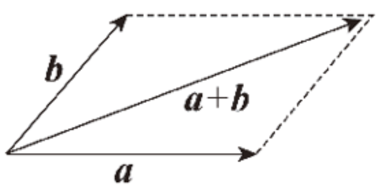
KAO DIAN DIAO CHA



▪考点调查360°▪

第四章

平面向量、数系的扩充与复数的引入

第三节　平面向量数量积及平面向量应用

课前学案
基础诊疗

课堂学案
考点通关

高考模拟
备考套餐

考纲导学	1.理解平面向量数量积的含义及其物理意义。了解平面向量的数量积与向量投影的关系。
	2.掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的运算。
	3.能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系。
	4.会用向量方法解决某些简单的平面几何问题。会用向量方法解决简单的力学问题与其他一些实际问题。

课前学案　基础诊疗

夯基固本　基础自测

知识梳理

1．平面向量的数量积

若两个 $\boxed{1}$ ___非零___ 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，则数量 $\boxed{2}$ ___$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$___ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)，记作 $\boxed{3}$ ___$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$___。

规定：零向量与任一向量的数量积为 $\boxed{4}$ ___0___。

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boxed{5}$ ___$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$___，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boxed{6}$ ___$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$___。

2．平面向量数量积的几何意义

数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度$|\boldsymbol{a}|$与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影 $\boxed{7}$ $\underline{\quad |\boldsymbol{b}|\cos\theta \quad}$的乘积。

3．平面向量数量积的重要性质

(1)$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=$ $\boxed{8}$ $\underline{\quad |\boldsymbol{a}|\cos\theta \quad}$；

(2)非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ $\boxed{9}$ $\underline{\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \quad}$；

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\boxed{10}$ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\boxed{11}$ $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$ $\boxed{12}$ $\boldsymbol{a}^2$，$|\boldsymbol{a}|=$ $\boxed{13}$ $\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

(4)$\cos\theta=$ $\boxed{14}$ $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；

(5)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$ $\boxed{15}$ $\leqslant$ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$。

4．平面向量数量积满足的运算律

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\boxed{16}$ $\underline{\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad}$(交换律)；

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=$ $\boxed{17}$ $\underline{\quad \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) \quad}$($\lambda$ 为实数)；

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ $\boxed{18}$ $\underline{\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad}$。

5．平面向量数量积有关性质的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\boxed{19}$ $\underline{x_1x_2+y_1y_2}$，由此得到：

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2=$ $\boxed{20}$ $\underline{x^2+y^2}$，或 $|\boldsymbol{a}|=$ $\boxed{21}$ $\underline{\sqrt{x^2+y^2}}$。

(2)设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 A，B 两点间的距离 $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=$ $\boxed{22}$ $\underline{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$。

(3)设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ $\boxed{23}$ $\underline{x_1x_2+y_1y_2=0}$。

助学微博

1 个条件——两个非零向量垂直的充要条件

两个非零向量垂直的充要条件为：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

2 个结论——与向量夹角有关的两个结论

(1)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角或 $0°$；

(2)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角或 $180°$。

4个注意点——向量运算中应注意的四个问题

(1)在求△ABC 的三边所对应向量的夹角时，要注意是三角形的内角还是外角。如在等边△ABC 中，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角应为 120°而不是 60°。

(2)在平面向量数量积的运算中，不能从 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 推出 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$ 成立。实际上由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 可推出以下四种结论：①$\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{b}=0$；②$\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{b}\neq0$；③$\boldsymbol{a}\neq0$，$\boldsymbol{b}=0$；④$\boldsymbol{a}\neq0$，$\boldsymbol{b}\neq0$，但 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

(3)实数运算满足消去律：若 $bc=ca$，$c\neq0$，则有 $b=a$。在向量数量积的运算中，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\neq0)$，则不一定得到 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。

(4)实数运算满足乘法结合律，但平面向量数量积的运算不满足乘法结合律，即$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 不一定等于 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$，这是由于$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 表示一个与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不一定共线。

基础自测

1．下列四个命题中真命题的个数为(　　)

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

②若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{b}\neq0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；

③$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；

④$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$。

A．4　　B．2　　C．0　　D．3

答案与解析

解析：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，或 $\boldsymbol{a}=0$，或 $\boldsymbol{b}=0$。故①命题错。

$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\therefore \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$。

又 $\because \boldsymbol{b}\neq0$，$\therefore \boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，或 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$。故②命题错误。

$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 都是实数，故 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，

$\therefore (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 不一定与 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 相等。

故③命题不正确。

$\because (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta\leqslant|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$。故④命题不正确。

答案：C

2．在△ABC中，$AB=3$，$AC=2$，$BC=\sqrt{10}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$(　　)

A．$-\frac{3}{2}$　B．$-\frac{2}{3}$　C.$\frac{2}{3}$　D.$\frac{3}{2}$

答案与解析

解析：在△ABC中，

$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+4-10}{2\times3\times2}=\frac{1}{4}$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=3\times2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$。

答案：D

3．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1，-3)$，$\boldsymbol{b}=(4，-2)$，$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $\lambda=$(　　)

A．-1　B．1　C．-2　D．2

答案与解析

解析：$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda+4，-3\lambda-2)$。

$\because \lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，$\therefore(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=10\lambda+10=0$。

$\therefore \lambda=-1$。

答案：A

4．已知 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,7)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为(　　)

A.$\sqrt{13}$　B.$\frac{\sqrt{13}}{5}$　C.$\frac{\sqrt{65}}{5}$　D.$\sqrt{65}$

答案与解析

解析：$|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2\times(-4)+3\times7}{\sqrt{(-4)^2+7^2}}=\frac{13}{\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{65}}{5}$。

答案：C

5．已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=2$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　B.$\frac{\pi}{4}$　C.$\frac{\pi}{3}$　D.$\frac{\pi}{2}$

答案与解析

解析：$\because \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=2$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+\boldsymbol{a}^2=3$。

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{1\times6}=\frac{1}{2}$。

$\therefore \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$。

答案：C

课堂学案　考点通关

考点例析　通关特训