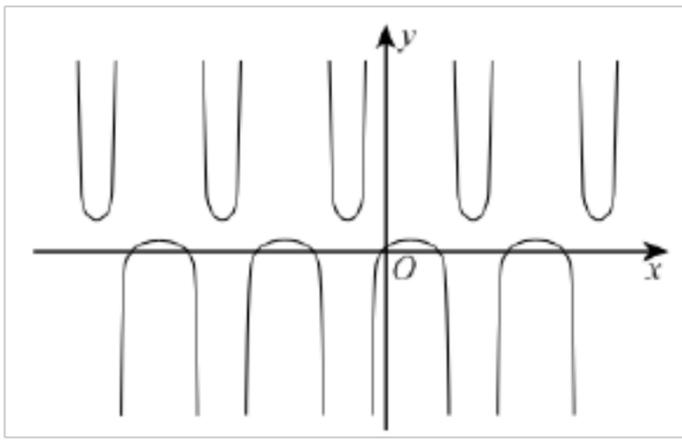


辽宁省名校联盟 2022-2023 学年高三上学期 9 月联考数学试题

一、单选题

1. 设集合 $A = \{x | x > a\}$, 集合 $B = \{0, 1\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $a \leq 1$ B. $a < 1$ C. $a < 0$ D. $a \leq 0$
2. 已知命题 $p: \exists x < -1, 2^x - x - 1 < 0$, 则 $\neg p$ 为 ()
- A. $\forall x \geq -1, 2^x - x - 1 \geq 0$ B. $\forall x < -1, 2^x - x - 1 \geq 0$
- C. $\exists x < -1, 2^x - x - 1 \geq 0$ D. $\exists x \geq -1, 2^x - x - 1 \geq 0$
3. “点 A 的坐标是 $(\frac{k\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ ”是“ $f(x) = \tan x$ 的图象关于点 A 对称”的 ()
- A. 充要条件 B. 充分不必要条件 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 若函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 定义域为 \mathbb{R} , 且都不恒为零, 则
- A. 若 $y = f(g(x))$ 为周期函数, 则 $y = g(x)$ 为周期函数
- B. 若 $y = f(g(x))$ 为偶函数, 则 $y = g(x)$ 为偶函数
- C. 若 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 均为单调递增函数, 则 $y = f(x) \cdot g(x)$ 为单调递增函数
- D. 若 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 均为奇函数, 则 $y = f(g(x))$ 为奇函数
5. 荀子《劝学》中说:“不积跬步, 无以至千里; 不积小流, 无以成江海.”所以说学习是日积月累的过程, 每天进步一点点, 前进不止一小点. 我们可以把 $(1+1\%)^{365}$ 看作是每天的“进步”率都是 1%, 一年后是 $1.01^{365} \approx 37.7834$; 而把 $(1-1\%)^{365}$ 看作是每天“退步”率都是 1%, 一年后是 $0.99^{365} \approx 0.0255$. 若“进步”的值是“退步”的值的 100 倍, 大约经过 (参考数据: $\lg 101 \approx 2.0043$, $\lg 99 \approx 1.9956$) () 天.
- A. 200 天 B. 210 天 C. 220 天 D. 230 天
6. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+2\sin x}$ 的部分图象如图所示, 将此图象分别作以下变换, 那么变换后的图象可以与原图象重合的变换方式有 ()



- ①绕着 x 轴上一点旋转 180° ;
 ②沿 x 轴正方向平移;
 ③以 x 轴为轴作轴对称;
 ④以 x 轴的某一条垂线为轴作轴对称.

- A. ①③ B. ③④ C. ②③ D. ②④

7. 已知函数 $f(x) = \lg\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \frac{2}{2^x + 1}$, 则不等式 $f(2x+1) + f(x) > -2$ 的解集为 ()

- A. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{1}{3}, 100\right)$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{2}{3}, 100\right)$

8. 已知 $a = e^{0.2} - 1, b = \ln 1.2, c = \tan 0.2$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数, 则 ()

- A. $c > a > b$ B. $a > c > b$
 C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

二、多选题

9. 已知实数 a, b, c 满足 $0 < a < b < c$, 则下列说法正确的是 ()

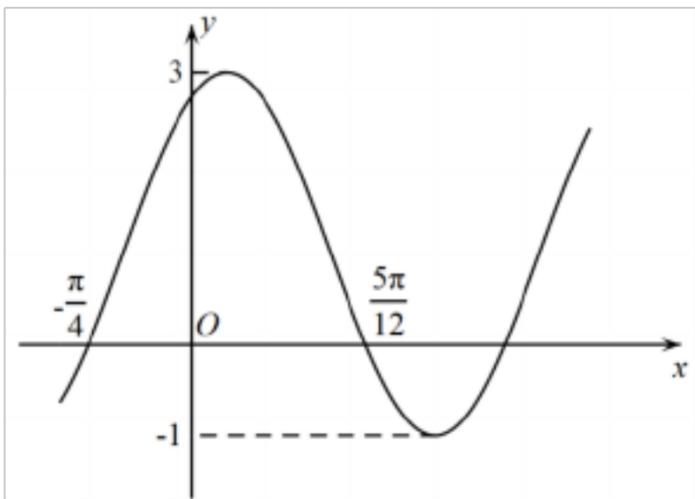
- A. $\frac{1}{a(c-a)} > \frac{1}{b(c-a)}$ B. $\frac{b}{a} > \frac{b+c}{a+c}$
 C. $ab + c^2 > ac + bc$ D. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 的最小值为 4

10. 高斯是德国著名的数学家, 近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”的称号, 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $y = [x]$ 也被称为“高斯函数”, 例如: $[1.6] = 1, [-2.1] = -3$, 设函数

$f(x) = x + 1 - [x]$, 则下列关于函数 $f(x)$ 叙述正确的是 ()

- A. $f(x)$ 为奇函数 B. $[f(x)] = 1$ C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增 D. $f(x)$ 有最大值无最小值

11. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 下列说法正确的是 ()



- A. 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$
- B. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{k\pi}{2}, 1\right) (k \in \mathbf{Z})$ 对称
- D. 为了得到函数 $f(x)$ 的图象, 只需将函数 $g(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再向上平移一个单位长度

12. 若过点 $P(1, \lambda)$ 最多可作出 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 条直线与函数 $f(x) = (x-1)e^x$ 的图象相切, 则 ()

- A. $\lambda + n < 3$
- B. 当 $n = 2$ 时, λ 的值不唯一
- C. λn 可能等于 -4
- D. 当 $n = 1$ 时, λ 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{4}{e}\right) \cup \{0\}$

三、填空题

13. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 幂函数 $y = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 3}$ 为减函数, 则 $m =$ _____.

14. 已知直线 $y = -x + 3$ 分别与函数 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 的图象交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 =$ _____.

15. 若 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\tan \theta = -3$, 则 $\frac{(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sqrt{2 + 2\cos 2\theta}} =$ _____.

四、双空题

16. 记 $f'(x), g'(x)$ 分别为函数 $f(x), g(x)$ 的导函数. 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x_0) = g(x_0)$ 且 $f'(x_0) = g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S点”.

(1) 以下函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在“S点”的是_____

①函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + 2x - 2$;

②函数 $f(x) = x + 1$ 与 $g(x) = e^x$;

③函数 $f(x) = \sin x$ 与 $g(x) = \cos x$.

(2) 已知: $m, n \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x) = mx^2 + nx$ 与 $g(x) = \ln x$ 存在“S点”, 则实数 m 的取值范围为

_____.

五、解答题

17. 命题 p : 实数 x 满足不等式 $\frac{4-x}{x+2} \geq 0$; 命题 q : 实数 x 满足不等式 $x^2 - 4mx - 5m^2 < 0$ 其中 $m \neq 0$. 若

p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) + bx^2 + b^2$ 在 $x=1$ 处的极值为 10, 求实数 a, b 的值;

(2) 若函数 $h(x) = f(x) + ax^2 + 1$ 在区间 $(-2, -1)$ 内存在单调递减区间, 求实数 a 的取值范围.

19. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) - f(x) = 0$, 且 $f(x) = \log_2(2^x + 1) - kx$, $g(x) = f(x) + x$.

(1) 若不等式 $g(4^x - a \cdot 2^x + 2) > g(-2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 $h(x) = x^4 + x \ln x - 2mx + 1$, 若对任意的 $x_1 \in [0, 3]$, 存在 $x_2 \in [e, e^2]$, 使得 $g(x_1) \geq h(x_2)$, 求实数 m 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cos \varphi + 2\sin \varphi - 4\sin^2 \frac{\omega x}{2} \sin \varphi$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$), 其图象的一条对称轴与相

邻对称中心的横坐标相差 $\frac{\pi}{4}$, _____, 从以下两个条件中任选一个补充在空白横线中.

①函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称且 $f(0) < 0$;

②函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < f(1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 函数 $h(x) = f(x) - a$ 存在两个不同零点 x_1, x_2 , 求 $x_1 + x_2$ 的值.

21. 已知函数 $f(x) = x + x^{-1} - 2$.

(1) 若 $\exists x \in [-1, 1]$ 时, $f(2^x) - k \cdot 2^x \geq 0$, 求实数 k 的取值范围;

(2) 设 $g(x) = |2^x - 3|$, 若方程 $f(g(x)) + \frac{2k}{g(x)} - 3k = 0$ 有三个不同的实数解, 求实数 k 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = x(1 + e^{-x}) - \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最值;

(2) 若 $f(x) \geq x(e^{-x} - e^x) + mx + 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \ln n (n \in \mathbf{N}_+)$.

参考答案:

1. B 直接由 $A \cap B \neq \emptyset$ 求解即可

解: 因为集合 $A = \{x | x > a\}$, 集合 $B = \{0, 1\}$, $A \cap B \neq \emptyset$,

所以 $a < 1$,

故选: B

2. B 由存在量词命题的否定为全称量词命题即得.

解: \because 命题 $p: \exists x < -1, 2^x - x - 1 < 0$,

$\therefore \neg p$ 为: $\forall x < -1, 2^x - x - 1 \geq 0$.

故选: B.

3. A 根据正切函数的性质及充要条件的概念即得.

解: 若 $f(x) = \tan x$ 的图象关于点 A 对称, 可得点 A 的坐标是 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,

若点 A 的坐标是 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, 可得 $f(x) = \tan x$ 的图象关于点 A 对称,

故“点 A 的坐标是 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ ”是“ $f(x) = \tan x$ 的图象关于点 A 对称”的充要条件.

故选: A.

4. D 【解析】举例说明 A, B, C 错误; 利用函数奇偶性的定义证明 D 正确.

解: 选项 A: $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x$, $y = f(g(x)) = \sin 2x$ 为周期函数, $g(x) = 2x$ 不是周期函数,

故错误;

选项 B: $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2x$, $y = f(g(x)) = \cos 2x$ 为偶函数, $g(x) = 2x$ 不是偶函数, 故错误;

选项 C: $f(x) = x$, $g(x) = 2x$, $y = f(x) \cdot g(x) = 2x^2$ 不是单调函数, 故错误;

选项 D: $f(g(-x)) = f(-g(x)) \Rightarrow f(g(-x)) = -f(g(x))$, 所以 $y = f(g(x))$ 为奇函数, 故正确.

故选: D

点评本题考查复合函数的单调性, 奇偶性, 周期性, 通过代入特殊函数, 可很快排除错误选项, 是基础题.

5. D 根据题意可列出方程 $100 \times 0.99^x = 1.01^x$, 求解即可.

解: 设经过 x 天“进步”的值是“退步”的值的 100 倍, 则 $100 \times 0.99^x = 1.01^x$, 即 $\left(\frac{1.01}{0.99}\right)^x = 100$,

$$\therefore x = \log_{\frac{1.01}{0.99}} 100 = \frac{\lg 100}{\lg \frac{1.01}{0.99}} = \frac{\lg 100}{\lg \frac{101}{99}} = \frac{2}{\lg 101 - \lg 99}$$

$$\approx \frac{2}{2.0043 - 1.9956} = \frac{2}{0.0087} \approx 230.$$

故选：D.

6. D 【解析】 计算得到 $f(x+2k\pi) = f(x)$, $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, 故函数是周期函数, 轴对称图形, 故②④正确, 根据图像知①③错误, 得到答案.

$$\text{解: } f(x) = \frac{\sin x}{1+2\sin x}, f(x+2k\pi) = \frac{\sin(x+2k\pi)}{1+2\sin(x+2k\pi)} = \frac{\sin x}{1+2\sin x} = f(x), k \in Z,$$

当沿 x 轴正方向平移 $2k\pi, k \in Z$ 个单位时, 重合, 故②正确;

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos x}{1+2\cos x}, f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{\cos x}{1+2\cos x},$$

故 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, 函数关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故④正确;

根据图像知: ①③不正确;

故选: D.

点评本题考查了根据函数图像判断函数性质, 意在考查学生对于三角函数知识和图像的综合应用.

7. A 由题意可计算 $f(x)+f(-x) = -2$, 构造函数 $g(x) = f(x)+1$, 可证明其为奇函数且单调递增,

由此将 $f(2x+1)+f(x) > -2$ 化为 $g(2x+1) > -g(x) = g(-x)$, 求得答案.

解: 由 $f(x) = \lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{2}{2^x+1}$ 可知, $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \text{故 } f(x)+f(-x) &= \lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{2}{2^x+1} + \lg\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{2}{2^{-x}+1} \\ &= \lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) - \left(\frac{2}{2^x+1} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \lg 1 - 2 = -2,$$

$$\text{即 } f(x)+1+f(-x)+1=0,$$

令 $g(x) = f(x)+1$, 则 $g(x)+g(-x)=0$, 即 $g(x) = f(x)+1$ 为奇函数,

因为函数 $y = \lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 为 \mathbf{R} 上的单调增函数, $y = \frac{2}{2^x+1}$ 为 \mathbf{R} 上的单调减函数

故 $f(x) = \lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{2}{2^x+1}$ 为单调增函数, 则 $g(x) = f(x)+1$ 也单调递增;

不等式 $f(2x+1)+f(x) > -2$, 即 $f(2x+1)+1+f(x)+1 > 0$,

$$\text{即 } g(2x+1)+g(x) > 0, g(2x+1) > -g(x) = g(-x),$$

故 $2x+1 > -x, x > -\frac{1}{3}$, 即 $f(2x+1)+f(x) > -2$ 解集为 $(-\frac{1}{3}, +\infty)$,

故选:A

8. B 观察 $a = e^{0.2} - 1, b = \ln 1.2, c = \tan 0.2$, 发现都含有 0.2 , 把 0.2 换成 x , 自变量在 或其子集范围内构造函数, 利用导数证明其单调性, 比较 a, b, c 的大小.

解: 令 $f(x) = e^x - 1 - \tan x = \frac{\cos x e^x - \cos x - \sin x}{\cos x}$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$,

令 $g(x) = \cos x e^x - \cos x - \sin x$, $g'(x) = (-\sin x + \cos x)e^x + \sin x - \cos x = (e^x - 1) \cdot (\cos x - \sin x)$,

当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

又 $g(0) = 1 - 1 = 0$, 所以 $g(x) > 0$, 又 $\cos x > 0$,

所以 $f(x) > 0$, 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 成立, 所以 $f(0.2) > 0$ 即 $a > c$,

令 $h(x) = \ln(x+1) - x$, $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$, $h(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数, 所以 $h(x) < h(0) = 0$, 即

$\ln(x+1) < x$,

令 $m(x) = x - \tan x$, $m'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$, $m(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数, 所以 $m(x) < m(0) = 0$, 即 $x < \tan x$,

所以 $\ln(x+1) < x < \tan x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 成立,

令 $x = 0.2$, 则上式变为 $\ln(0.2+1) < 0.2 < \tan 0.2$, 所以 $b < 0.2 < c$

所以 $b < c$,

所以 $b < c < a$.

故答案为: B.

点评比较大数题目, 是高考的热点, 也是难点, 通过观察和构造函数是基本的解题要求, 难点在于构造后的证明, 需要平时多积累常见的结论, 达到深入理解, 举一反三, 融会贯通.

9. ABC 根据实数 a, b, c 满足 $0 < a < b < c$, 分别化简选项 A、B、C 中的不等式即可判断; 选项 D 的判断要注意基本不等式取等条件的检验.

解: 由题 $0 < a < b < c$, 所以有

$\frac{1}{a(c-a)} > \frac{1}{b(c-a)} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow b > a$, 故 A 正确;

$\frac{b}{a} > \frac{b+c}{a+c} \Rightarrow b(a+c) > a(b+c) \Rightarrow bc > ac \Rightarrow b > a$, 故 B 正确;

$ab + c^2 > ac + bc \Rightarrow c(c-b) - a(c-b) > 0 \Rightarrow (c-a)(c-b) > 0$, 故 C 正确;

$(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$, 当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ 即 $a = b$ 时取等,

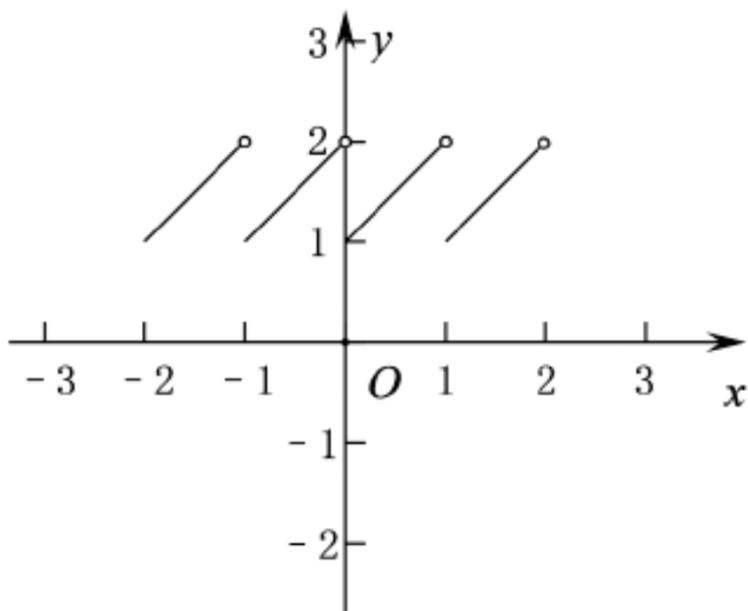
又因为 $0 < a < b$, 所以 $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) > 4$, 即 $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 无最小值, 故 D 错误.

故选: ABC.

10. BC 根据 $[x]$ 的定义, 将函数 $f(x)$ 写成分段函数的形式, 再画出函数的图象, 根据函数图象判断函数的性质.

$$\text{解: 由题意: } [x] = \begin{cases} \dots \\ -2, -2 \leq x < -1 \\ -1, -1 \leq x < 0 \\ 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \\ \dots \end{cases}, \text{ 所以 } f(x) = \begin{cases} \dots \\ x+3, -2 \leq x < -1 \\ x+2, -1 \leq x < 0 \\ x+1, 0 \leq x < 1 \\ x, 1 \leq x < 2 \\ \dots \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的图象如下图,



由图象分析: $f(0) = 1$, 所以 A 不正确; $[f(x)] = 1$, 所以 B 正确;

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 所以 C 正确; $f(x)$ 有最小值无最大值, 所以 D 不正确.

故选: BC.

11. ABD 由题意求出 $f(x)$ 的解析式可判断 A; 利用正弦函数的单调性和对称性可判断 BC; 由三角函数的平移变换可判断 D.

$$\text{解: 对于 A, 由图可知, } \begin{cases} A+b=3 \\ -A+b=-1 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} A=2 \\ b=1 \end{cases},$$

$$\text{由 } \begin{cases} \sin\left[\omega \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \varphi\right] = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\omega \times \frac{5\pi}{12} + \varphi\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} -\frac{\omega\pi}{4} + \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{12}\omega + \varphi = \frac{7\pi}{6} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

两式相减得:

$$\frac{2\pi}{3}\omega = \frac{4\pi}{3} + 2(k_1 - k_2)\pi,$$

$$\text{所以 } \omega = 2 + 3(k_1 - k_2) \text{ ①,}$$

$$\text{又因为 } \begin{cases} \frac{T}{2} \leq \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \\ T \geq \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{\omega} \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega \geq \frac{3}{2} \\ \omega \leq 3 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \frac{3}{2} \leq \omega \leq 3, \text{ 结合①, } \omega = 2,$$

$$\text{因为 } \frac{-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}}{2} = \frac{\pi}{12},$$

$$\text{所以 } 2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解得: } -\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, 令 } 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得: } x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, 1\right) (k \in \mathbb{Z})$ 对称, 所以 C 不正确;

$$\text{对于 D, 将函数 } 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 向右平移 } \frac{\pi}{4} \text{ 个单位得到 } 2\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 向上平}$$

$$\text{移一个单位长度可得 } y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1, \text{ 故 D 正确.}$$

故选: ABD.

12. ACD 由题设切点为 $(x_0, (x_0 - 1)e^{x_0})$, 进而得 $\lambda = -e^{x_0}(x_0^2 - 2x_0 + 1)$, 再构造函数

$g(x) = -e^x(x^2 - 2x + 1)$, 将问题转化为 $y = g(x)$ 与 $y = \lambda$ 的交点个数问题, 再数形结合求解即可.

解: 不妨设切点为 $(x_0, (x_0 - 1)e^{x_0})$, 因为 $f'(x) = xe^x$,

$$\text{所以切线方程为 } y - \lambda = x_0 e^{x_0}(x - 1),$$

$$\text{所以 } (x_0 - 1)e^{x_0} - \lambda = x_0 e^{x_0}(x_0 - 1), \text{ 整理得 } \lambda = -e^{x_0}(x_0^2 - 2x_0 + 1),$$

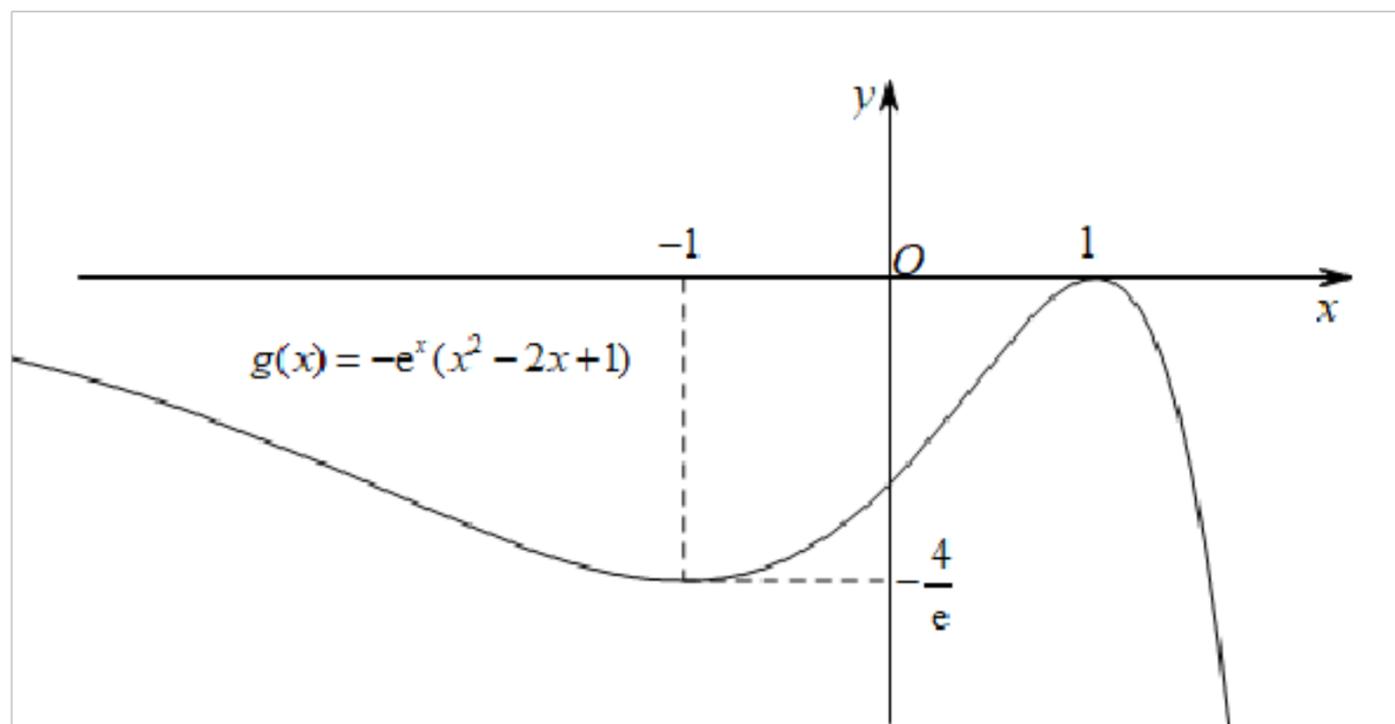
$$\text{所以令 } g(x) = -e^x(x^2 - 2x + 1), \text{ 则 } g'(x) = -e^x(x^2 - 1),$$

所以, 令 $g'(x) = 0$ 得 $x = \pm 1$.

所以, 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x) < 0$, 当 $-1 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$,

因为，当 x 趋近于 $-\infty$ 时， $g(x)$ 趋近于 0 ， $g(-1) = -\frac{4}{e}$ ， $g(0) = -1$ ， $g(1) = 0$ ，当 x 趋近于 $+\infty$ 时， $g(x)$ 趋近于 $-\infty$ ，

所以，函数 $g(x)$ 的图像大致如图，



所以，当 $n=2$ 时， $\lambda = g(-1) = -\frac{4}{e}$ ，故 B 错误，此时 $\lambda + n < 3$ 成立；

当 $n=3$ 时， $\lambda \in \left(-\frac{4}{e}, 0\right)$ ，所以 $\lambda + n < 3$ ， $-\frac{12}{e} < \lambda n < 0$ ， $-\frac{12}{e} < -4$ ，故 λn 可能等于 -4 ，C 正确；

当

当 $n=1$ 时， $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{4}{e}\right) \cup \{0\}$ ，显然 $\lambda + n < 3$ ，故 D 正确；

综上， $\lambda + n < 3$ ，A 正确.

故选：ACD

13. 2 利用幂函数定义即可得到结果.

解：∵ 函数为幂函数，则 $m^2 - m - 1 = 1$ ，解得 $m = -1$ 或 $m = 2$ ，

又因为函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

可得 $m^2 - 2m - 3 < 0$ ，可得 $m = 2$ ，

故答案为：2

14. 3 根据函数 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 互为反函数，关于 $y = x$ 对称，求出 AB 的中点坐标，即可得到结果.

解：函数 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 互为反函数，则函数 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 关于 $y = x$ 对称，

将 $y = -x + 3$ 与 $y = x$ 联立求得交点为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ，

由直线 $y = -x + 3$ 分别与函数 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 的图象交于点为 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

则点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/306123213125010040>