



【正确答案】C

【分析】将直线  $2x - y - 3 = 0$  化为  $4x - 2y - 6 = 0$ ，再根据两平行直线的距离公式列出方程，求解即可。

【详解】将直线  $2x - y - 3 = 0$  化为  $4x - 2y - 6 = 0$ ，

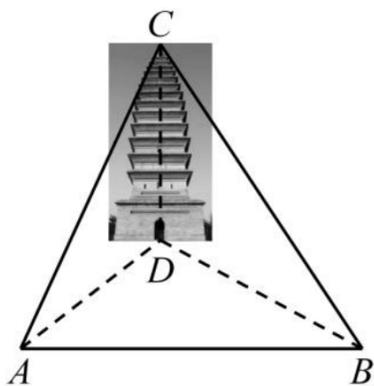
则直线  $2x - y - 3 = 0$  与直线  $4x - 2y - a = 0$  之间的距离  $d = \frac{|a - (-6)|}{\sqrt{16 - 4}} = \frac{|a + 6|}{2\sqrt{5}}$ ，

根据题意可得： $\frac{|a + 6|}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ ，即  $|a + 6| = 10$ ，解得  $a = 4$  或  $a = -16$ ，

所以  $a$  的值为  $a = 4$  或  $a = -16$ 。

故选：C

4. 如图，有一古塔，在 A 点测得塔底位于北偏东  $30^\circ$  方向上的点 D 处，在 A 点测得塔顶 C 的仰角为  $30^\circ$ ，在 A 的正东方向且距 D 点 30m 的 B 点测得塔底位于西偏北  $45^\circ$  方向上（A，B，D 在同一水平面），则塔的高度 CD 约为  $\sqrt{2} + 1.414\sqrt{3} + 1.732$  ( )



A. 17.32m

B. 14.14m

C. 10.98m

D. 6.21m

【正确答案】B

【分析】在  $\triangle ABD$  中，根据正弦定理可求出  $AD = 10\sqrt{6}$ 。在  $\text{Rt}\triangle ADC$  中，求解即可得出答案。

【详解】由已知可得，在  $\triangle ABD$  中，有  $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\angle ABD = 45^\circ$ ， $BD = 30$ ，

根据正弦定理  $\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$  可得，

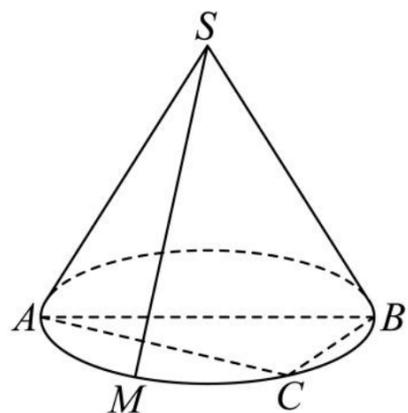
$$AD = \frac{BD}{\sin \angle BAD} \sin \angle ABD = \frac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{6}.$$

在 Rt  $\triangle ADC$  中, 有  $\angle CAD = 30^\circ$ ,  $AD = 10\sqrt{6}$ ,

$$\tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}, \text{ 所以 } CD = AD \tan 30^\circ = 10\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{2} \approx 14.14(\text{m}).$$

故选: B.

5. 如图, 已知圆锥的顶点为  $S$ ,  $AB$  为底面圆的直径, 点  $M, C$  为底面圆周上的点, 并将弧  $AB$  三等分, 过  $AC$  作平面  $\alpha$ , 使  $SB \parallel \alpha$ , 设  $\alpha$  与  $SM$  交于点  $N$ , 则  $\frac{SN}{SM}$  的值为 ( )



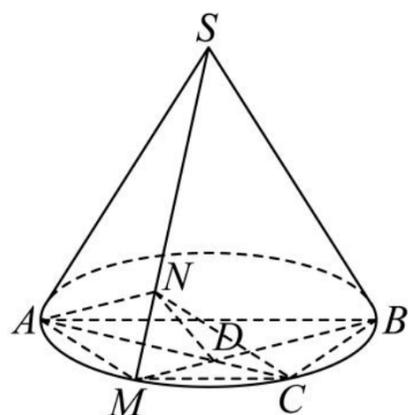
- A.  $\frac{4}{3}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{4}$

【正确答案】 C

【分析】 连接  $MB$  交  $AC$  于点  $D$ , 连接  $ND, NA, NC$ , 根据线面平行得性质证明  $SB \parallel DN$ ,

再根据  $MC \parallel AB$  可得  $\frac{DM}{DB} = \frac{MC}{AB}$ , 进而可得出答案.

【详解】 连接  $MB$  交  $AC$  于点  $D$ , 连接  $ND, NA, NC$ , 则平面  $NAC$  即为平面  $\alpha$ ,



因为  $SB \parallel \alpha$ , 平面  $SMB \cap \alpha = DN$ ,  $SB \subset$  平面  $SMB$ , 所以  $SB \parallel DN$ ,

因为 AB 为底面圆的直径，点 M，C 将弧 AB 三等分，

所以  $\angle ABM = \angle BMC = \angle MBC = \angle BAC = 30^\circ$ ， $MC = BC = \frac{1}{2}AB$ ，

所以  $MC \parallel AB$  且  $MC = \frac{1}{2}AB$ ，所以  $\frac{DM}{DB} = \frac{MC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，

又  $SB \parallel DN$ ，所以  $\frac{MN}{SN} = \frac{DM}{DB} = \frac{1}{2}$ ，所以  $\frac{SN}{SM} = \frac{2}{3}$ 。

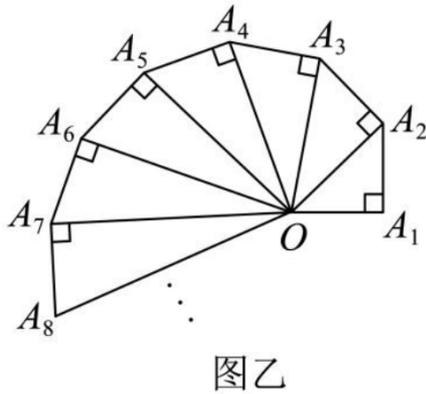
故选：C

6. 如图甲是第七届国际数学家大会（简称 ICME-7）的会徽图案，会徽的主题图案是由图乙的一连串直角三角形演化而成的。已知

$OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_8$  为直角顶

点，设这些直角三角形的周长从小到大组成的数列为  $a_n$ ，令  $b_n = \frac{2}{a_n}$ ， $S_n$  为数列  $b_n$  的

前  $n$  项和，则  $S_{120} =$  ( )



A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

【正确答案】C

【分析】由题意可得  $OA_n$  的边长，进而可得周长  $a_n$  及  $b_n$ ，进而可得  $S_n$ ，可得解。

【详解】由  $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_8$  为直角顶

点，可得  $OA_2 = 2\sqrt{2}$ ， $OA_3 = 2\sqrt{3}$ ， $\dots$ ， $OA_n = 2\sqrt{n}$ ，

所以  $a_n = OA_n + OA_{n-1} + A_{n-1}A_n = 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} + 2$ ，

所以  $b_n = \frac{2}{a} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$ ,

所以前  $n$  项和  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \sqrt{2-1} - \sqrt{3-2} - \dots - \sqrt{n-1} - \sqrt{n} = \sqrt{2} - \sqrt{n}$ ,

所以  $S_{120} = \sqrt{2} - \sqrt{120} = 1 - 10$ ,

故选: C.

7. 已知函数  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x + \frac{1}{2}$  分别与直线  $y = a$  交于点 A, B, 则  $|AB|$  的最小值为 ( )

A.  $1 - \frac{1}{2} \ln 2$

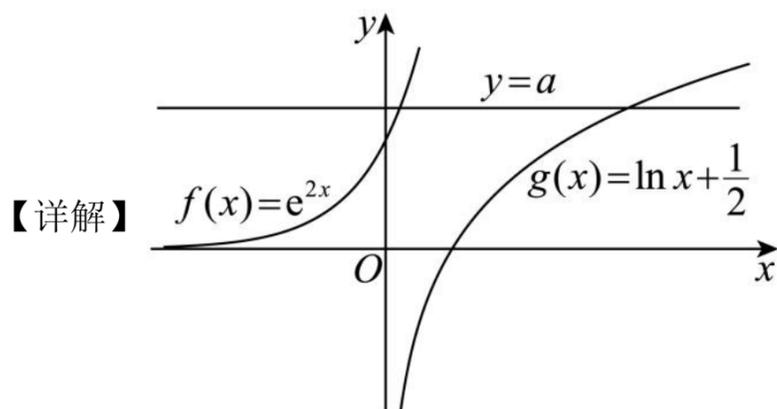
B.  $1 + \frac{1}{2} \ln 2$

C.  $2 - \frac{1}{2} \ln 2$

D.  $2 + \frac{1}{2} \ln 2$

【正确答案】 B

【分析】依题意, 表示出 A, B 两点坐标和  $|AB|$ , 构造函数, 利用导数研究单调区间和最值.



由题意,  $A(\frac{1}{2} \ln a, a)$ ,  $B(e^{a-\frac{1}{2}}, a)$ , 其中  $e^{a-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$ , 且  $a > 0$ ,

所以  $|AB| = e^{a-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln a$ , 令  $h(x) = e^{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln x$ , ( $x > 0$ ),

则  $h'(x) = e^{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2x} = 0$  时, 解得  $x = \frac{1}{2}$ ,

所以  $0 < x < \frac{1}{2}$  时,  $h'(x) < 0$ ;  $x > \frac{1}{2}$  时,  $h'(x) > 0$ ;

则  $h(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调递增,

所以当  $x = \frac{1}{2}$  时,  $|AB|_{\min} = \frac{2 - \ln 2}{2} = 1 - \frac{\ln 2}{2}$ ,

故选: B.

8. 已知点  $F$  为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点,  $A, B$  两点在双曲线上, 且关于原点对称,  $M, N$  分别为  $AF, BF$  的中点, 当  $OM \perp ON$  时, 直线  $AB$  的斜率为  $\sqrt{3}$ , 则双曲线的离心率为 ( )

- A. 4                                      B.  $\sqrt{5}$                                       C.  $\sqrt{3} + 1$                                       D. 2

【正确答案】 C

【分析】记双曲线的左焦点为  $F'$ , 由此可得四边形  $AFBF'$  为平行四边形, 由条件证明四边形  $OMFN$  为矩形, 由此可得四边形  $AFBF'$  为矩形, 再求  $BF', BF$ , 结合双曲线定义求离心率.

【详解】记双曲线的左焦点为  $F'$ ,

因为  $|OA| = |OB|, |OF| = |OF'|$ ,

所以四边形  $AFBF'$  为平行四边形,

因为  $M, N$  分别为  $AF, BF$  的中点, 点  $O$  为线段  $AB$  的中点,

所以  $OM \parallel NF, ON \parallel MF$ , 又  $OM \perp ON$ ,

所以四边形  $OMFN$  为矩形, 故  $\angle AFB = \frac{\pi}{2}$ ,

所以四边形  $AFBF'$  为矩形, 故  $\triangle BFF'$  为直角三角形, 斜边为  $FF'$ ,

所以  $|OB| = |OF| = c$ ,

因为直线  $AB$  的斜率为  $\sqrt{3}$ ,

所以  $\angle BOF = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $|BF| = c, |BF'| = \sqrt{3}c$ ,

由双曲线定义可得  $\sqrt{3}c - c = 2a$ ,

所以曲线的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$ .

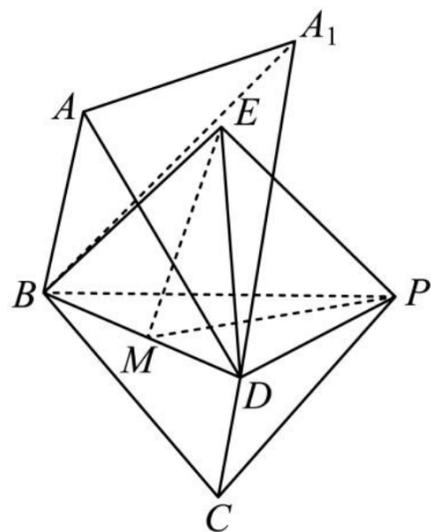
故选: C.



将正三棱锥  $E-PBD$  绕  $BD$  旋转，使得点  $E, P$  分别旋转至点  $A, A_1$  处，

所以  $PA \perp$  平面  $EMP$ ，所以  $BD \perp PA$ ，故 A 正确；

因为  $PA_1 \perp$  平面  $EMP$ ，所以  $BD \perp PA_1$ ，故 B 不正确；



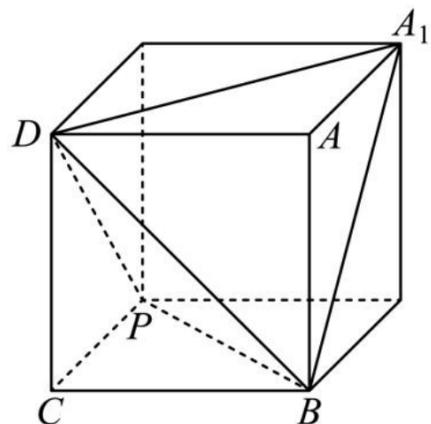
因为  $A, B, C, D$  四点共面， $AD \perp AA_1, AB \perp AA_1, AD \perp AB$ ，

可得： $AA_1^2 = AB^2 + BA_1^2, AA_1^2 = AD^2 + DA_1^2$ ，

所以  $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AD, AB \perp AD$ ， $AB, AD \perp$  平面  $ABCD$ ，

所以  $AA_1 \perp$  平面  $ABCD$ ，同理  $PC \perp$  平面  $ABCD$ ，由已知  $ABCD$  为正方形，

所以可将多面体  $PA_1ABCD$  放入边长为  $\sqrt{2}$  的正方体，



则多面体  $PA_1ABCD$  的外接球即棱长为  $\sqrt{2}$  的正方体的外接球，外接球的半径为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

表面积为  $6\pi$ ，选项 C 不正确；

由题意  $E$  转动的半径长为  $EM = 1$ ， $P$  转动的半径长为  $PM = \sqrt{3}$ ，

所以点  $P$  与点  $E$  旋转运动的轨迹长之比为  $\sqrt{3}$ ，故 D 正确。

故选：AD.

10. 在流行病学中，基本传染数  $R_0$  是指在没有外力介入，同时所有人都没有免疫力的情况下，一个感染者平均传染的人数. 初始感染者传染  $R_0$  个人为第一轮传染，第一轮被传染的  $R_0$  个人每人再传染  $R_0$  个人为第二轮传染，... . 假设某种传染病的基本传染数  $R_0 = 4$ ，平均感染周期为 7 天，初始感染者为 1 人，则 ( )

- A. 第三轮被传染人数为 16 人  
 B. 前三轮被传染人数累计为 80 人  
 C. 每一轮被传染的人数组成一个等比数列  
 D. 被传染人数累计达到 1000 人大约需要 35 天

【正确答案】 CD

【分析】 根据已知条件，可转化为等比数列问题，结合等比数列前  $n$  项和公式，即可求解.

【详解】 由题意，设第  $n$  轮感染的人数为  $a_n$ ，则数列  $\{a_n\}$  是首项  $a_1 = 4$ ，公比  $q = 4$  的等比数列，故 C 正确；

所以  $a_n = 4^n$ ，当  $n = 3$  时， $a_3 = 4^3 = 64$ ，故 A 错误；

前三轮被传染人数累计为  $1 + S_3 = 1 + \frac{4(1-4^3)}{1-4} = 85$ ，故 B 错误；

当  $n = 4$  时， $1 + S_4 = \frac{4(1-4^4)}{1-4} = 1 + 341 = 342$ ，当  $n = \frac{35}{7} = 5$  时，由

$1 + S_5 = \frac{4(1-4^5)}{1-4} = 1 + 1365 = 1366 > 1000$ ，故 D 正确.

故选：CD

11. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  的图象连续不间断，若存在非零常数  $t$ ，使得

$f(x+t) = t + 1 - f(x) > 0$  对任意的实数  $x$  恒成立，则称函数  $f(x)$  具有性质  $H_t$ ，则 ( )

A. 函数  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$  具有性质  $H_2$

B. 若函数  $f(x)$  具有性质  $H_2$ ，则  $f(x+4) = f(x)$

C. 若  $f(x) = \sin x > 0$  具有性质  $H_2$ ，则  $\frac{\pi}{2}$

D. 若函数  $f(x)$  具有性质  $H_{\frac{1}{2}}$ ，且  $f(0) = 1$ ，则  $f(k) = \frac{1}{4^k}$ ， $k \in \mathbb{N}^*$

【正确答案】 ABD

【分析】根据性质  $H_2$  的定义直接验证即可判断 A；利用性质  $H_2$  迭代即可判断 B；

取  $\frac{3\pi}{2}$  验证性质  $H_2$  即可判断 C；根据性质  $H_{\frac{1}{2}}$  迭代可得  $f(x) = 2^{2k} f(x/k)$ ，

再结合  $f(0) = 1$  即可判断 D.

【详解】因为  $f(x) = 2^{-2} [1 + f(x)] = \sin^2 \frac{\pi}{2} x - \pi \sin^2 \frac{\pi}{2} x = \sin^2 \frac{\pi}{2} x - \sin^2 \frac{\pi}{2} x = 0$ ，

故 A 正确；

若函数  $f(x)$  具有性质  $H_2$ ，则  $f(x) = 2^{-2} [1 + f(x)] = 0$ ，即  $f(x) = f(x) + 2^{-2}$

所以  $f(x) = f(x) + 2^{-2} = f(x) + 4^{-2} = f(x) + 4^{-2}$ ，故 B 正确；

若  $f(x) = \sin^2 x = 0$ ，取  $\frac{3\pi}{2}$ ，

易知  $f(x) = 2^{-2} [1 + f(x)] = \sin^2 \frac{3\pi}{2} x - 3 \sin^2 \frac{3\pi}{2} x = \sin^2 \frac{3\pi}{2} x - \sin^2 \frac{3\pi}{2} x = 0$  恒成

立，所以 C 错误；

若函数  $f(x)$  具有性质  $H_{\frac{1}{2}}$ ，则  $f(x) = \frac{1}{2} [1 + f(x)] = 0$ ，即  $f(x) = 2f(x) + \frac{1}{2}$

所以  $f(x) = 2f(x) + \frac{1}{2} = 2^2 f(x) + \frac{2}{2} = 2^3 f(x) + \frac{3}{2} = \dots = 2^{2k} f(x/k) + \frac{2k-1}{2}$

所以  $f(x/k) = \frac{1}{4^k} f(x)$

又  $f(0) = 1$ ，所以  $f(k) = \frac{1}{4^k} f(0) = \frac{1}{4^k}$ ，D 正确.

故选：ABD

12. 点 P 是直线  $y = 3$  上的一个动点，A，B 是圆  $x^2 + y^2 = 4$  上的两点. 则 ( )

A. 存在 P，A，B，使得  $\angle APB = 90^\circ$

B. 若 PA，PB 均与圆 O 相切，则弦长 AB 的最小值为  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

C. 若 PA，PB 均与圆 O 相切，则直线 AB 经过一个定点

D. 若存在 A, B, 使得  $\cos \angle APB = \frac{7}{9}$ , 则 P 点的横坐标的取值范围是  $[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

【正确答案】BCD

【分析】根据几何知识得到当直线 PA, PB 与圆相切且  $|PO|$  最小时  $\angle APB$  最大, 然后求

$\angle APB$  的最大值即可判断 A 选项; 利用等面积的思路得到  $|AB| = 4 \sqrt{1 - \frac{4}{|PO|^2}}$ , 然后求

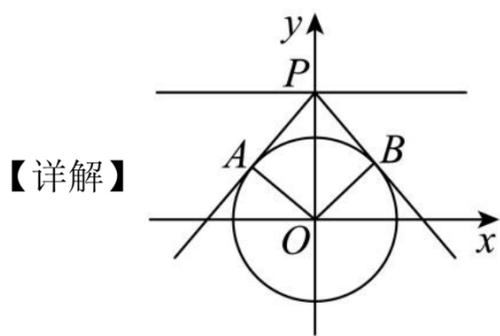
$|PO|$  的最小值即可得到弦长 AB 的最小值, 即可判断 B 选项; 根据圆的定义得到 A, B 是

以 PO 为直径的圆上的两点又是圆  $x^2 + y^2 = 4$  上的两点, 然后让两圆的方程相减得到直线

AB 的方程即可得到直线 AB 过定点, 即可判断 C 选项; 根据存在 A, B, 使得

$\cos \angle APB = \frac{7}{9}$  得到  $\cos \angle APB_{\min} = \frac{7}{9}$ , 然后求  $\cos \angle APB = \frac{7}{9}$  时点 P 的横坐标, 即可得到

点 P 的横坐标的取值范围, 即可判断 D 选项.



由图可知, 当直线 PA, PB 与圆相切且点 P 在 y 轴上时  $\angle APB$  最大,

此时  $|OP| = 3$ ,  $|AP| = 2$ ,  $\sin \angle APO = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \angle APB = 1 - 2\sin^2 \angle APO = \frac{1}{9} > 0$ ,

所以  $\angle APB$  最大时是锐角, 故 A 错;

$\frac{1}{2}|AB| \cdot |PO| = |OA| \cdot |PA|$ , 所以  $|AB| = \frac{4\sqrt{|PO|^2 - 4}}{|PO|} = 4\sqrt{1 - \frac{4}{|PO|^2}}$ ,

则当  $|PO|$  最小时, 弦长 AB 最小,  $|PO|_{\min} = 3$ , 所以  $|AB|_{\min} = 4\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ , 故 B 正确;

设点 P  $(a, 3)$ , A, B 是以 PO 为直径的圆上的两点, 圆的方程为

$$x^2 + y^2 - ax - 3y = 0 \quad ①,$$

即  $x^2 + y^2 - ax - 3y = 0$  ①, 又 A, B 是圆  $x^2 + y^2 = 4$  ②上的两点,

所以直线 AB 的方程为②-①:  $ax - 3y = 4$ , 过定点  $(0, \frac{4}{3})$ , 故 C 正确;

若存在 A, B, 使得  $\cos \angle APB = \frac{7}{9}$ , 则  $\cos \angle APB_{\min} = \frac{7}{9}$ ,

当直线 PA, PB 与圆相切时,  $\angle APB$  最大, 对应的余弦值最小,

当直线 PA, PB 与圆相切, 且  $\cos \angle APB = \frac{7}{9}$  时,  $\sin \angle APO = \frac{1}{3}$ ,  $|PO| = 6$ ,

因为  $|PO| = \sqrt{a^2 + 9}$ , 所以  $a = 3\sqrt{3}$ , 则  $a = 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ , 故 D 正确.

故选: BCD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在  $\triangle ABC$  中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c, 若  $c = 1, B = 45^\circ, \cos A = \frac{3}{5}$ , 则  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【正确答案】  $\frac{5}{7}$

【分析】根据同角的三角函数关系求得  $\sin A$ , 利用两角和的正弦公式求得  $\sin C$ , 再用正弦定理即可求得答案.

【详解】在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A = \frac{3}{5}$ , 则  $\sin A = \frac{4}{5}$ ,

故  $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos 45^\circ + \cos A \sin 45^\circ = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ,

故由正弦定理得  $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{5}{7}$ ,

故  $\frac{5}{7}$

14. 南海中学环保小组共有 6 名成员, 该环保小组计划前往佛山市 4 个不同的景区开展环保活动, 要求每个景区至少有 1 人, 且每个人只能去一个景区, 则不同的分配方案有  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【正确答案】 1560

【分析】将 6 名成员分 4 组, 考虑每组的人数情况有 1, 1, 1, 3 和 1, 1, 2, 2 两种分组方法, 再将 4 组成员分配到 4 个不同的景区开展环保活动, 根据分步乘法计数原理可得答案.

【详解】第一步：将6名成员分成4组，按照1, 1, 1, 3的方式来分，有  $\frac{C_1 C_1 C_1 C_3}{A_3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 20$

种分配方案；按照1, 1, 2, 2的方式来分，有  $\frac{C_1 C_1 C_2 C_2}{A_2 A_2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{2! \cdot 2!} = 45$  种分配方案；

第二步：将4组成员分配到4个不同的景区开展环保活动，共有  $A_4 = 24$  种分配方案，

故符合要求的分配方案有  $(20 + 45) \cdot 24 = 1560$  种。

故 1560.

15. 已知点D在线段AB上，CD是ABC的角平分线，E为CD上一点，且满足

$$\frac{BE}{BA} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}, |CA| = |CB| = 6, |BA| = 14, \text{ 设 } BA = a, \text{ 则 } BE \text{ 在 } a \text{ 上的}$$

投影向量为\_\_\_\_\_。(结果用a表示)。

【正确答案】  $\frac{2}{7}a + \frac{2a}{7}$

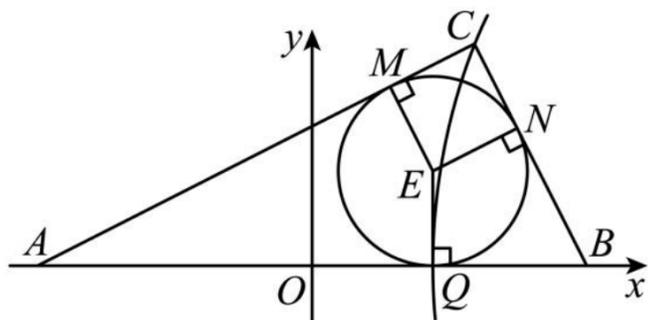
【分析】由  $|BA| = 14$  可设  $A(-7, 0), B(7, 0)$ ，结合双曲线的定义可得点C的轨迹，再根据内心的向量性质可得E为ABC的内心，进而根据双曲线焦点三角形内心的性质求解即可。

【详解】由  $|BA| = 14$ ，可设  $A(-7, 0), B(7, 0)$ ，由  $|CA| = |CB| = 6$ ，

得点C的轨迹是以A, B为焦点，实轴长为6的双曲线的右支（不含右顶点）。

因为CD是ABC的角平分线，且  $\frac{BE}{BA} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$  (0)，

故AE也为ABC的角平分线，E为ABC的内心。



如图，设  $E(x_0, y_0)$ ， $EM \perp AC$ ， $EQ \perp AB$ ， $EN \perp BC$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/298141012060007004>