m^2,$ 则

$$30a + 10(340 - a) + 60 \times 20 \leq 9400,$$

解之得: $a \leq 240.$

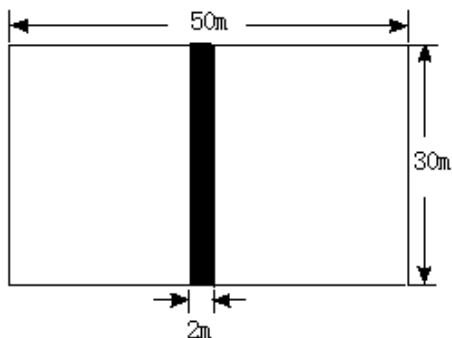
最多可以将 $240m^2$ 的白色地面砖改为种植绿色景观

6. (2020·黄石市教育局初三一模) 某广场有一块长 50 米、宽 30 米的空地, 现要将它改造为花园, 请你设计一个修建方案, 使满足下列条件:

(1) 正中间留出一条宽 2 米的道路(如图);

(2) 道路两旁修建花坛, 且花坛总面积占整个面积(不包括道路)的一半;

(3) 设计好的整个图形既是轴对称图形, 又是中心对称图形. (计算结果精确到 0.1 米).



【答案】 x 的值约取 3.9 米.

【解析】

解: 设计成如下图方案.

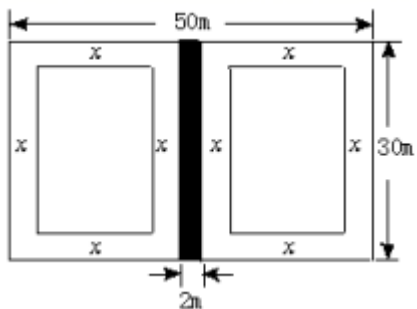
设花坛的边与空地之间的距离为 x 米,

由题意可列方程:

$$(50 - 2 - 4x)(30 - 2x) = \frac{(50 - 2) \times 30}{2},$$

$$\therefore x^2 - 27x + 90 = 0,$$

解得： $x_1 \approx 3.9, x_2 \approx 23.1$ (舍去),



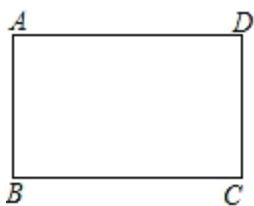
$\therefore x$ 的值约取 3.9 米.

花坛四周与空地的距离，中间与道路的距离都约为 3.9 米.

7. (2019 · 武昌文华中学初一月考) 小丽手中有块长方形的硬纸片，其中长比宽多 10cm，长方形的周长是 100cm.

(1) 求长方形的面积.

(2) 现小丽想用这块长方形的硬纸片，沿着边的方向裁出一块长与宽的比为 5:4，面积为 520cm^2 的新纸片作为他用. 试判断小丽能否成功，并说明理由.



【答案】(1) 长方形的面积为 600cm^2 ; (2) 不能成功，理由详见解析.

【解析】

解：(1) 设长方形的长为 $x\text{cm}$ ，宽为 $y\text{cm}$ ，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} x - y = 10 \\ 2(x + y) = 100 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases},$$

\therefore 长方形面积为： $30 \times 20 = 600\text{cm}^2$ ，

答：长方形的面积为 600cm^2 ;

(2) 不能成功，理由如下：

设长方形纸片的长为 $5a(a > 0)\text{cm}$ ，则宽为 $4a\text{cm}$ ，

根据题意得： $5a \times 4a = 520$ ，

解得： $a_1 = \sqrt{26}$ ， $a_2 = -\sqrt{26}$ （不合题意，舍去），

$$\therefore 5a = 5\sqrt{26}, \quad 4a = 4\sqrt{26},$$

$$\therefore 4\sqrt{26} > 4\sqrt{25} = 20,$$

即纸片的宽大于原来硬纸片的宽，

\therefore 小丽不能成功.

考点 2：一元二次方程与营销问题

典例：（2020·河北衡水市·九年级一模）某公司把一种原料加工成产品进行销售，已知某月共加工原料 x 吨，恰好能生产相同吨数的产品并能完全销售. 每吨原料的加工成本 Q （万元）与 x （吨）有如下关系：

$Q = ax + \frac{b}{x} - 30$ （其中 a 、 b 均为常数），且在整个过程中，经过统计得到如下数据：

x （吨）	30	60
Q （万元）	70	35

（1）求 a 、 b 的值；

（2）若这个月的加工总成本为 2052 万元，求 x 的值；

（3）若生产的产品每吨售价 60 万元，求该月可获得的最大利润是多少万元？

【答案】（1） $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 2700 \end{cases}$ ；（2） $x_1 = 54$ ， $x_2 = 36$ ；（3）该月可获得的最大利润为 3375 万元

【详解】

解：（1）由题意得，
$$\begin{cases} 70 = 30a + \frac{b}{30} - 30 \\ 35 = 60a + \frac{b}{60} - 30 \end{cases},$$

解这个方程组，得
$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 2700 \end{cases}.$$

（2） $\therefore \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 2700 \end{cases},$

$$\therefore Q = \frac{1}{2}x + \frac{2700}{x} - 30,$$

由题意得， $x\left(\frac{1}{3}x + \frac{2700}{x} - 30\right) = 2052,$

整理得， $\frac{1}{3}x^2 - 30x + 648 = 0$ ，

解之得， $x_1 = 54$ ， $x_2 = 36$ 。

(3) 设该月可获得的利润为 W ，

由题意得， $W = 60x - x\left(\frac{1}{3}x + \frac{2700}{x} - 30\right) = -\frac{1}{3}(x-135)^2 + 3375$ ，

所以当 $x = 135$ 时，该月可获得的最大利润为 3375 万元。

方法或规律点拨

本题考查了二元一次组的应用，一元二次方程的应用，以及二次函数的应用，熟练掌握各知识点是解答本题的关键。

巩固练习

1. (2020·江西九年级一模) 小明妈妈在春节期间以 160 元/件的价格购进了一批商品，如果按标价 200 元/件出售，那么每天可以销售 20 件。为了尽快减少库存，小明妈妈决定采取降价促销措施，经试销发现，每件商品每降价 1 元，平均每天可多售出 2 件，若平均每天要盈利 1200 元，每件商品应降价多少元？为了满足降价要求，小明妈妈应打几折出售？

【答案】 每件商品应降价 20 元；为了满足降价要求，小明妈妈应打 9 折出售。

【详解】

解：设每件商品应降价 x 元。

$$(200 - 160 - x)(20 + 2x) = 1200$$

解得： $x_1 = 10$ ， $x_2 = 20$

∵ 尽快减少库存，

∴ $x = 20$ ，每件商品应降价 20 元。

设小明妈妈应打 a 折出售，

$$\text{则 } 200 \times \frac{a}{10} = 200 - 20，$$

解得： $a = 9$

∴ 每件商品应降价 20 元；为了满足降价要求，小明妈妈应打 9 折出售。

2. (2020·南京市金陵汇文学校九年级月考) 2020 年，受新冠肺炎疫情影响，口罩紧缺，某网店以每袋 8 元（一袋十个）的成本价购进了一批口罩，二月份以一袋 14 元销售了 256 袋，三、四月该口罩十分畅销，销售量持续走高，在售价不变的基础上，四月份的销售量达到 400 袋。

(1) 求三、四这两个月销售量的月平均增长率；

(2) 为回馈客户，该网店决定五月降价促销。经调查发现，在四月份销量的基础上，该口罩每袋降价 1 元，销售量就增加 40 袋，当口罩每袋降价多少元时，五月份可获利 1920 元？

【答案】 (1) 三、四这两个月销售量的月平均增长率为 25%。(2) 当口罩每袋降价 2 元时，五月份可获利

1920 元.

【详解】

解：(1) 设三、四这两个月销售量的月平均增长率为 x ，

依题意，得： $256(1+x)^2 = 400$ ，

解得： $x_1 = 0.25 = 25\%$ ， $x_2 = -2.25$ （不合题意，舍去）.

答：三、四这两个月销售量的月平均增长率为 25%.

(2) 设口罩每袋降价 y 元，则五月份的销售量为 $(400 + 40y)$ 袋，

依题意，得： $(14 - y - 8)(400 + 40y) = 1920$ ，

化简，得： $y^2 + 4y - 12 = 0$ ，

解得： $y_1 = 2$ ， $y_2 = -6$ （不合题意，舍去）.

答：当口罩每袋降价 2 元时，五月份可获利 1920 元.

3. (2019·漳州外国语学校九年级一模) 西瓜经营户以 2 元/千克的价格购进批小型西瓜，以 3 元/千克的价格出售，每天可售出 200 千克，为了促销，该经营户决定降价销售. 经调查发现，这种小型西瓜每降价 0.1 元/千克，每天可多售出 40 千克. 另外，每天的房租等固定成本共 24 元. 该经营户要想每天盈利 200 元，应将每千克小型西瓜的售价降低多少元？

(1) 若设应将每千克的售价降低 x 元，那么每千克的利润为_____元，降价后每天售出数量为_____千克；

(2) 请在第(1)小题的基础上，列出方程把此题解答完整.

【答案】(1) $1-x$ ， $200+400x$ ；(2) 应将每千克小型西瓜的售价降低 0.3 元.

【详解】

(1) 设应将每千克小型西瓜的售价降低 x 元. 那么每千克的利润为： $(3-2-x) = (1-x)$ 元，由于这种小型西瓜每降价 0.1 元/千克，每天可多售出 40 千克. 所以降价 x 元，则每天售出数量为： $200 + \frac{40x}{0.1} =$

$(200+400x)$ 千克.

故填： $1-x$ ； $200+400x$

(2) 根据题意，得 $(1-x)(200+400x) - 24 = 200$.

解这个方程，得 $x_1 = 0.2$ ， $x_2 = 0.3$.

因为为了促销故 $x = 0.2$ 不符合题意，舍去，

$\therefore x = 0.3$.

答：应将每千克小型西瓜的售价降低 0.3 元.

4. (2019·乐清市英华学校九年级月考) 某商家经销一种绿茶，用于装修门面已投资 3000 元. 已知绿茶每千克成本 50 元，经研究发现销量 w (kg) 随销售单价 x (元/kg) 的变化而变化，具体变化规律如下表所示

销售单价 x (元/	70	75	80	85	90
--------------	-------	----	----	----	----	----	-------

kg)							
月销售量 w (kg)	100	90	80	70	60

设该绿茶的月销售利润为 y (元) (销售利润=单价×销售量-成本)

- 请根据上表, 写出 w 与 x 之间的函数关系式 (不必写出自变量 x 的取值范围);
- 求 y 与 x 之间的函数关系式 (不必写出自变量 x 的取值范围), 并求出 x 为何值时, y 的值最大?
- 若在第一个月里, 按使 y 获得最大值的销售单价进行销售后, 在第二个月里受物价部门干预, 销售单价不得高于 90 元, 要想在全部收回投资的基础上使第二个月的利润达到 1700, 那么第二个月时里应该确定销售单价为多少元?

【答案】 (1) $w = -2x + 240$; (2) $y = -2(x - 85)^2 + 2450$; 当 $x = 85$ 时, $y_{\max} = 2450$ (3) 75

【详解】

解: (1) 设 $w = kx + b$, 将 $(70, 100)$, $(75, 90)$ 代入上式得:

$$\begin{cases} 70k + b = 100 \\ 75k + b = 90 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} k = -2 \\ b = 240 \end{cases}$, 则 $w = -2x + 240$

(2) $y = (x - 50)w = (x - 50)(-2x + 240) = -2x^2 + 340x - 9000$

因此, y 与 x 的关系式为 $y = -2x^2 + 340x - 9000 = -2(x - 85)^2 + 2450$

当 $x = 85$ 时, $y_{\max} = 2450$

(3) 故第 1 个月还有 $3000 - 2450 = 550$ 元的投资成本没有收回.

则要想在全部收投资的基础上使第二个月的利润达到 1700 元, 即 $y = 2250$ 才可以,

可得方程 $-2(x - 85)^2 + 2450 = 2250$

解得: $x_1 = 75, x_2 = 95$

根据题意 $x_2 = 95$ 不合题意, 应舍去

答: 当销售单价为 75 元时

5. (2020·丹东市第七中学初三一模) 某商场经销一种成本为每千克 40 元的水产品, 经市场分析, 若按每千克 50 元销售, 一个月能售出 500 千克; 销售单价每涨价 1 元, 月销售量就减少 10 千克. 针对这种水产品的销售情况, 请解答以下问题.

- 当销售单价定为每千克 55 元, 计算月销售量和月销售利润;
- 商场计划在月销售成本不超过 10000 元的情况下, 使得月销售利润达到 8000 元, 销售单价应定为多

少?

【答案】(1) 月销售量 450 千克, 月利润 6750 元; (2) 销售单价应定为 80 元/千克

【解析】

(1) 月销售量为: $500 - 5 \times 10 = 450$ (千克),

月利润为: $(55 - 40) \times 450 = 6750$ (元).

(2) 设单价应定为 x 元,

得: $(x - 40) [500 - 10(x - 50)] = 8000$,

解得: $x_1 = 60, x_2 = 80$.

当 $x = 60$ 时, 月销售成本为 16000 元, 不合题意舍去.

$\therefore x = 80$.

答: 销售单价应定为 80 元/千克.

6. (2020·福建厦门市·厦门一中九年级其他模拟) 某世界顶尖中国手机公司在市场销售“China2020”品牌手机, 由于手机价格会随着时间的变化而变化, 该手机在第 x 年 (x 为整数) 的售价为 y 元, y 与 x 满足函数关系式: $y = -500x + 5000$. 该公司预计第 x 年的“China2020”手机的销售量为 z (百万台), z 与 x 的对应关系如表:

第 x 年	1	2	3	4	5	...
销售量 z (百万台)	14	16	18	20	22	...

(1) 求 z 与 x 函数关系式;

(2) 设第 x 年“China2020”手机的年销售额为 W (百万元), 试问该公司销售“China2020”手机在第几年的年销售额可以达到最大? 最大值为多少百万元?

(3) 若生产一台“China2020”手机的成本为 3000 元, 如果你是该公司的决策者, 要使得公司的累计总利润最大, 那么“China2020”手机销售几年就应该停产, 去创新新的手机?

【答案】(1) $z = 2x + 12$; (2) 在第二年的年销售额最大, 最大为 64000 百万元; (3) 第四年该手机应该停产.

【详解】

(1) 由表格数据看, z 与 x 的对应关系为一次函数关系, 设其表达式为 $z = kx + b$,

将 $(1, 14), (2, 16)$ 代入上式得 $\begin{cases} k + b = 14 \\ 2k + b = 16 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = 2 \\ b = 12 \end{cases}$,

故 z 与 x 的函数关系式为 $z = 2x + 12$;

(2) 由题意得: $W = yz = (-500x + 5000)(2x + 12)$,

整理得: $W = -1000(x - 2)^2 + 64000$,

由二次函数的性质可知, 当 $x = 2$ 时, W 取得最大值, 最大值为 64000,

答：在第二年的年销售额最大，最大为 64000 百万元；

(3) 当该年的手机利润为 0 时，该公司就应该停产，去创新新的手机，

$$\text{则 } (2x+12)(-500x+5000-3000)=0,$$

$$\text{整理得： } (x+6)(x-4)=0,$$

$$\text{解得 } x_1=4, x_2=-6 \text{ (不符题意，舍去),}$$

答：第四年该手机应该停产。

7. (2019·辽宁省初三月考) 某商店经销甲、乙两种商品·现有如下信息：信息 1：甲、乙两种商品的进货单价之和是 3 元；信息 2：甲商品零售单价比进货单价多 1 元，乙商品零售单价比进货单价的 2 倍少 1 元；信息 3：按零售单价购买甲商品 3 件和乙商品 2 件，共付了 12 元。请根据以上信息，解答下列问题：

(1) 求甲、乙两种商品的零售单价；

(2) 该商店平均每天卖出甲商品 500 件和乙商品 1200 件·经调查发现，甲种商品零售单价每降 0.1 元，甲种商品每天可多销售 100 件·商店决定把甲种商品的零售单价下降 $m(m > 0)$ 元·在不考虑其他因素的情况下，当 m 为多少时，商店每天销售甲、乙两种商品获取的总利润为 1700 元？

【答案】(1) 甲、乙零售单价分别为 2 元和 3 元；(2) 当 m 定为 0.5 元才能使商店每天销售甲、乙两种商品获取的利润共 1700 元。

【解析】

(1) 假设甲、种商品的进货单价为 x ， y 元，乙种商品的进货单价为 y 元，

$$\text{根据题意可得： } \begin{cases} x+y=3 \\ 3(x+1)+2(2y-1)=12, \end{cases}$$

$$\text{解得： } \begin{cases} x=1 \\ y=2, \end{cases}$$

故甲、乙零售单价分别为 2 元和 3 元；

(2) 根据题意得出：

$$(1-m)\left(500+100\times\frac{m}{0.1}\right)+1\times 1200=1700,$$

$$\text{即 } 2m^2 - m = 0,$$

$$\text{解得 } m = 0.5 \text{ 或 } m = 0 \text{ (舍去),}$$

答：当 m 定为 0.5 元才能使商店每天销售甲、乙两种商品获取的利润共 1700 元。

考点 3：以百分数为未知量的一元二次方程

典例：(2020·沙坪坝区·重庆八中九年级课时练习) 某蛋糕店一直销售的是奶酥饼干，近期又推出了焦糖饼干，其中焦糖饼干的销售单价是奶酥饼干的 1.25 倍，8 月份，焦糖饼干和奶酥饼干共销售 150 千克，焦糖饼干的销售额是 1200 元，奶酥饼干的销售额为 1440 元。

(1) 求焦糖饼干、奶酥饼干的销售单价各是多少?

(2) 为推广新产品, 该蛋糕店在 9 月推出“悦享会员”活动, 对所有的饼干均可享受 $a\%$ 的折扣, 非“悦享会员”需要按照原价购买, 就焦糖饼干而言, 9 月销量比 8 月销量增加了 $a\%$, 其中通过“悦享会员”购买的销量占 9 月焦糖饼干销量的 $\frac{5}{6}$, 而 9 月焦糖饼干的销售总额比 8 月焦糖饼干销售额提高了 $\frac{1}{12}a\%$, 求 a 的值.

【答案】(1) 焦糖饼干的销售单价是 20 元, 奶酥饼干的销售单价是 16 元; (2) 10.

【详解】

解: (1) 设奶酥饼干的销售单价是 x 元, 则焦糖饼干的销售单价是 $1.25x$ 元, 依题意有

$$\frac{1200}{1.25x} + \frac{1440}{x} = 150,$$

解得 $x=16$,

经检验, $x=16$ 是原方程的解,

$$1.25x = 1.25 \times 16 = 20.$$

故焦糖饼干的销售单价是 20 元, 奶酥饼干的销售单价是 16 元;

(2) 8 月焦糖饼干的销量为 $1200 \div 20 = 60$ (千克),

$$\text{依题意有 } 60(1+a\%) \times \frac{5}{6} \times 20(1-a\%) + 60(1+a\%) \times \frac{1}{6} \times 20 = 1200(1 + \frac{1}{12}a\%),$$

解得 $a=10$.

故 a 的值为 10.

方法或规律点拨

本题考查了一元二次方程的应用, 分式方程的应用, 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系, 列出方程, 再求解.

巩固练习

1. (2020·山西九年级专题练习) 每年的 3 月 15 日是“国际消费者权益日”, 许多家居商城都会利用这个契机进行打折促销活动. 甲卖家的 A 商品成本为 600 元, 在标价 1000 元的基础上打 8 折销售.

(1) 现在甲卖家欲继续降价吸引买主, 问最多降价多少元, 才能使利润率不低于 20%?

(2) 据媒体爆料, 有一些卖家先提高商品价格后再降价促销, 存在欺诈行为. 乙卖家也销售 A 商品, 其成本、标价与甲卖家一致, 以前每周可售出 50 件, 现乙卖家先将标价提高 $2m\%$, 再大幅降价 $24m$ 元, 使得 A 商品在 3 月 15 日那一天卖出的数量就比原来一周卖出的数量增加了 $\frac{5}{2}m\%$, 这样一天的利润达到了 20000 元,

求 m 的值.

【答案】(1) 最多降价 80 元, 才能使利润率不低于 20%; (2) 60.

【详解】

(1) 设降价 x 元,

依题意，得： $(1000 \times 0.8 - x) \geq 600 \times (1 + 20\%)$ ，

解得： $x \leq 80$ 。

答：最多降价 80 元，才能使利润率不低于 20%。

(2) 设 $m\% = a$ ，依题意，得： $[1000(1+2a) - 2400a - 600] \cdot 50(1 + \frac{5}{2}a) = 20000$ ，

整理，得： $5a^2 - 3a = 0$ ，

解得： $a_1 = 0$ (舍去)， $a_2 = \frac{3}{5}$ ，

$\therefore m\% = \frac{3}{5}$ ，

$\therefore m = 60$ 。

答： m 的值为 60。

2. (2020·重庆八中九年级一模) 农历五月初五是中国民间传统节日一端午节，又称端阳节，也是纪念诗人屈原的节日。划龙舟与食粽是端午节的两大礼俗，这两大礼俗在中国自古传承，至今不辍，某蛋糕店一直销售的是白水粽，端午节临近又推出了红豆粽，其中红豆粽的销售单价是白水粽的 1.25 倍，4 月份，红豆粽和白水粽共销售 150 千克，红豆粽的销售额是 1200 元，白水粽的销售额为 1440 元。

(1) 求红豆粽、白水粽的销售单价各是多少？

(2) 为迎接端午节到来，该蛋糕店在 5 月推出“粽享会员”活动，对所有的粽子均可享受 $a\%$ 的折扣，非“粽享会员”需要按照原价购买，就红豆粽而言，5 月销量比 4 月销量增加了 $a\%$ ，其中通过“粽享会员”购买的销量占 5 月红豆粽销量的 $\frac{5}{6}$ ，而 5 月红豆粽的销售总额比 4 月红豆粽销售额提高了 $\frac{1}{12}a\%$ ，求 a 的值。

【答案】(1) 红豆粽的销售单价是 20 元/千克，白水粽的销售单价是 16 元/千克；(2) a 的值为 10。

【详解】

(1) 设白水粽的销售单价是 x 元/千克，则红豆粽的销售单价是 $1.25x$ 元/千克，

由题意得： $\frac{1200}{1.25x} + \frac{1440}{x} = 150$ ，

解得 $x = 16$ ，

经检验， $x = 16$ 是所列方程的解，

则 $1.25x = 1.25 \times 16 = 20$ ，

答：红豆粽的销售单价是 20 元/千克，白水粽的销售单价是 16 元/千克；

(2) 由 (1) 可得：4 月红豆粽的销量为 $1200 \div 20 = 60$ (千克)，

则 5 月通过“粽享会员”购买红豆粽的销量为 $\frac{5}{6} \times 60(1 + a\%) = 50(1 + a\%)$ 千克，通过非“粽享会员”购买

红豆粽的销量为 $\frac{1}{6} \times 60(1 + a\%) = 10(1 + a\%)$ 千克，

由题意得： $50(1+a\%)\cdot 20(1-a\%)+20\times 10(1+a\%)=1200(1+\frac{1}{12}a\%)$ ，

整理得： $a^2-10a=0$ ，

解得 $a=10$ 或 $a=0$ （不符合题意，舍去），

答： a 的值为 10.

3.（2020·重庆初三其他）新型冠状病毒肺炎是一种急性感染性肺炎，其病原体是一种先前未在人体中发现的新型冠状病毒。市民出于防疫的需求，持续抢购防护用品。某药店口罩每袋售价 20 元，医用酒精每瓶售价 15 元。

（1）该药店第一周口罩的销售袋数比医用酒精的销售瓶数多 100，且第一周这两种防护用品的总销售额为 9000 元，求该药店第一周销售口罩多少袋？

（2）由于疫情紧张，该药店为了帮助大家共渡难关，第二周口罩售价降低了 $\frac{1}{2}a\%$ ，销量比第一周增加了 $2a\%$ ，医用酒精的售价保持不变，销量比第一周增加了 $a\%$ ，结果口罩和医用酒精第二周的总销售额比第一周增加了 $\frac{6}{5}a\%$ ，求 a 的值。

【答案】（1）第一周销售口罩 300 袋；（2） a 的值为 20.

【解析】（1）设第一周销售口罩 x 袋，则销售医用酒精 $(x-100)$ 瓶，

依题意，得 $20x+15(x-100)=9000$ ，

解得 $x=300$ 。

答：第一周销售口罩 300 袋，

故答案为：300；

（2）依题意得，

$$20(1-\frac{1}{2}a\%)\times 300(1+2a\%)+15\times (300-100)(1+a\%)=9000(1+\frac{6}{5}a\%)，$$

整理得 $0.6a^2-12a=0$ ，

解得 $a_1=20$ ， $a_2=0$ （舍去）。

答： a 的值为 20，

故答案为：20.

4.（2020·重庆一中初三一模）4月24日《复仇者联盟4》在中国大陆上映。我市江北 UME 影城为加大宣传，决定在 4 月 23 日预售普通 3D 票 400 张和 IMAX 票 100 张，且预售中的 IMAX 的票价是普通 3D 票价的 2 倍。

（1）若影城的预售总额不低于 21000 元，则普通 3D 票的预售价格最少为多少元？

（2）影城计划在上映当天推出普通 3D 票 3200 张，IMAX 票 800 张。由于预售的火爆，影城决定将普通 3D

票的价格在(1)中最低价格的基础上增加 $\frac{15}{7}a\%$, 而IMAX票价在(1)中IMAX票价上增加了 a 元, 结果普通3D票的销售量比计划少 $2a\%$. IMAX票的销售量与计划保持一致, 最终实际销售额与计划销售额相等, 求 a 的值.

【答案】(1) 普通3D票的预售价格最少为35元/张; (2) a 的值为20.

【解析】

(1) 设普通3D票的预售价格为 x 元/张, 则IMAX票的预售价格为 $2x$ 元/张, 依题意, 得: $400x+100\times 2x\geq 21000$,

解得: $x\geq 35$.

答: 普通3D票的预售价格最少为35元/张.

(2) 依题意, 得: $35(1+\frac{15}{7}a\%)\times 3200(1-2a\%)+(35\times 2+a)\times 800=35\times 3200+35\times 2\times 800$,

整理, 得: $a^2-20a=0$,

解得: $a_1=0$ (舍去), $a_2=20$.

答: a 的值为20.

5. (2020·重庆巴蜀中学初二月考) 智能手环是一种穿戴式智能设备, 通过智能手环, 用户可以记录日常生活中的锻炼, 睡眠、部分还有饮食等实时数据, 并将这些数据与手机、平板同步, 起到通过数据指导健康生活的作用, 某公司2020年3月新推出A型和B型两款手环. A型手环每只售价是B型手环售价的1.5倍. 3月份A、B手环总计销售650只, A型手环销售额为108000元, B型手环销售额为84000元.

(1) 求A、B型手环的售价各是多少?

(2) 由于更多的公司研发手环投入市场, 市场竞争的加剧, 公司决定4月份对两种手环进行降价促销, 对A型手环直降 $2a$ 元, 销量比原来提高了 $a\%$, 对B型手环在原价基础上降价 $\frac{a}{4}\%$ 销售, 销量比原来提高了20%, 4月份总计销售额为208320元, 求 a 的值.

【答案】(1) A型手环售价为360元, B型手环售价为240元. (2) 40.

【解析】

解: (1) 设B型手环售价为 x 元, 表示出A型手环售价为 $1.5x$ 元, 由题意得:

$$\frac{108000}{1.5x} + \frac{84000}{x} = 650$$

解得 $x=240$

经检验, $x=240$ 符合实际意义,

A型手环售价为 $1.5x=360$ (元).

故A型手环售价为360元, B型手环售价为240元.

(2) 由(1)得, B型手环促销前的销售量为 $84000\div 240=350$ 台, 则A型手环促销前的销量为 $650-350=300$ 台,

由题意得： $300(360 - 2a)(1 + a\%) + 240 \times 350(1 - \frac{a}{4}\%)(1 + 20\%) = 208320$

化简得： $80 + 38a - a^2 = 0$

解得 $a = 40$ 或 $a = -2$ (舍)

故 a 的值为 40.

6. (2020 · 重庆一中初三月考) 受非洲猪瘟的影响, 2019 年的猪肉价格创历史新高, 同时其他肉类的价格也有一定程度的上涨, 某超市 11 月份的猪肉销量是羊肉销量的 3 倍, 且猪肉价格为每千克 70 元羊肉价格为每千克 110 元.

(1) 若该超市 11 月份猪肉、羊肉的总销售额不低于 27.2 万元, 则 11 月份的猪肉销量至少多少千克?

(2) 12 月份香肠腊肉等传统美食的制作, 使得市场的猪肉需求加大, 12 月份猪肉的销量比 11 月份增长了 $20a\%$, 由于国家对猪肉价格的调控, 12 月份的猪肉价格比 11 月份降低了 $a\%$, 羊肉的销量是 11 月份猪肉销量的 $\frac{1}{3}$, 且价格不变. 最终, 该超市 12 月份猪肉和羊肉的销售额比 11 月份这两种肉的销售额增加了

$\frac{21}{2}a\%$, 求 a 的值.

【答案】(1) 11 月份猪肉销量至少为 2550 千克; (2) a 的值为 15

【解析】

解: (1) 设 11 月份猪肉销量为 x 千克,

则: $70x + 110 \times \frac{1}{3}x \geq 272000$,

解得: $x \geq 2550$,

答: 11 月份猪肉销量至少为 2550 千克;

(2) 设 11 月份羊肉销量为 m 千克, 猪肉销量为 $3m$ 千克, 则:

$$3m \cdot (1 + 20a\%) \cdot 70 \cdot (1 - a\%) + 110m = (70 \times 3m + 110 \cdot m)(1 + \frac{21}{2}a\%),$$

令 $a\% = t$,

$$3m \cdot (1 + 20t) \cdot 70 \cdot (1 - t) + 110m = (70 \times 3m + 110 \cdot m)(1 + \frac{21}{2}t),$$

整理得: $20t^2 - 3t = 0$,

解得: $t = 0$ 或 $t = \frac{3}{20}$,

$\therefore a = 0$ (舍) 或 $a = 15$,

答: a 的值为 15.

7. (2019 · 重庆初三一模) 鲜丰水果店计划用 12 元/盒的进价购进一款水果礼盒以备销售.

(1) 据调查, 当该种水果礼盒的售价为14元/盒时, 月销量为980盒, 每盒售价每增长1元, 月销量就相应减少30盒, 若使水果礼盒的月销量不低于800盒, 每盒售价应不高于多少元?

(2) 在实际销售时, 由于天气和运输的原因, 每盒水果礼盒的进价提高了25%, 而每盒水果礼盒的售价比(1)中最高售价减少了 $\frac{1}{5}m\%$, 月销量比(1)中最低月销量800盒增加了 $m\%$, 结果该月水果店销售该水果礼盒的利润达到了4000元, 求 m 的值.

【答案】(1) 若使水果礼盒的月销量不低于800盒, 每盒售价应不高于20元; (2) m 的值为25.

【解析】

解: (1) 设每盒售价 x 元.

依题意得: $980 - 30(x - 14) \geq 800$

解得: $x \leq 20$

答: 若使水果礼盒的月销量不低于800盒, 每盒售价应不高于20元

(2) 依题意: $\left[20 \left(1 - \frac{1}{5}m\% \right) - 12 \times (1 + 25\%) \right] \times 800(1 + m\%) = 4000$

令: $m\% = t$

化简: $4t^2 - t = 0$

解得: $t_1 = 0$ (舍去), $t_2 = \frac{1}{4}$

$\therefore m = 25$

答: m 的值为25.

8. (2020·浙江省初二月考) 每年九月是开学季, 大多数学生会购买若干笔记本满足日常学习需要, 校外某文具店老板开学前某日去批发市场进货, 购进甲乙丙三种不同款式的笔记本, 已知甲款笔记本的进价为2元/本, 乙款笔记本的进价为4元/本, 丙款笔记本的进价为6元/本, 经过调研发现, 甲款笔记本、乙款笔记本和丙款笔记本的零售价分别定为4元/本、6元/本和10元/本时, 每天可分别售出甲款笔记本30本、

乙款笔记本50本和丙款笔记本20本, 如果将乙款笔记本的零售价提高 $\frac{a}{25}$ 元 ($a > 25$), 甲款笔记本和丙

款笔记本的零售价均保持不变, 那么乙款笔记本每天的销售量将下降 $a\%$, 丙款笔记本每天的销售量将上升

$\frac{1}{2}a\%$, 甲款笔记本每天的销量仍保持不变.

(1) 若 $a = 30$, 调价后每天销售三款笔记本共可获利多少元?

(2) 若调价后每天销售三款笔记本共可获利260元, 求 a 的值.

【答案】(1) 264元; (2) a 的值为50.

$$(1) (4-2) \times 30 + (6 + \frac{30}{25} - 4) \times 50 \times (1-30\%) + (10-6) \times 20 \times (1+15\%) = 264 \text{ (元)},$$

$$(2) \text{根据题意, 得 } (4-2) \times 30 + (6 + \frac{a}{25} - 4) \times 50(1-a\%) + (10-6)[20(1 + \frac{1}{2}a\%)] = 260,$$

$$\text{整理得 } a^2 - 70a + 1000 = 0,$$

$$\text{解得, } a_1 = 50, a_2 = 20 \text{ (不合题意, 舍去)},$$

答: a 的值为 50.

9. (2020·重庆南开中学初二月考) 某体育用品制造公司通过互联网销售某品牌排球, 第一周的总销售额为 3000 元, 第二周的总销售额为 3520 元, 第二周比第一周多售出 13 个排球.

(1) 求每个排球的售价;

(2) 该公司在第三周将每个排球的售价降低了 $\frac{1}{2}a\%$ (其中 $a \leq 50$), 并预计第三周能售出 120 个排球. 恰逢中国女排夺冠, 极大地激发了广大青少年积极参与排球运动的热情, 该款排球在第三周的销量比预计的 120 个还多了 $4a\%$. 已知每个排球的成本为 16 元, 该公司第三周销售排球的总利润为 4320 元, 求 a 的值.

【答案】(1) 40; (2) $a=20$

【解析】

解: (1) 设每个排球的售价为 x , 根据题意:

$$3000 + 13x = 3520,$$

$$\text{解得: } x = 40.$$

答: 每个排球的售价为 40 元.

$$(2) \text{根据题意: } \left[40 \left(1 - \frac{1}{2}a\% \right) - 16 \right] \times 120(1 + 4\%a) = 4320,$$

$$\text{整理得: } a^2 - 95a + 1500 = 0,$$

$$\text{解得: } a_1 = 20, a_2 = 75 \text{ (不符合题意舍去)}.$$

故 a 的值为 20.

10. 某地大力发展经济作物, 其中果树种植已初具规模, 今年受气候、雨水等因素的影响, 樱桃较去年有小幅度的减产, 而枇杷有所增产.

(1) 该地某果农今年收获樱桃和枇杷共 400 千克, 其中枇杷的产量不超过樱桃产量的 7 倍, 求该果农今年收获樱桃至少多少千克?

(2) 该果农把今年收获的樱桃、枇杷两种水果的一部分运往市场销售, 该果农去年樱桃的市场销售量为 100 千克, 销售均价为 30 元/千克, 今年樱桃的市场销售量比去年减少了 $m\%$, 销售均价与去年相同; 该果农去年枇杷的市场销售量为 200 千克, 销售均价为 20 元/千克, 今年枇杷的市场销售量比去年增加了 $2m\%$, 但销售均价比去年减少了 $m\%$, 该果农今年运往市场销售的这部分樱桃和枇杷的销售总金额与他去年樱桃和枇杷

的市场销售总金额相同，求 m 的值.

【答案】 (1) 50 千克 (2) 12.5

【详解】

(1) 设该果农今年收获樱桃 x 千克，

根据题意得： $400 - x \leq 7x$ ，

解得： $x \geq 50$ ，

答：该果农今年收获樱桃至少 50 千克；

(2) 由题意可得：

$$100(1 - m\%) \times 30 + 200 \times (1 + 2m\%) \times 20(1 - m\%) = 100 \times 30 + 200 \times 20,$$

令 $m\% = y$ ，原方程可化为： $3000(1 - y) + 4000(1 + 2y)(1 - y) = 7000$ ，

整理可得： $8y^2 - y = 0$

解得： $y_1 = 0, y_2 = 0.125$

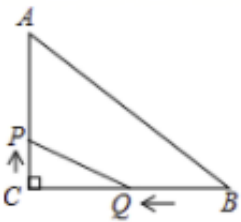
$\therefore m_1 = 0$ (舍去)， $m_2 = 12.5$

$\therefore m_2 = 12.5$ ，

答： m 的值为 12.5.

考点 4：一元二次方程与动态几何问题

典例：(2020·河北承德市·九年级二模) 如图， $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ 。点 P 从点 C 出发沿折线 $CA - AB$ 以每秒 1 个单位长的速度向点 B 匀速运动，点 Q 从点 B 出发沿 $BC - CA - AB$ 以每秒 2 个单位长的速度向点 B 匀速运动，点 P ， Q 同时出发，当其中一点到达点 B 时停止运动，另一点也随之停止。设点 P ， Q 运动的时间是 t 秒 ($t > 0$)。



发现：

(1) $AB =$ _____；

(2) 当点 P ， Q 相遇时，相遇点在哪儿条边上？并求出此时 AP 的长。

探究：

(1) 当 $t = 1$ 时， $\triangle PQC$ 的面积为 _____；

(2) 点 P ， Q 分别在 AC ， BC 上时， $\triangle PQC$ 的面积能否是 $\triangle ABC$ 面积的一半？若能，求出 t 的值；若不能，请说明理由。

拓展：当 $PQ \parallel BC$ 时，直接写出此时 t 的值。

【答案】 发现 (1) 5；(2) 相遇点在 AB 边上， $AP = 1$ ；探究：(1) 1；(2) 不能，理由见解析；拓展：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/298025124114006072>